

Г. С. ПИСАРЕНКО
А. П. ЯКОВЛЕВ
В. В. МАТВЕЕВ

СПРАВОЧНИК по СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1988

УДК 539.3 / 4 + 539.1 + 620.17 (031)

Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.; Отв. ред. Писаренко Г. С.— 2-е изд., перераб. и доп.— Киев: Наук. думка, 1988.— 736 с. — ISBN 5-12-000299-4.

В справочнике приведены сведения по основным вопросам курса сопротивления материалов для высших технических учебных заведений, а также данные по результатам расчета наиболее типичных элементов конструкций.

Для инженерно-технических работников различных специальностей, практическая деятельность которых связана с расчетами на прочность, студентов высших технических учебных заведений, преподавателей и аспирантов, занимающихся вопросами сопротивления материалов и строительной механики.

Ил. 1114. Табл. 62. Библиогр.: с. 724—725.

**Ответственный редактор
академик АН УССР Г. С. Писаренко**

Печатается по постановлению ученого совета
Института проблем прочности АН УССР
и решению редакционной коллегии справочной литературы АН УССР

**Редакция справочной литературы
Заведующий редакцией В. В. Панюков
Редактор А. С. Слыщенко**

П $\frac{2105000000-509}{M221(04)-88}$ КУ-3-20-88

ISBN 5-12-000299-4

© Издательство «Наукова думка», 1975

© Издательство «Наукова думка»,
изменения, дополнения, 1988

Предисловие ко второму изданию	8
Предисловие	9
Г л а в а 1. Введение	11
1.1. Общие сведения о сопротивлении материалов. Изучаемые объекты	11
1.2. Виды деформаций. Понятие о деформированном состоянии материала	13
1.3. Основные гипотезы	15
Г л а в а 2. Геометрические характеристики плоских сечений.	16
2.1. Статический момент площади. Центр тяжести площади	16
2.2. Моменты инерции плоских фигур	17
2.3. Моменты инерции сложных сечений	19
2.4. Моменты инерции относительно параллельных осей	20
2.5. Зависимость между моментами инерции при повороте координатных осей	20
2.6. Определение направления главных осей инерции. Главные моменты инерции	21
2.7. Графическое представление моментов инерции. Понятие о радиусе и эллипсе инерции	23
2.8. Моменты сопротивления	26
2.9. Порядок расчета	27
Г л а в а 3. Внешние и внутренние силы. Метод сечений. Эпюры внутренних сил. Напряжения в сечении	102
3.1. Классификация внешних сил	102
3.2. Внутренние силы. Метод сечений. Эпюры внутренних сил	103
3.3. Балки и их опоры	106
3.4. Вычисление реакций	108
3.5. Усилия и моменты в сечениях балки. Построение эпюр Q и M	109
3.6. Дифференциальные зависимости при изгибе балок. Некоторые особенности эпюр Q и M	111
3.7. Построение эпюр для статически определимых рам	113
3.8. Построение эпюр для кривых стержней	114
3.9. Дифференциальные зависимости при изгибе плоских кривых стержней	136
3.10. Построение эпюр внутренних сил для пространственных стержней	136
3.11. Напряжения в сечении	138
3.12. Условия прочности и жесткости	140

Глава 4. Механические характеристики материала при растяжении и сжатии. Концентрация напряжений. Допускаемые напряжения	143
4.1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии	143
4.2. Испытание материалов на растяжение, сжатие и твердость	146
4.3. Понятие о механизме образования деформаций	153
4.4. Концентрация напряжений	156
4.5. Влияние различных факторов на механические свойства материалов	158
4.6. Допускаемые напряжения	163
Глава 5. Напряженное и деформированное состояние	184
5.1. Напряжения в точке. Главные площадки и главные напряжения	184
5.2. Линейное напряженное состояние	185
5.3. Плоское напряженное состояние	186
5.4. Прямая задача при плоском напряженном состоянии. Круг напряжений	188
5.5. Обратная задача при плоском напряженном состоянии	189
5.6. Объемное напряженное состояние	190
5.7. Деформаций при объемном напряженном состоянии. Обобщенный закон Гука	192
5.8. Потенциальная энергия деформаций	194
Глава 6. Критерии прочности	196
6.1. Основные теории прочности	196
6.2. Понятие о некоторых новых теориях прочности	200
Глава 7. Растяжение и сжатие	208
7.1. Расчет стержней на растяжение (сжатие) с учетом собственного веса	208
7.2. Стержень равного сопротивления растяжению (сжатию). Ступенчатый стержень	209
7.3. Статически неопределимые конструкции	210
7.4. Расчет гибких нитей	215
Глава 8. Сдвиг	223
8.1. Сдвиг. Расчет на срез	223
8.2. Чистый сдвиг	224
8.3. Некоторые примеры расчета на срез	226
Глава 9. Кручение	233
9.1. Напряжения и деформации при кручении	233
9.2. Кручение стержней некруглого сечения	238
9.3. Расчет винтовых пружин	242
9.4. Концентрация напряжений при кручении	244
Глава 10. Изгиб	249
10.1. Нормальные напряжения при плоском изгибе	249
10.2. Касательные напряжения при изгибе	252
10.3. Расчет на прочность при изгибе	254
10.4. Концентрация напряжений при изгибе	257
10.5. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (упругой линии)	261

10.6. Определение перемещений в балках по методу начальных параметров	265
10.7. Расчет балок переменного сечения на прочность и жесткость	269
10.8. Расчет на изгиб с учетом сил инерции	274
10.9. Касательные напряжения при изгибе балок тонкостенного профиля. Центр изгиба	275
10.10. О расчете балок на упругом основании	278
10.11. Изгиб балок, материал которых не следует закону Гука .	282
Глава 11. Сложное сoproгивление	303
11.1. Сложный и косоу изгиб	303
11.2. Изгиб с растяжением	307
11.3. Изгиб с кручением	311
Глава 12. Общие теоремы об упругих системах. Общие методы определения перемещений	318
12.1. Обобщенные силы и перемещения	318
12.2. Работа внешних сил	320
12.3. Работа внутренних сил	321
12.4. Применение начала возможных перемещений к упругим системам	323
12.5. Теоремы о взаимности работ и перемещений	326
12.6. Общие формулы для определения перемещений. Метод Мора	326
12.7. Перемещения, вызванные изменением температуры . . .	328
12.8. Вычисление интеграла Мора	329
12.9. Потенциальная энергия деформации	331
12.10. Теорема Кастильяно. Теорема Лагранжа	332
12.11. Теорема о минимуме потенциальной энергии	334
Глава 13. Статически неопределимые системы	340
13.1. Основные этапы расчета статически неопределимых систем	340
13.2. Канонические уравнения метода сил	343
13.3. Многоопорные неразрезные балки. Уравнение трех моментов	356
13.4. Расчет статически неопределимых криволинейных стержней	359
13.5. Определение перемещений в статически неопределимых системах	361
13.6. О расчете пространственных рамных систем	363
Глава 14. Расчет плоских кривых брусьев	392
14.1. Определение напряжений в брусьях большой кривизны	392
14.2. Расчет на прочность	397
14.3. Определение перемещений	397
Глава 15. Расчет толстостенных цилиндров и вращающихся дисков	410
15.1. Толстостенный цилиндр, подверженный внутреннему и наружному давлению	410
15.2. Расчет составных цилиндров	415
15.3. Температурные напряжения в толстостенных цилиндрах	417
15.4. Расчет вращающихся дисков	421
Глава 16. Расчет тонкостенных оболочек	428
16.1. Расчет тонкостенных оболочек по безмоментной теории .	428
16.2. Распорные кольца в оболочках	432

Глава 17. Расчет конструкций по предельным состояниям	439
17.1. Основные понятия о предельном состоянии	439
17.2. Расчеты при растяжении и сжатии	440
17.3. Расчет при кручении	441
17.4. Расчет при изгибе	443
Глава 18. Устойчивость сжатых стержней	447
18.1. Устойчивое и неустойчивое упругое равновесие	447
18.2. Формула Эйлера для определения критической нагрузки сжатого стержня	448
18.3. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы	450
18.4. О потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала	453
18.5. Расчет сжатых стержней на устойчивость с помощью коэффициентов уменьшения основного допускаемого напряжения	455
18.6. Выбор материала и рациональной формы поперечных сечений сжатых стержней	458
18.7. Продольно-поперечный изгиб	458
Глава 19. Упругие колебания	510
19.1. Классификация механических колебаний	510
19.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	513
19.3. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы при гармоническом возбуждении	515
19.4. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления, пропорционального скорости	517
19.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления, пропорционального скорости	518
19.6. Демпфирующая способность материала	521
19.7. Критическая скорость вращения вала	524
19.8. Свободные колебания упругих систем с несколькими степенями свободы	525
19.9. Продольные и крутильные колебания стержней	532
19.10. Поперечные колебания призматических стержней	535
19.11. Закон сохранения энергии при колебаниях	539
19.12. Некоторые приближенные методы определения собственных частот колебаний упругих систем	540
19.13. Общий метод расчета колебаний механических систем с учетом рассеяния энергии	547
Глава 20. Сопротивление материалов действию повторно-переменных напряжений	579
20.1. Явление усталости материалов	579
20.2. Методы определения предела выносливости. Диаграммы усталости	581
20.3. Влияние на предел выносливости конструктивно-технологических факторов	585
20.4. Расчет на прочность при повторно-переменных нагрузках	590
20.5. Понятие о малоцикловой усталости материалов	596
Глава 21. Расчет на ударную нагрузку	606
21.1. Расчет на удар при осевом действии нагрузки	606
21.2. Напряжение при скручивающем ударе	610
21.3. Расчет на удар при изгибе	611

Глава 22. Основы механики разрушения	616
22.1. Общие понятия	616
22.2. Хрупкое разрушение	617
22.3. Силовые критерии разрушения	619
22.4. Учет пластической зоны	623
22.5. Методика экспериментального определения вязкости разрушения конструкционных материалов	625
Глава 23. Контактные напряжения	627
23.1. Основные понятия и формулы для определения контактных напряжений и деформаций	627
23.2. Проверка прочности при контактных напряжениях	631
Приложения	644
1. Физико-механические свойства материалов (для ориентировочных расчетов)	644
2. Коэффициенты концентрации напряжений и чувствительности к концентрации напряжений	680
3. Функции Крылова S, T, U, V	706
4. Функции Крылова для расчета балок постоянного сечения на упругом основании	717
Перечень таблиц	720
Использованная литература	724
Предметный указатель	726

Изданный в 1975 г. «Справочник по сопротивлению материалов», в котором в отличие от подобных справочников приведены не только окончательные расчетные формулы, таблицы и графики, но и теоретические основы по учебнику Г. С. Писаренко, В. А. Агарева, А. Л. Квитки, В. Г. Попкова, Э. С. Уманского «Сопротивление материалов» (второго и третьего изданий), приобрел популярность как в нашей стране, так и за рубежом. Он издавался в 1979 г. на испанском и французском языках, а в 1985 г. — на португальском, а также вторично издаи на испанском и французском языках.

В связи с большим спросом, а также накопившимся за последние годы новыми данными по вопросам сопротивления материалов возникла необходимость в переиздании справочника на русском языке. В предлагаемом издании введена Международная система единиц (СИ), дополнительно внесены в соответствии с пятым изданием указанного учебника такие важные разделы, как малоцикловая усталость и механика разрушения, расширен раздел по механическим колебаниям, дополнены справочные данные, произведены отдельные уточнения, исправлены замеченные ошибки и опечатки, а также составлен предметный указатель.

Авторы

Сопротивление материалов является одной из основных общеобразовательных инженерных дисциплин и играет существенную роль в формировании инженера почти любой специальности. Особенно большое значение сопротивление материалов имеет для механических, машиностроительных и строительных инженерных специальностей.

Введение в учебные программы высших технических учебных заведений новых дисциплин, отражающих современное состояние науки и техники, при ограниченных сроках обучения привело к существенному сокращению количества лекционных часов по курсу сопротивления материалов. Восполнение появившихся в результате этого пробелов в знании студентами вузов сопротивления материалов может быть достигнуто в известной мере за счет самостоятельного изучения ими необходимых разделов этого важного для будущего инженера курса по соответствующим учебникам.

В Советском Союзе многократно издавались учебники по сопротивлению материалов С. П. Тимошенко, Н. М. Беляева, В. И. Феодосьева и многие другие. Вместе с тем имеется большая заинтересованность в справочнике по сопротивлению материалов, отражающем с достаточной полнотой современное состояние науки о прочности, как со стороны большой армии инженеров — производителей и конструкторов, так и со стороны учащихся и научных работников. К сожалению, такого справочника нет ни в нашей стране, ни за рубежом, а существующие краткие справочники по сопротивлению материалов и строительной механике носят специализированный характер и подают материал по ряду важнейших разделов, базируясь на различных подходах, применяемых в разных курсах сопротивления материалов. Авторы поставили перед собой цель создать справочник по сопротивлению материалов, который обладал бы достаточной полнотой и универсальностью, отражал современное состояние науки о прочности и основывался на едином подходе к подаче справочного материала, увязанного с соответствующим теоретическим курсом. В качестве последнего был принят учебник Г. С. Писаренко, В. А. Агарева, А. Л. Квитки, В. Г. Попкова, Э. С. Уманского «Сопротивление материалов», изд. 3, Киев, «Вища школа», 1973, в котором отражен многолетний опыт

преподавания сопротивления материалов в Киевском политехническом институте и опыт использования двух предыдущих изданий этого учебника студентами многих высших учебных заведений страны.

Перед справочным материалом в виде окончательных формул, таблиц и графиков в каждой главе кратко излагаются основные теоретические предпосылки. При этом формулируются исходные гипотезы, соответствующие правила, теоремы и даются важнейшие заключения и рекомендации. Для облегчения пользования справочными данными на с. 720 приведен перечень таблиц, содержащихся в книге.

Мы надеемся, что настоящий справочник будет полезен не только инженерам-конструкторам и производственникам всех специальностей, встречающимся в практической деятельности с расчетами на прочность, но будет с успехом использован студентами, аспирантами, преподавателями и научными работниками.

1.1. Общие сведения о сопротивлении материалов. Изучаемые объекты

Сопротивление материалов — наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

Прочность — способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку, не разрушаясь.

Жесткость — способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформаций (изменение формы и размеров). При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенных величины, устанавливаемых в соответствии с требованиями к конструкции.

Устойчивость — способность конструкции и ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Для того чтобы конструкции в целом отвечали требованиям прочности, жесткости и устойчивости, необходимо придать их элементам наиболее рациональную форму и определить соответствующие размеры.

Сопротивление материалов решает указанные задачи, основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение.

В теоретической части сопротивление материалов базируется на теоретической механике и математике, а в экспериментальной — на физике и материаловедении.

Сопротивление материалов является наиболее общей наукой о прочности машин и сооружений. Без фундаментального знания сопротивления материалов невозможно создание различного рода машин и механизмов, гражданских и промышленных сооружений, мостов, линий электропередач и антенн, ангаров, кораблей, самолетов и вертолетов, турбомашин и электрических машин, агрегатов атомной энергетики, ракетной и реактивной техники и др.

Сопротивление материалов не исчерпывает всех вопросов механики деформируемого твердого тела. Этими вопросами занимаются также смежные дисциплины, как строительная механика стержневых систем, теория упругости и теория пластичности. Однако основная роль при решении задач на прочность принадлежит сопротивлению материалов.

При всем разнообразии видов конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. Это *стержни, пластинки и оболочки, массивные тела*.

Стержнем, или бруском, называется тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других (поперечных) размера (рис. 1). В инженерном деле встречаются стержни с прямолинейной (рис. 1, а), и криволинейной (рис. 1, б) осями. Как прямые, так и кривые стержни могут быть постоянного (рис. 1, а) или переменного

(рис. 1, в) сечения. Примерами прямых стержней являются балки, оси, валы. Примерами кривых стержней могут служить грузоподъемные крюки, звенья цепей и т. п. Стержни со сложным профилем поперечного сечения, у которых толщина стенок значительно меньше габаритных размеров сечения, называются тонкостенными (рис. 1, г).

Оболочка представляет собой тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии одна от другой. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей оболочки, называется срединной поверхностью. По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические (рис. 2, а), конические (рис. 2, б), сферические (рис. 2, в) и др. К оболочкам относятся тонкостенные резервуары, котлы, купола зданий, обшивки фюзеляжей, крыльев и других частей летательных аппаратов, корпуса судов и т. п.

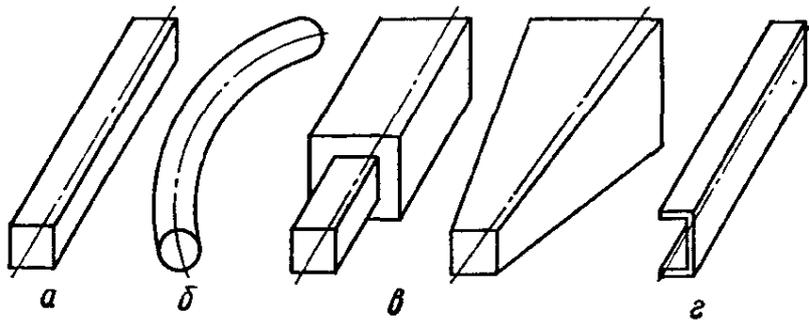


Рис. 1

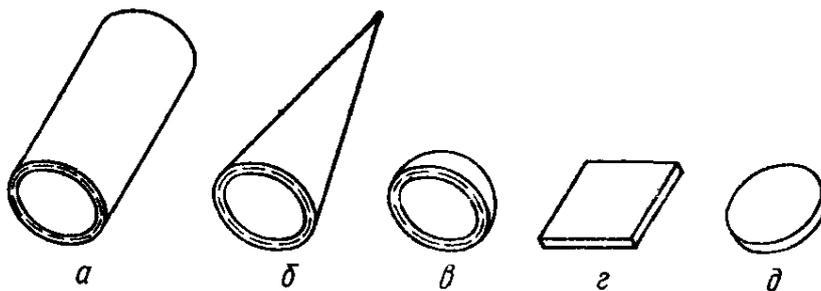


Рис. 2

Если срединная поверхность представляет собой плоскость, то такая оболочка называется *пластиной* (рис. 2, д). Пластины могут быть круглыми, прямоугольными и иметь другие очертания. Толщина пластины, как и оболочек, может быть постоянной или переменной. Пластнами являются плоские днища и крышки резервуаров (рис. 2, д), перекрытия инженерных сооружений, диски турбомашин и т. п.

Массивным называется тело, у которого все три размера — величины одного порядка. Это — фундаменты сооружений, подпорные стенки и т. п.

В сопротивлении материалов, как правило, задачи решаются простыми математическими методами с привлечением ряда упрощающих гипотез и использованием данных эксперимента; решения при этом доводятся до расчетных формул, пригодных для использования в инженерной практике. Основным объектом, рассматриваемым в сопротивлении материалов, является прямой стержень*.

* Вопросы развития сопротивления материалов как науки освещены в книге: Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов. — М.: Гостехиздат, 1957. — 536 с.

1.2. Виды деформаций. Понятие о деформированном состоянии материала

Реальные тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Деформации тел происходят вследствие нагружения их внешними силами или изменения температуры. При деформации тела его точки, а также мысленно проведенные линии или сечения перемещаются в плоскости или в пространстве относительно своего исходного положения.

При нагружении твердого тела в нем возникают внутренние силы взаимодействия частиц, оказывающие противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое они занимали до деформации.

Различают *упругие деформации*, исчезающие после прекращения действия вызвавших их сил, и *пластические*, или *остаточные*, деформации, не исчезающие после снятия нагрузок. В большинстве случаев для величин деформаций элементов конструкций устанавливают определенные ограничения.

В сопротивлении материалов изучаются следующие основные виды деформирования стержней или виды их деформаций: *растяжение* и *сжатие*, *сдвиг* (или *срез*), *кручение*, *изгиб*. Рассматриваются также более сложные деформации, получающиеся в результате сочетания нескольких основных видов деформаций.

Растяжение или *сжатие* возникает, например, в случае, когда к стержню вдоль его оси приложены противоположно направленные силы (рис. 3). При этом происходит поступательное перемещение сечений вдоль оси стержня, который при растяжении удлиняется, а при сжатии укорачивается. Изменение первоначальной длины стержня l , обозначаемое Δl , называется *абсолютным удлинением* (при растяжении) или *абсолютным укорочением* (при сжатии).

Отношение абсолютного удлинения (укорочения) Δl к первоначальной длине l стержня или его участка называется *средним относительным удлинением (укорочением)* на длине l или *средней линейной относительной деформацией стержня* или его участка и обозначается обычно буквой $\varepsilon_{\text{ср}}$:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{l}.$$

Истинное линейное относительное удлинение, или *относительная линейная деформация* в точке, определяется как относительная деформация участка при $l \rightarrow 0$:

$$\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}.$$

На растяжение или сжатие работают многие элементы конструкций: стержни ферм, колонны, штоки поршневых машин, стяжные болты и др.

Сдвиг, или *срез*, возникает, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения стержня одно относительно другого при неизменном расстоянии между ними (рис. 4). Величина смещения Δs называется *абсолютным сдвигом*. Отношение абсолютного сдвига

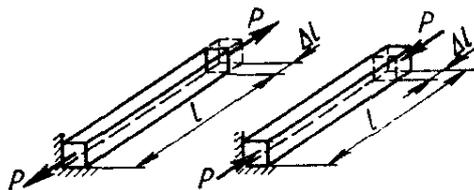


Рис. 3

к расстоянию между смещающимися плоскостями (тангенс угла γ) называется *относительным сдвигом*. Вследствие малости угла γ можно принять

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Относительный сдвиг является угловой деформацией, характеризующей перекося элемента.

На сдвиг, или срез, работают, например, заклепки и болты, скрепляющие элементы, которые внешние силы стремятся сдвинуть друг относительно друга.

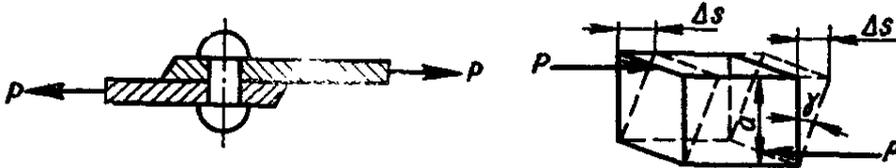


Рис. 4

Кручение возникает при действии на стержень внешних сил, образующих момент относительно его оси (рис. 5). Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня друг относительно друга вокруг его оси. Угол поворота одного сечения стержня относительно другого, находящегося на расстоянии l , называется *углом закручивания* на длине l . Отношение угла закручивания φ к длине l называется *относительным углом закручивания*

$$\theta = \frac{\varphi}{l}.$$

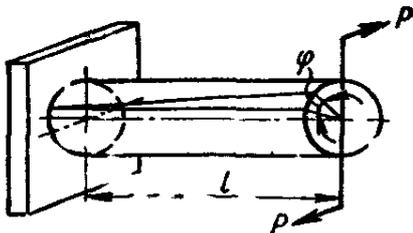


Рис. 5



Рис. 6

На кручение работают валы, шпиндели токарных и сверлильных станков и другие детали.

Изгиб (рис. 6) заключается в искривлении оси прямого стержня или в изменении кривизны кривого стержня. Происходящее при изгибе перемещение какой-либо точки оси стержня выражается вектором, начало которого совмещено с первоначальным положением точки, а конец — с положением той же точки в деформированном стержне. В прямых стержнях перемещения точек, направленные перпендикулярно к начальному положению оси, называются *прогибами*. Обозначим прогибы буквой w , а наибольший из них — буквой f . При изгибе также происходит поворот сечений стержня вокруг осей, лежащих в плоскостях сечений. Углы поворота сечений относительно своих начальных положений обозначим буквой φ .

На изгиб работают балки междуэтажных перекрытий, мостов, оси железнодорожных вагонов, листовые рессоры, валы, зубья шестерен, спицы колес, рычаги и многие другие детали.

Описанные выше простейшие деформации стержня дают представление об изменении его формы и размеров в целом, но ничего не говорят о степени и характере *деформированного состояния* материала. Исследования показывают, что деформированное состояние тела является неравномерным и изменяется от точки к точке. При этом деформированное состояние в точке тела полностью определяется шестью *компонентами деформации*: тремя относительными линейными деформациями ε_x , ε_y , ε_z и тремя относительными угловыми деформациями γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} .

1.3. Основные гипотезы

Для построения теории сопротивления материалов принимают ряд гипотез о структуре и свойствах материалов, а также о характере деформаций.

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Предполагается, что материал полностью заполняет занимаемый им объем. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Предполагается, что свойства материала одинаковы во всех точках и в каждой точке — во всех направлениях. В некоторых случаях предположение об изотропии материала неприемлемо. Так, анизотропными являются древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон существенно различны, а также армированные материалы или так называемые композиционные материалы.

3. *Гипотеза о малости деформации* (гипотеза относительной жесткости материала). Предполагается, что деформации малы по сравнению с размерами деформируемого тела. На этом основании пренебрегают изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела при деформации и уравнения статики составляют для недеформированного тела. В некоторых случаях от этого принципа приходится отступать, что оговаривается особо.

4. *Гипотеза о совершенной упругости материала.* Все тела предполагаются абсолютно упругими. В действительности реальные тела можно считать упругими только до определенных величин нагрузок, и это необходимо учитывать, применяя формулы сопротивления материалов.

5. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками.* Предполагается, что для большинства материалов справедлив закон Гука, устанавливающий прямо пропорциональную зависимость между деформациями и нагрузками.

Как следствие гипотез о малости деформаций и о линейной зависимости между деформациями и усилиями при решении большинства задач сопротивления материалов применим *принцип суперпозиции* (принцип независимости действия и сложения сил). Например, усилия в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, температурными воздействиями), равны сумме усилий, вызванных каждым из этих факторов, и не зависят от порядка их приложения. Это же справедливо и в отношении деформаций.

6. *Гипотеза плоских сечений.* Предполагается, что мысленно проведенные плоские сечения, перпендикулярные к оси стержня, в процессе его деформирования остаются плоскими и перпендикулярными к оси.

Эти, а также некоторые другие гипотезы позволяют решать широкий круг задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты таких расчетов обычно хорошо согласуются с данными эксперимента.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Сопротивление стержня различным видам деформаций часто зависит не только от его материала и размеров, но и от очертаний оси, формы поперечных сечений и их расположения относительно направления действующих нагрузок. Рассмотрим основные геометрические характеристики поперечных сечений стержня, отвлекаясь от физических свойств изучаемого объекта. Этими характеристиками являются: площади поперечных сечений, статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции.

**2.1. Статический момент площади.
Центр тяжести площади**

Рассматривая произвольную фигуру (поперечное сечение стержня), связанную с системой координат xOy (рис. 7), по аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение для момента площади, которое называется *статическим моментом*. Так, произведение элемента площади dF на расстояние y от оси Ox

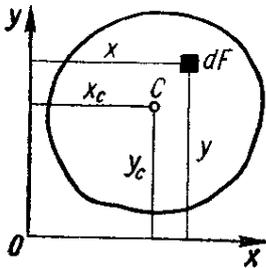


Рис. 7

$$dS_x = y dF$$

называется статическим моментом элемента площади относительно оси Ox . Аналогично $dS_y = x dF$ — статический момент элемента площади относительно оси Oy . Просуммировав эти произведения по всей площади, получим *статические моменты площади* соответственно относительно осей x и y :

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF. \quad (2.1)$$

Размерность статического момента — единица длины в кубе (например, см^3). Пусть x_c и y_c — координаты центра тяжести фигуры. Продолжая аналогию с моментами сил, на основании теоремы о моменте равнодействующей можно записать следующие выражения:

$$S_x = F y_c; \quad S_y = F x_c, \quad (2.2)$$

где F — площадь фигуры.

Координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (2.3)$$

Для вычисления статических моментов сложной фигуры ее разбивают на простые части (рис. 8), для каждой из которых известна площадь (F_i) и положение центра тяжести (x_i, y_i). Статические моменты всей фигуры относительно осей Ox и Oy соответственно будут

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i; \quad (2.4)$$

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i.$$

Из формул (2.3) и (2.4) определяем координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.5)$$

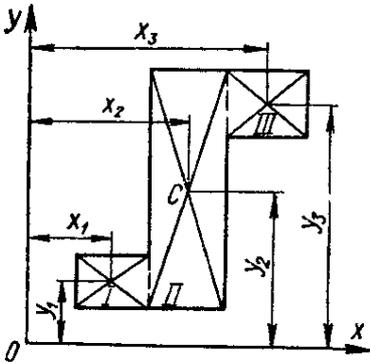


Рис. 8

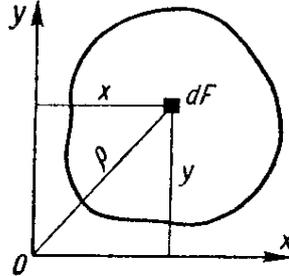


Рис. 9

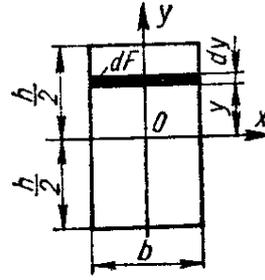


Рис. 10

2.2. Моменты инерции плоских фигур

Осевым, или экваториальным, моментом инерции площади фигуры называется интеграл произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний от рассматриваемой оси. Так, моменты инерции произвольной фигуры (рис. 9) относительно осей x и y соответственно равны

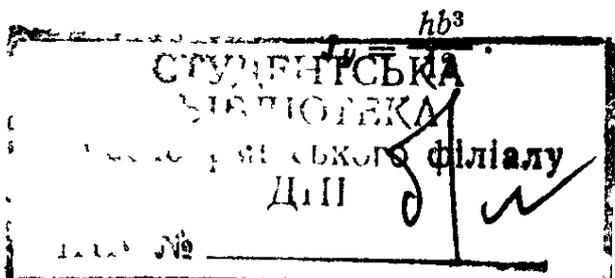
$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (2.6)$$

Пользуясь этими формулами, вычислим моменты инерции для простейших фигур.

Прямоугольник (рис. 10). Учитывая, что элементарная площадка $dF = b dy$, находим

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Очевидно,



Т р е у г о л ь н и к (рис. 11). Учитывая, что

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y), \quad dF = \frac{b}{h}(h - y) dy,$$

момент инерции относительно оси x выразим как

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

К р у г о в о й с е к т о р (рис. 12). Учитывая, что $dF = \rho d\varphi d\rho$ и $y = \rho \sin \varphi$, определяем момент инерции относительно оси x :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\varphi d\rho = \frac{r^4}{8} \left[(\beta - \alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2} \right].$$

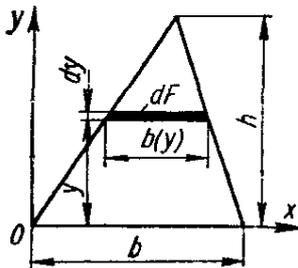


Рис. 11

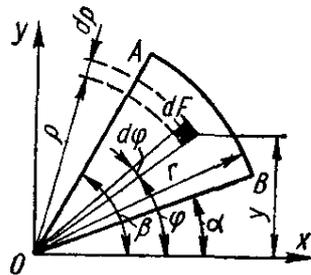


Рис. 12

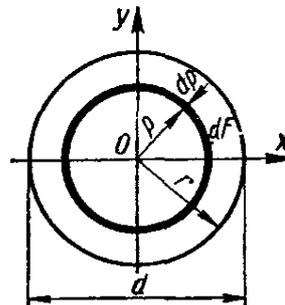


Рис. 13

П о л я р н ы м м о м е н т о м инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса O) называется интеграл произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний ρ от полюса (рис. 9):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.7)$$

Если через полюс проведена система взаимно перпендикулярных осей x, y , то $\rho^2 = x^2 + y^2$. Из формул (2.6) и (2.7) получим

$$J_p = J_x + J_y. \quad (2.8)$$

К р у г (рис. 13). Учитывая, что $dF = 2\pi\rho d\rho$, полярный момент инерции будет

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

или

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Из формулы (2.8) видно, что для круга

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Отметим, что величины осевых и полирных моментов инерции всегда положительны.

Центробежным моментом инерции называется интеграл произведений элементарных площадок на их расстояния от координатных осей x, y :

$$J_{xy} = \int_F xy \, dF. \quad (2.9)$$

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным, а также равным нулю. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*. Две взаимно перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна является осью симметрии фигуры, будут ее главными осями. Это следует из того, что в этом случае каждой положительной величине $xy dF$ соответствует такая же отрицательная

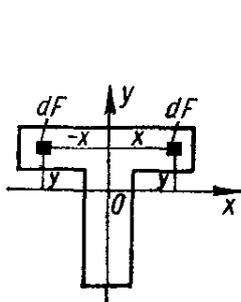


Рис. 14

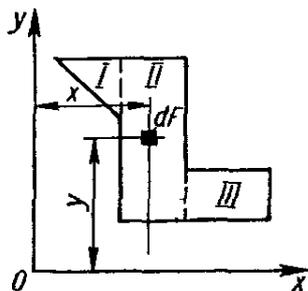


Рис. 15

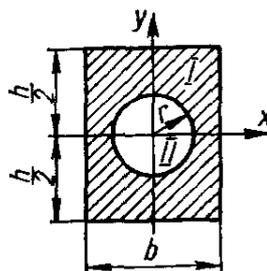


Рис. 16

величина по другую сторону оси симметрии (рис. 14) и их сумма по всей площади фигуры равна нулю. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями*. Размерность моментов инерции — единица длины в четвертой степени (например, см^4).

2.3. Моменты инерции сложных сечений

При вычислении моментов инерции сложных сечений последние обычно разбивают на отдельные простые части, моменты инерции которых известны. Из основного свойства интеграла суммы следует, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей. Определим момент инерции сложной фигуры (рис. 15) относительно оси x , разбив ее на простые части I, II, III, имеющие соответственно площади F_I, F_{II}, F_{III} :

$$J_x = \int_{F_I} y^2 \, dF + \int_{F_{II}} y^2 \, dF + \int_{F_{III}} y^2 \, dF,$$

или —

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III}. \quad (2.10)$$

Заметим, что в случае, когда в сечении имеется отверстие, последнее удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью. Так, момент инерции относительно оси x сечения, показанного на рис. 16, будет

$$J_x = J_x^I - J_x^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

2.4. Моменты инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции фигуры относительно центральных осей x, y :

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.11)$$

Требуется определить моменты инерции относительно осей x_1, y_1 , параллельных центральных (рис. 17):

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (2.12)$$

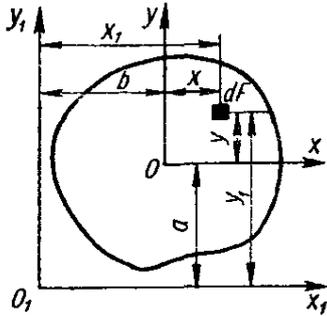


Рис. 17

Координаты любой точки в новой системе x_1, y_1 можно выразить через координаты в прежней системе x, y так:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \quad (2.13)$$

Так как статические моменты площади относительно центральных осей равны нулю, формулы (2.12) с учетом (2.13) окончательно могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2 F; \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 F; \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF. \quad (2.15)$$

Следовательно: 1) момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями; 2) центробежный момент инерции относительно любой системы прямоугольных осей равен центробежному моменту инерции относительно системы центральных осей, параллельных данным, плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести в новых осях. Необходимо помнить, что координаты a, b , входящие в формулу (2.15), следует подставлять с учетом их знака.

2.5. Зависимость между моментами инерции при повороте координатных осей

Пусть известны моменты инерции произвольной фигуры относительно координатных осей x, y (рис. 18):

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.16)$$

Требуется определить моменты инерции относительно осей x_1, y_1 , повернутых относительно осей x и y на угол α против часовой стрелки, считая последний положительным:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (2.17)$$

Координаты произвольной элементарной площадки в новой системе

x_1Oy_1 могут быть представлены через координаты прежней системы xOy следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= OC = OE + AD = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= BC = BD - EA = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Окончательно находим

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_x) \sin 2\alpha. \quad (2.20)$$

Отметим, что формулы (2.19) и (2.20), полученные при повороте любой системы прямоугольных осей, естественно, справедливы для центральных осей. Складывая почленно выражения (2.19), находим

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p.$$

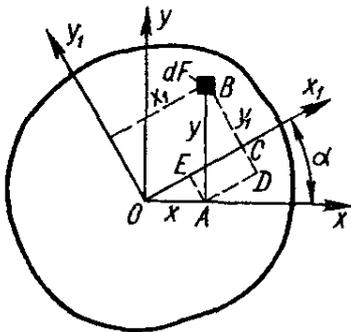


Рис. 18

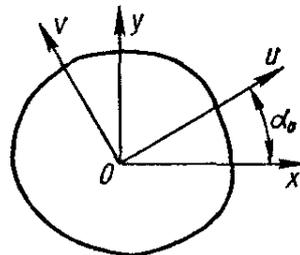


Рис. 19

Следовательно, при повороте прямоугольных осей сумма осевых моментов инерции не изменяется и равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

При повороте системы осей на угол $\alpha = 90^\circ$ имеем

$$J_{x_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_x; \quad J_{x_1y_1} = -J_{xy}.$$

2.6. Определение направления главных осей инерции. Главные моменты инерции

Наибольший практический интерес представляют главные центральные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Обозначим главные центральные оси буквами u, v . Очевидно, $J_{uv} = 0$.

Для определения положения главных центральных осей произвольной несимметричной фигуры необходимо центральные оси x, y повернуть на такой угол α_0 (рис. 19), при котором центробежный момент инерции относительно нового положения осей станет равным нулю:

$$J_{x_1y_1} = J_{uv} = 0.$$

Из формулы (2.20) получаем

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.21)$$

Получаемые из (2.21) два значения угла α_0 отличаются на 90° и определяют положение главных осей. Как легко видеть, меньший из этих углов по абсолютной величине не превышает $\pi/4$. Обычно пользуются меньшим углом. Проведенную под этим углом (положительным или отрицательным) главную ось обычно обозначают буквой u . Напомним, что отрицательный угол α_0 откладывается от оси x по ходу часовой стрелки.

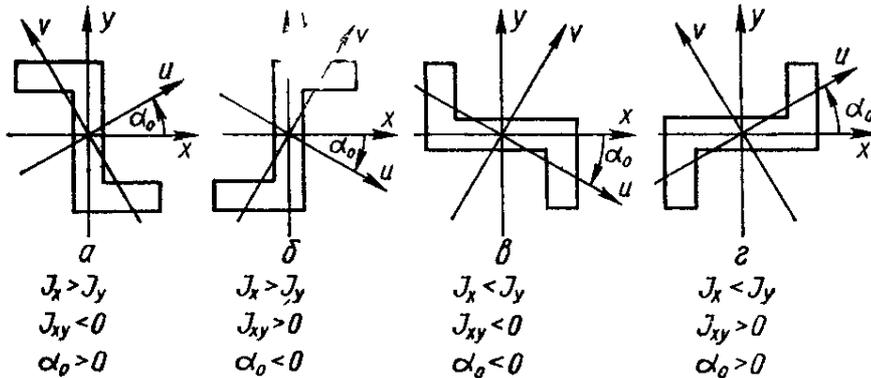


Рис. 20

На рис. 20 приведены некоторые примеры обозначения главных осей в соответствии с указанным правилом. Начальные оси обозначены буквами x и y . Значения главных моментов инерции можно получить из общих формул (2.19), приняв $\alpha = \alpha_0$:

$$\left. \begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_y \cos^2 \alpha_0 + J_x \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Сложим и вычтем последние выражения. С учетом (2.21) будем иметь

$$\begin{aligned} J_u + J_v &= J_x + J_y; \\ J_u - J_v &= (J_x - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{xy} \sin 2\alpha_0 = (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \end{aligned}$$

Решив совместно последние уравнения относительно J_u и J_v , получим

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) + (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) - (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Очевидно, $J_u > J_v$ при $J_x > J_y$.

Учитывая, что в соответствии с (2.21)

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}}$$

выражения (2.23) для главных моментов можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

причем верхние знаки следует брать при $J_x > J_y$ и нижние — при $J_x < J_y$.

Таким образом, формулы (2.21), (2.23) и (2.24) позволяют определить положение главных осей и величину главных центральных моментов инерции.

Если теперь вместо произвольной начальной системы центральных осей xOy принять систему главных осей, то формулы перехода к повернутым осям (2.19) и (2.20) упростятся:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha; \\ J_{y_1} &= J_v \cos^2 \alpha + J_u \sin^2 \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{1}{2} (J_u - J_v) \sin 2\alpha. \quad (2.26)$$

Отметим, что главные моменты инерции обладают свойством экстремальности. В этом легко убедиться, продифференцировав выражения (2.19) по переменной α .

Плоскости, проведенные через ось стержня и главные оси инерции его поперечного сечения, называются *главными плоскостями инерции*.

2.7. Графическое представление моментов инерции. Понятие о радиусе и эллипсе инерции

Вычисление моментов инерции по формулам (2.23) — (2.26) можно заменить их графическим определением. При этом принято различать две задачи: прямую и обратную.

При решении прямой задачи определяются моменты инерции относительно произвольной центральной системы осей x, y по известным главным моментам инерции J_u и J_v . Обратная задача состоит в отыскании главных моментов инерции по известным моментам инерции J_x, J_y и J_{xy} относительно произвольной центральной системы осей x, y .

Прямая задача. Определить моменты инерции J_x, J_y, J_{xy} относительно осей x и y (рис. 21, а) по J_u и J_v относительно главных осей, направление которых известно. Для определенности положим $J_u > J_v$.

Выберем прямоугольную систему координат в некоторой геометрической плоскости (рис. 21, б). По оси абсцисс будем откладывать осевые моменты инерции J_{oc} (J_u, J_v, J_x, J_y и т. д.), а по оси ординат — центробежные $J_{цб}$ (J_{xy} и т. п.).

В соответствующем масштабе откладываем вдоль оси абсцисс отрезки OA и OB , равные главным моментам инерции. Отрезок AB делим пополам, так что $BC = AC = \frac{1}{2} (J_u - J_v)$. Из точки C описываем радиусом

CA окружность, называемую *кругом инерции*. Тогда для определения момента инерции относительно оси x , проведенной под углом α к главной оси u , из центра круга проводим под углом 2α луч CD_x . Положительные углы откладываем против часовой стрелки. При этом оказывается, что ордината точки D_x круга равна центробежному моменту инерции J_{xy} ,

а абсцисса — осевому моменту инерции J_x относительно оси x . Чтобы получить значение момента инерции J_y относительно оси y , перпендикулярной к оси x и, следовательно, проведенной под положительным углом $\beta = \alpha + \pi/2$ к главной оси u , проводим из центра круга луч CD_y под углом $2\beta = 2(\alpha + \pi/2)$. Легко видеть, что он является продолжением луча CD_x . Абсцисса точки D_y равна моменту инерции J_y , ордината $K_y D_y$ — центробежному моменту инерции с обратным знаком ($-J_{xy}$), что соответствует центробежному моменту инерции относительно осей, повернутых на 90° . Отметим, что двум взаимно перпендикулярным осям соответствуют две точки круга (D_x и D_y), лежащие на одном диаметре.

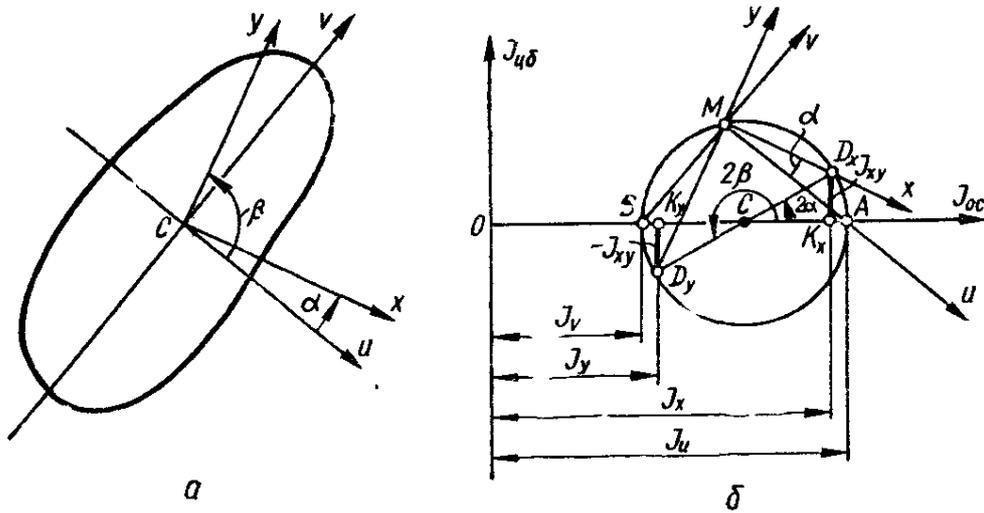


Рис. 21

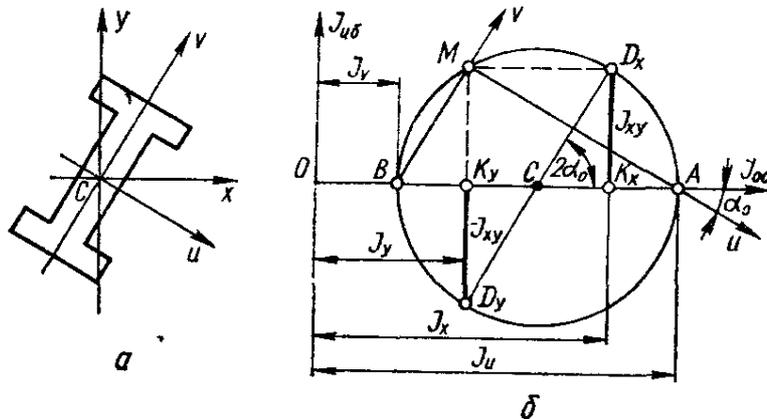


Рис. 22

Проведем из точки D_x ось x , параллельную соответствующей оси на рис. 21, а. Точка M ее пересечения с кругом называется *полюсом круга инерции* (главная точка или фокус круга инерции). Легко показать, что линия, соединяющая полюс с любой точкой круга, дает направление оси, представленной на диаграмме данной точкой. В частности, линия MA дает направление главной оси u . Линия MB параллельна главной оси v .

Обратная задача. Известны моменты инерции J_x , J_y , J_{xy} площади сечения бруса относительно системы центральных осей x , y (рис. 22, а). Определить положение главных осей инерции и величину главных моментов инерции. Для определенности построения примем $J_x > J_y$ и $J_{xy} > 0$.

В геометрической плоскости (рис. 22, б) строим точки D_x и D_y , соответствующие моментам инерции относительно осей x и y . Абсциссы этих точек являются осевыми моментами инерции: $OK_x = J_x$; $OK_y = J_y$; ординаты — центробежные моменты инерции J_{xy} , причем $K_x D_x = J_{xy}$; $K_y D_y = -J_{xy}$. Так как обе точки принадлежат одному диаметру, то соединив их, получим центр круга инерции C , из которого описываем окружность радиусом

$$CD_x = CD_y = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

пересекающую ось абсцисс в точках A и B . Очевидно, что абсциссы этих точек (OA и OB) являются искомыми главными моментами инерции J_u и J_v .

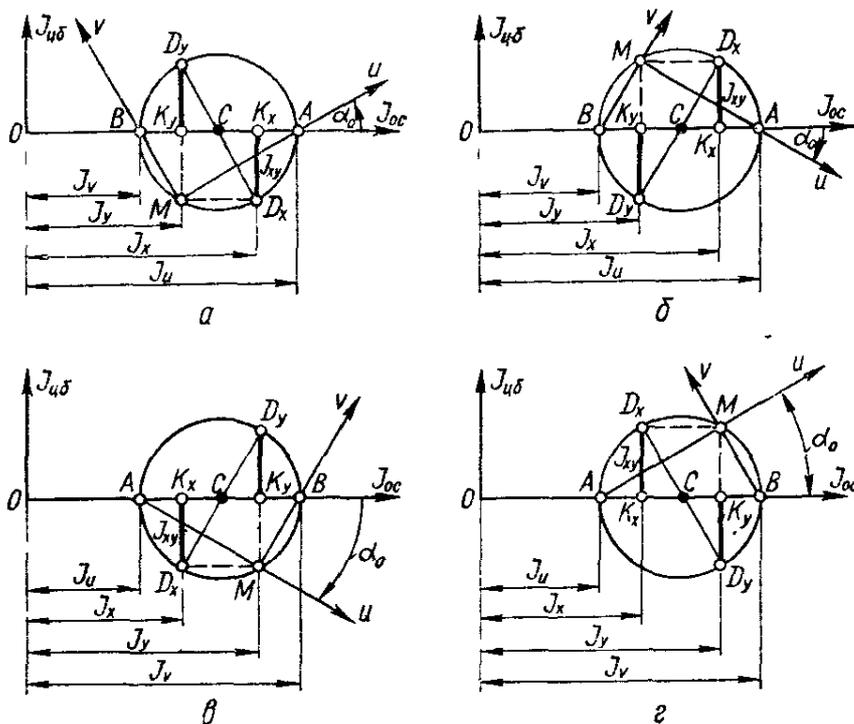


Рис. 23

Для определения направления главных осей построим фокус круга инерции. С этой целью из точек D_x и D_y проведем линии, соответственно параллельно указанным осям, до пересечения с кругом в точке M . Соединив затем фокус с точками A и B круга, получим направление главных осей u и v (рис. 22, б). Графическое решение обратной задачи соответственно для четырех случаев, изображенных на рис. 20, показано на рис. 23, а, б, в, г.

Момент инерции фигуры относительно какой-либо оси можно представить в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой *радиусом инерции*:

$$J_x = \int_F y^2 dF = F i_x^2, \quad (2.27)$$

где i_x — радиус инерции относительно оси x .

Из формулы (2.27) следует, что

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}. \quad (2.28)$$

Аналогично радиус инерции относительно оси y

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (2.29)$$

Главным центральным осям инерции соответствуют главные радиусы инерции

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}. \quad (2.30)$$

Построим на главных центральных осях инерции плоской фигуры эллипс с полуосями, равными главным радиусам инерции, откладывая при этом вдоль оси u отрезки, равные i_v , а вдоль оси v — отрезки, равные i_u (рис. 24). Такой эллипс, называемый эллипсом инерции, обладает тем замечательным свойством, что радиус инерции относительно любой центральной оси x определяется как перпендикуляр OA , опущенный из центра эллипса O на касательную к нему, параллельную к оси x . Для получения точки касания достаточно провести параллельно данной оси x любую хорду. Точка пересечения эллипса с линией, соединяющей центр O и середину хорды, является точкой касания. Измерив отрезок $OA = i_x$, найдем момент инерции по формуле

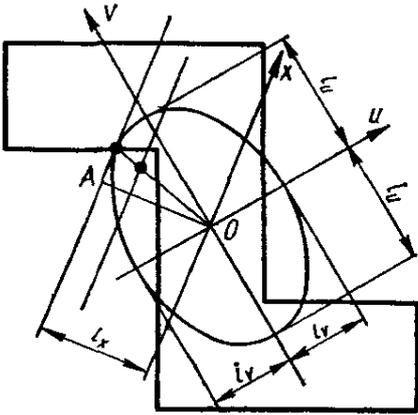


Рис. 24

$$J_x = F i_x^2.$$

2.8. Моменты сопротивления

Осевым моментом сопротивления называется отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию до наиболее удаленной точки поперечного сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \quad (2.31)$$

Размерность моментов сопротивления — единица длины в кубе (мм^3 , см^3 , м^3).

Практическое значение имеют моменты сопротивления относительно главных центральных осей, которые обычно называются просто моментами сопротивления.

1. Для прямоугольника (рис. 10)

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{6}; \quad (2.32)$$

$$W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{hb^3}{6}. \quad (2.33)$$

2. Для круга (рис. 13)

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (2.34)$$

3. Для трубчатого сечения с внутренним d и наружным D диаметрами

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.35)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}. \quad (2.36)$$

Полярным моментом сопротивления называется отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}. \quad (2.37)$$

В качестве полюса принимается центр тяжести поперечного сечения стержня.

1. Для круга (рис. 13)

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (2.38)$$

2. Для трубчатого сечения

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (2.39)$$

2.9. Порядок расчета

При анализе геометрических характеристик плоских фигур любой сложности важнейшей задачей является определение положения главных осей и величин главных моментов инерции. Можно рекомендовать следующий порядок определения положения главных осей и величин главных центральных моментов инерции сложного профиля, состоящего из простых частей, характеристики которых легко определить.

1. Проводим произвольную прямоугольную систему осей. Разбиваем фигуру на простые части и определяем по формулам (2.5) положение ее центра тяжести.

2. Проводим начальную систему центральных осей x , y таким образом, чтобы наиболее просто можно было вычислить моменты инерции частей фигуры относительно этих осей. Для этого определяем моменты инерции частей относительно своих центральных осей, проведенных параллельно осям x и y , используя при этом формулы перехода к параллельным осям (2.14) и (2.15). Таким образом, получаем значения J_x , J_y и J_{xy} .

3. Определяем по формуле (2.21) угол наклона главных центральных осей, причем ось, проведенную под меньшим углом (положительным или отрицательным), обозначаем буквой u , а перпендикулярную к ней — буквой v .

4. По формулам (2.24) определяем значения главных центральных моментов инерции J_u и J_v .

Пример. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции для поперечного сечения (рис. 25, а), которое состоит из неравнобокого уголка № 14/9 (ГОСТ 8510—86) и швеллера № 24 (ГОСТ 8240—72).

Решение: Через центры тяжести C_1 и C_2 уголка и швеллера проводим центральные оси x_1, y_1 и x_2, y_2 , параллельные их сторонам. Поскольку x_2 — ось симметрии швеллера, она и ось y_2 являются его главными центральными осями. Главная центральная ось y_0 уголка образует с его центральной осью x_1 угол α .

Для уголка $F_1 = 22,2 \text{ см}^2$; $J_{x_1} = 146 \text{ см}^4$; $J_{y_1} = 444 \text{ см}^4$; $J_{y_0} = = J_{\min} = 85,5 \text{ см}^4$; $\text{tg } \alpha = 0,409$; $\alpha = 22^\circ 15'$; координаты центра тяжести $x_C = 4,58 \text{ см}$, $y_C = 2,12 \text{ см}$.

Для швеллера $F_2 = 30,6 \text{ см}^2$; $J_{x_2} = 2900 \text{ см}^4$; $J_{y_2} = 208 \text{ см}^4$; $J_{x_2 y_2} = 0$; координаты центра тяжести $x_C = 2,42 \text{ см}$; $y_C = 12 \text{ см}$.

Найдем главный момент инерции J_{x_0} и центробежный момент инерции $J_{x_1 y_1}$ уголка:

$$J_{x_0} = J_{\max} = 444 + 146 - 85,5 = 504,5 \text{ см}^4;$$

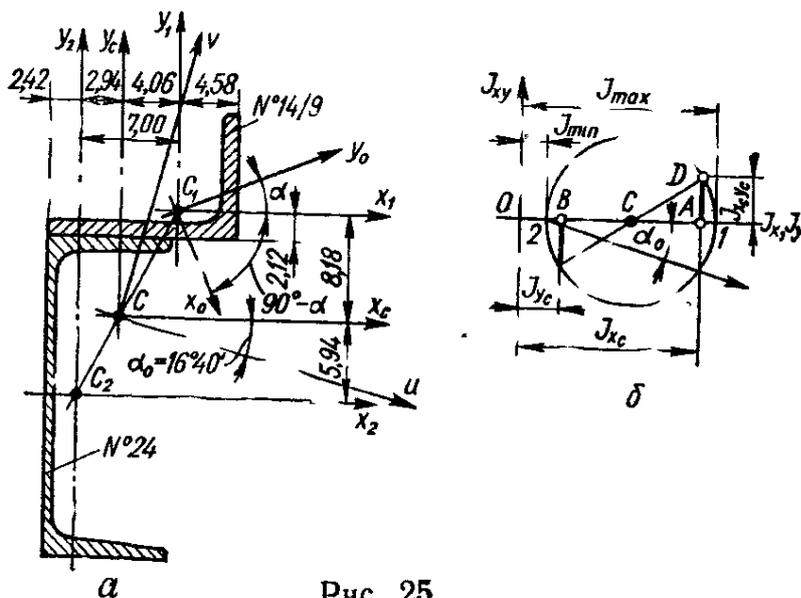


Рис. 25

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2(90^\circ - \alpha) = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{504,5 - 85,5}{2} \cdot 0,701 = 146,7 \text{ см}^4.$$

Расстояния между центральными осями уголка и швеллера равны между осями x_1 и x_2

$$12,00 + 2,12 = 14,12 \text{ см};$$

между осями y_1 и y_2

$$14,00 - 2,42 - 4,58 = 7,00 \text{ см}.$$

Определим координаты центра тяжести C всей фигуры в системе координат x_2, y_2 :

$$x_C = \frac{22,2 \cdot 7,00}{22,2 + 30,6} = 2,94 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{22,2 \cdot 14,12}{22,2 + 30,6} = 5,94 \text{ см}.$$

Центр тяжести C должен лежать на прямой $C_1 C_2$, что необходимо проверить на рисунке. Через центр тяжести C проводим центральные

оси x_C и y_C , параллельные проведенным ранее центральным осям уголка и швеллера. В системе центральных осей x_C , y_C координаты центров тяжести уголка и швеллера равняются:

$$x_{C_1} = 7,00 - 2,94 = 4,06 \text{ см}; \quad y_{C_1} = 14,12 - 5,94 = 8,18 \text{ см};$$

$$x_{C_2} = -2,94 \text{ см}; \quad y_{C_2} = -5,94 \text{ см}.$$

Вычислим осевые и центробежный моменты инерции всего сечения в системе произвольных центральных осей x_C , y_C :

$$J_{x_C} = 146,0 + 22,2 \cdot 8,18^2 + 2900 + 30,6 \cdot 5,94^2 = 5607,6 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = 444,0 + 22,2 \cdot 4,06^2 + 208,0 + 30,6 \cdot 2,94^2 = 1282,4 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C y_C} = 146,7 + 22,2 \cdot 4,06 \cdot 8,18 + 30,6 \cdot (-2,94) \cdot (-5,94) = 1417,3 \text{ см}^4.$$

По формуле (2.21) находим угол α_0 наклона главных центральных осей x и y относительно произвольных центральных осей x_C и y_C :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_C y_C}}{J_{y_C} - J_{x_C}} = \frac{2 \cdot 1417,3}{1282,4 - 5607,6} = -0,66;$$

$$2\alpha_0 = -33^\circ 20'; \quad \alpha_0 = -16^\circ 40'.$$

Поскольку угол α_0 отрицательный, главная центральная ось u откладывается относительно произвольной центральной оси x_C по часовой стрелке, а поскольку $J_{x_C} > J_{y_C}$, ось u является осью, относительно которой момент инерции будет максимальным.

Главные моменты инерции определим по формуле (2.24):

$$J_{u, v} = \frac{5607,6 + 1282,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5607,6 - 1282,4}{2}\right)^2 + 1417,3^2} =$$

$$= 3445,0 \pm 2585,6 \text{ см}^4;$$

$$J_u = J_{\max} = 6030,6 \text{ см}^4 = 6030,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4;$$

$$J_v = J_{\min} = 859,4 \text{ см}^4 = 859,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4.$$

Проверка. Должны удовлетворяться условия

$$J_{x_C} + J_{y_C} = J_u + J_v \text{ и } J_{uv} = 0.$$

В данном случае

$$J_{x_C} + J_{y_C} = 5607,6 + 1282,4 = 6890,0 = J_u + J_v = 6030,6 +$$

$$+ 859,4 = 6890,0 \text{ см}^4;$$

$$J_{uv} = \frac{J_{x_C} - J_{y_C}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{x_C y_C} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{5607,6 - 1282,4}{2} (-0,55) + 1417,3 \cdot 0,836 =$$

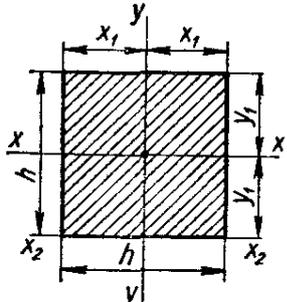
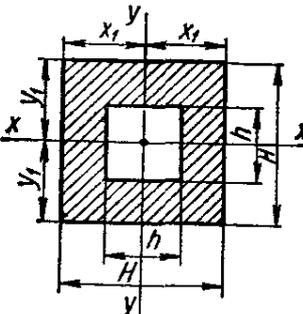
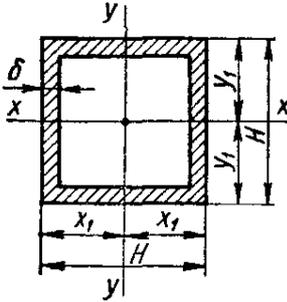
$$= -1189,4 + 1184,9 = -4,5 \text{ см}^4.$$

Относительная ошибка составляет $\frac{4,5}{1184,9} \cdot 100\% = 0,4\%$, что допустимо.

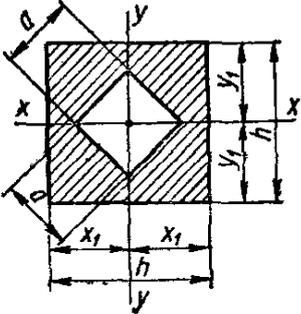
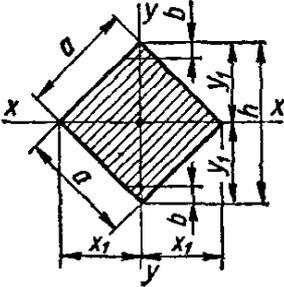
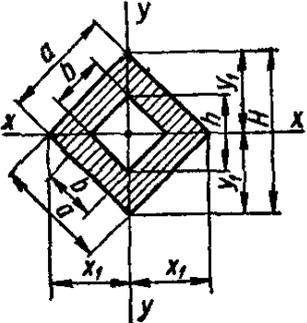
На рис. 25, б показано построение круга инерции для графического решения этой же задачи.

Геометрические характеристики различных плоских сечений, а также сечений прокатных профилей приведены в табл. 1—6.

Таблица 1. Геометрические характеристики плоских сечений

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Квадрат</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F = h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Квадрат полый</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F = H^2 - h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Тонкостенный квадрат полый</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F = 4H\delta$ $\delta < \frac{H}{15}$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$

<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = J_y = \frac{h^4}{12} = \frac{h^2 F}{12}$ $J_{x_2} = \frac{h^4}{3} = \frac{h^2 F}{3}$ $J_k = 0,1406h^4$	$W_x = W_y = \frac{h^3}{6}$ $W_k = 0,208h^3$	$i_x = i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} =$ $= 0,289h$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
$J_x = J_y = \frac{H^4 - h^4}{12} =$ $= \frac{H^2 + h^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}} =$ $= 0,289 \sqrt{H^2 + h^2}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
$J_x = J_y = \frac{2}{3} H^3 \delta = \frac{FH^2}{6}$	$W_x = W_y = \frac{4}{3} H^2 \delta$	$i_x = i_y = \frac{H}{\sqrt{6}} \approx$ $\approx 0,408H$ <p>Эллипс инерции — круг</p>

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Квадрат полый</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = h^2 - a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Квадрат поставлен на ребро</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0,71a$
<p>Квадрат полый поставлен на ребро</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = a^2 - b^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0,71a$

(
I

С
Г
Т
П

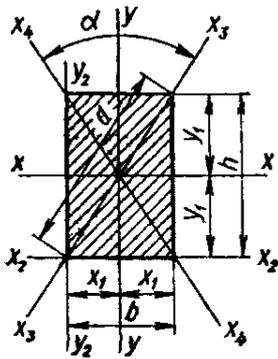
С
Г

31

<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = J_y = \frac{h^4 - a^4}{12} =$ $= \frac{h^2 + a^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{h^4 - a^4}{6h}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{12}} =$ $= 0,289 \sqrt{h^2 + a^2}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
$J_x = J_y = \frac{a^4}{12} = \frac{a^2 F}{12} =$ $= \frac{h^4}{48}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 =$ $= \frac{h^3}{24} = 0,118 a^3 =$ $= 0,042 h^3$ <p>При срезке верхнего и нижнего углов на</p> $b = \frac{1}{18} h$ <p>W_x достигает максимума $W_{xcp} = 0,124 a^3 = 0,044 h^3$</p>	$i_x = i_y = 0,289 a$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
$J_x = J_y = \frac{a^4 - b^4}{12} =$ $= \frac{H^4 - h^4}{48} = \frac{a^2 + b^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^4 - b^4}{a} =$ $= 0,118 \frac{a^4 - b^4}{a} =$ $= \frac{H^4 - h^4}{24H} = 0,042 \frac{H^4 - h^4}{H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}} =$ $= 0,289 \sqrt{a^2 + b^2}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
---------------	---------------------	----------------------------------

Прямоугольник



Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные

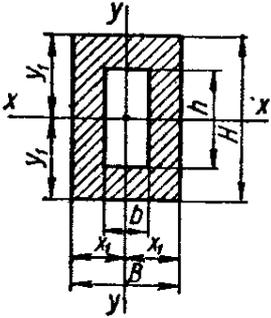
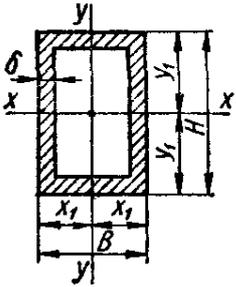
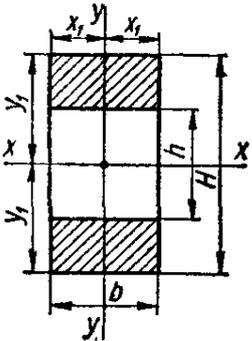
$$F = bh$$

$$x_1 = \frac{b}{2}$$

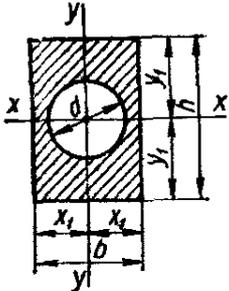
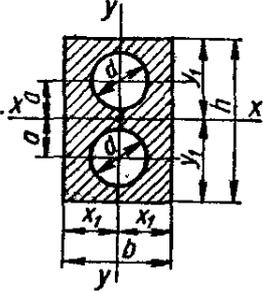
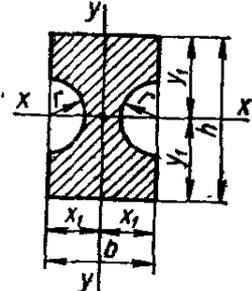
$$y_1 = \frac{h}{2}$$

n	1	1,5	2	3	4	6	8	10
ξ	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123
η	0,1404	0,2936	0,4572	0,7899	1,1232	1,789	2,456	3,123
ζ	1,0	0,8588	0,7952	0,7533	0,7447	0,7426	0,7425	0,7425

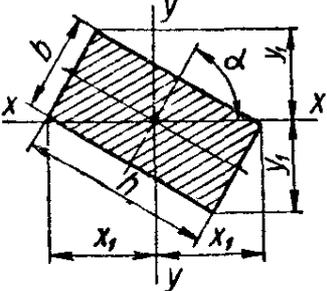
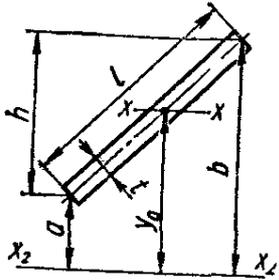
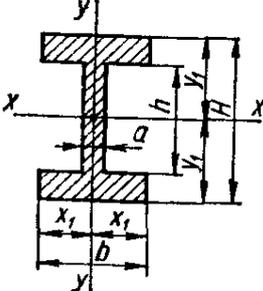
Моменты инерции осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{Fb^2}{12}$ $J_{x_2} = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{3}$ $J_{y_2} = \frac{hb^3}{3} = \frac{Fb^2}{3}$ $J_{x_2y_2} = \frac{b^2h^3}{4}$ $J_{x_3} = J_{x_4} = \frac{b^3h^3}{6d^2} = \frac{b^3h^3}{6(b^2+h^2)} = \frac{d^4 \sin^3 \alpha}{48} = \frac{Fd^2 \sin^2 \alpha}{24}$ $J_p = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$ $J_k = \eta b^4$ $J_k = \frac{1}{3} (n - 0,63) b^4$	$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{Fh}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{Fb}{6}$ $W_k = \xi b^3$ <p>Посередине длинных сторон максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = M_k / W_k$; посередине коротких — касательное напряжение $\tau = \zeta \tau_{\max}$; в углах $\tau = 0$</p> $W_k = \frac{1}{3} (n - 0,63) b^3 = J_k / b$ <p>В точках длинных сторон, за исключением концов, максимальное касательное напряжение τ_{\max}; посередине коротких сторон — касательное напряжение $\tau = 0,7425 \tau_{\max}$</p>	$i_x = 0,289h$ $i_y = 0,289b$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Прямоугольник полый</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = BH - bh$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Тонкостенный прямоугольник полый</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = 2\delta(B + H)$ $\delta < \frac{H}{15}$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Прямоугольник с вырезом</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = b(H - h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$

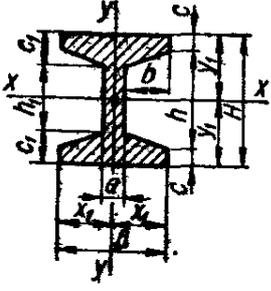
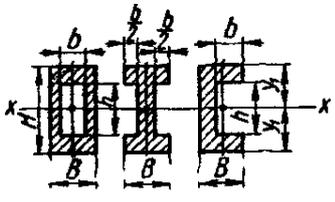
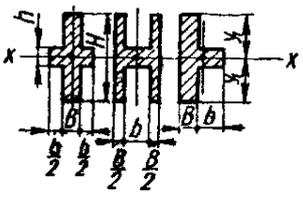
Моменты инерции осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ $W_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$
$J_x = \frac{\delta H^3}{6} \left(3 \frac{B}{H} + 1 \right)$ $J_y = \frac{\delta B^3}{6} \left(3 \frac{H}{B} + 1 \right)$	$W_x = \frac{\delta H^2}{3} \left(3 \frac{B}{H} + 1 \right)$ $W_y = \frac{\delta B^2}{3} \left(3 \frac{H}{B} + 1 \right)$	$i_x = 0,289H \times$ $\times \sqrt{\frac{3B + H}{B + H}}$ $i_y = 0,289B \times$ $\times \sqrt{\frac{3H + B}{H + B}}$
$J_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$ $J_y = \frac{b^3}{12} (H - h)$	$W_x = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3)$ $W_y = \frac{b^2}{6} (H - h)$	$i_x =$ $= \sqrt{\frac{H^2 + Hh + h^2}{12}} =$ $= 0,289 \times$ $\times \sqrt{H^2 + Hh + h^2}$ $i_y = 0,289b$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Прямоугольник с круглым отверстием</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F = bh - \frac{\pi d^2}{4} =$ $= bh \left(1 - 0,785 \frac{d^2}{bh} \right)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Прямоугольник с двумя отверстиями</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F = bh - \frac{\pi d^2}{2} =$ $= bh \left(1 - 1,57 \frac{d^2}{bh} \right)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Прямоугольник с полукруглыми вырезами</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F = bh - \pi r^2$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

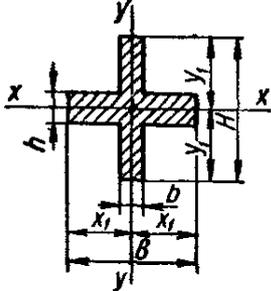
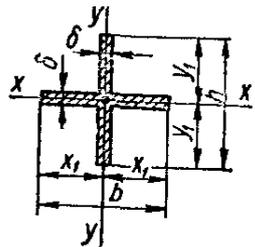
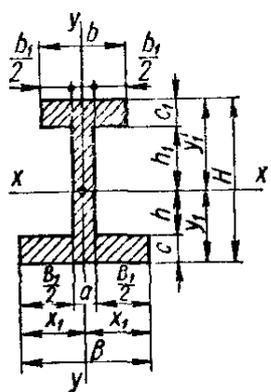
Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{4} \left(\frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{bh^3}{12} \left(1 - 0,59 \frac{d^4}{bh^3} \right)$ $J_y = \frac{1}{4} \left(\frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{hb^3}{12} \left(1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$W_x = \frac{1}{2h} \left(\frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{bh^2}{6} \left(1 - 0,59 \frac{d^4}{bh^3} \right)$ $W_y = \frac{1}{2b} \left(\frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{hb^2}{6} \left(1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$i_x = 0,289h \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 0,59 \frac{d^4}{bh^3}}{1 - 0,785 \frac{d^2}{bh}}}$ $i_y = 0,289b \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3}}{1 - 0,785 \frac{d^2}{bh}}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} \left[1 - \right.$ $\left. - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left(1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right) \right]$ $J_y = \frac{hb^3}{12} \left(1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$W_x = \frac{bh^2}{6} \left[1 - \right.$ $\left. - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left(1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right) \right]$ $W_y = \frac{hb^2}{6} \left(1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$i_x = 0,289h \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \times}{1 - 1,57 \frac{d^2}{bh}} \times \left(1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right)}$ $i_y = 0,289b \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3}}{1 - 1,57 \frac{d^2}{bh}}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} - 2 \left[0,11r^4 + \right.$ $\left. + \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right]$	$W_x = \frac{bh^2}{6} - \frac{\pi r^4}{2h}$ $W_y = \frac{hb^2}{6} - \frac{4}{b} \left[0,11r^4 + \right.$ $\left. + \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Прямоугольник повернутый</p> 	$F = bh$	$x_1 = \frac{1}{2} (b \cos \alpha - h \sin \alpha)$ $y_1 = \frac{1}{2} (h \cos \alpha + b \sin \alpha)$
<p>Узкая прямоугольная полоса</p> 	$F = lt$	$y_0 = \frac{a+b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Симметричный двутавр из прямоугольников</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = ah + b(H - h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$

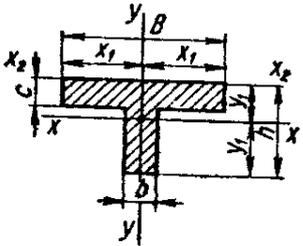
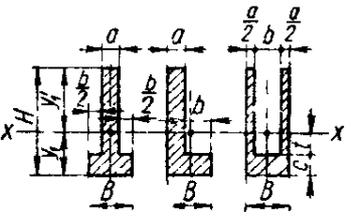
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y, центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_K</p>	<p>Моменты сопротивля осевые W_x, W_y, полярный W_p и при свободном кручении W_K</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = \frac{bh}{12} (h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)$ $J_y = \frac{bh}{12} (h^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$ $J_{xy} = \frac{bh}{24} (b^2 - h^2) \sin 2\alpha$	$W_x = \frac{bh}{6} \times \frac{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{h \cos \alpha + b \sin \alpha}$ $W_y = \frac{bh}{6} \times \frac{h^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{b \cos \alpha + h \sin \alpha}$	$i_x = \sqrt{\frac{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{12}}$ $= 0,289 \times \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$ $i_y = 0,289 \times \sqrt{h^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$
$J_x = \frac{lh^2}{12} = \frac{Fh^2}{12}$ $J_{x_2} = \frac{lt}{3} (a^2 + ab + b^2)$	$W_x = \frac{lh}{6}$ $W_{x_2} = \frac{lt}{3b} (a^2 + ab + b^2)$	$i_x = 0,289h$
$J_x = \frac{ah^3}{12} + \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$ $J_y = \frac{a^3h}{12} + \frac{b^3}{12} (H - h)$	$W_x = \frac{ah^3}{6H} + \frac{b}{6H} (H^3 - h^3)$ $W_y = \frac{a^3h}{6b} + \frac{b^2}{6} (H - h)$	$i_x = \sqrt{\frac{ah^3 + b(H^3 - h^3)}{12[ah + b(H - h)]}}$ $i_y = \sqrt{\frac{a^3h + b^3(H - h)}{12[ah + b(H - h)]}}$

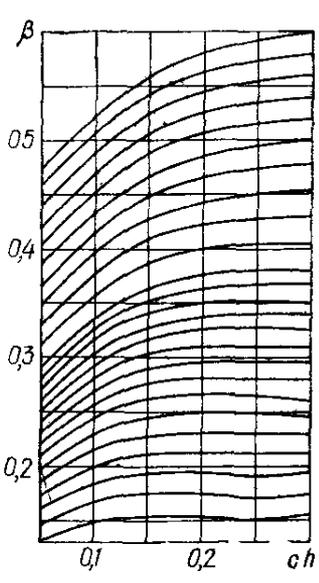
<p>Форма сечения</p>	<p>Площадь сечения F</p>	<p>Координаты крайних точек сечения</p>
<p>Двутавр</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = aH + 2b(c + c_1)$ $b = \frac{1}{2}(B - a)$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Симметричное сечение из прямоугольников</p>  <p>Ось $x-x$ — главная центральная</p>	$F = BH - bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Симметричное сечение из прямоугольников</p>  <p>Ось $x-x$ — главная центральная</p>	$F = BH + bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$

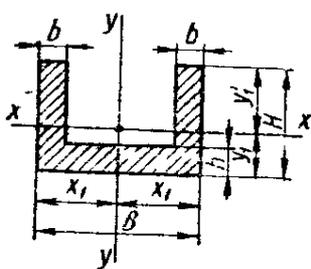
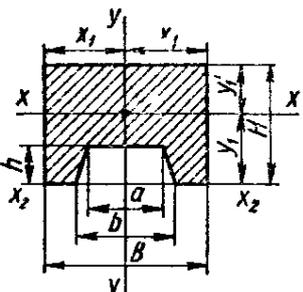
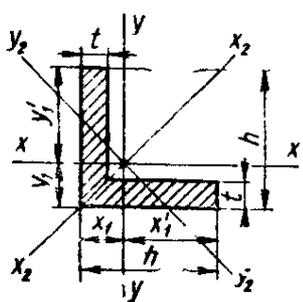
Моменты инерции осевые J_x, J_y , центробежный J_{xy} ; полярный J_D и при свободном кручении J_K	Моменты сопротивления осевые W_x, W_y полярный W_D и при свободном кручении W_K	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{12} \left[BH^3 - \frac{1}{4\alpha} (h^4 - h_1^4) \right]$ $J_y = \frac{1}{12} \left[B^3 (H - h) + h_1 a^3 + \frac{\alpha}{4} (B^4 - a^4) \right]$ $\alpha = \frac{h - h_1}{2b}$ для стандартных дву- тавров $\alpha \approx 1/6$	$W_x = \frac{1}{6H} \left[BH^3 - \frac{1}{4\alpha} (h^4 - h_1^4) \right]$ $W_y = \frac{1}{6B} \left[B^3 (H - h) + h_1 a^3 + \frac{\alpha}{4} (B^4 - a^4) \right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$
$J_x = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{12(BH + bh)}}$

<p>Форма сечения</p>	<p>Площадь сечения F</p>	<p>Координаты крайних точек сечения</p>
<p>Крестовина</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = HB + (B - b)h$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Крестовина тонкостенная</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = h\delta + (b - \delta)\delta$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Несимметричный двутавр из прямоугольников</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = bc_1 + a(h + h_1) + Bc$	$b_1 = b - a$ $B_1 = B - a$ $x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{aH^2 + B_1c^2 + 1 + b_1c_1(2H - c_1)}{2aH + B_1c + b_1c_1}$ $y'_1 = H - y_1$ $h = y_1 - c$ $h_1 = y'_1 - c_1$

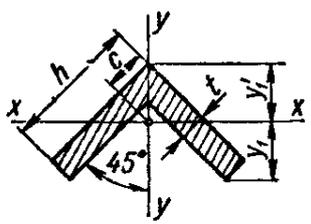
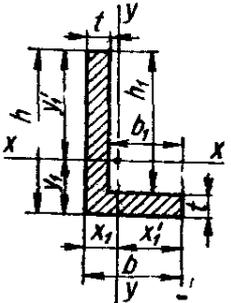
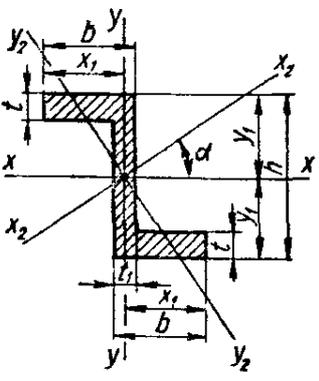
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = \frac{bH^3 + (B - b)h^3}{12}$ $J_y = \frac{hB^3 + (H - h)b^3}{12}$	$W_x = \frac{bH^3 + (B - b)h^3}{6H}$ $W_y = \frac{hB^3 + (H - h)b^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{12} (h^3\delta + \delta^3(b - \delta))$ $J_y = \frac{1}{12} (b^3\delta + \delta^3(h - \delta))$	$W_x = \frac{h^3\delta + \delta^3(b - \delta)}{6h}$ $W_y = \frac{b^3\delta + \delta^3(h - \delta)}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{3} (By_1^3 - B_1h^3 + by_1^3 - b_1h_1^3)$ $J_y = \frac{1}{12} [B^3c + b^3c_1 + a^3(h + h_1)]$	$W_{xв} = \frac{J_x}{y_1} \text{ (для верхних волокон)}$ $W_{xн} = \frac{J_x}{y_1} \text{ (для нижних волокон)}$ $W_y = \frac{1}{6B} [B^3c + b^3c_1 + a^3(h + h_1)]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Симметричный тавр из прямоугольников</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = (B - b)c + bh$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{1}{2} \times \frac{(B - b)c^2 + bh^2}{(B - b)c + bh}$ $y_1 = h - y_1$
<p>Несимметричное сечение из прямоугольников</p>  <p>Ось $x-x$ — центральная</p>	$F = aH + bc$	$y_1 = \frac{aH^2 + bc^2}{2(aH + bc)}$ $y_1' = H - y_1 = \frac{aH^2 + bc(2H - c)}{2(aH + bc)}$

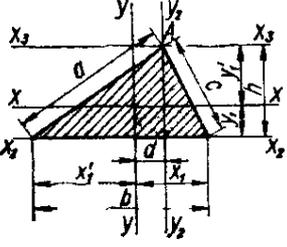
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
<p> $J_x = J_{x_2} - y_1'^2 F$ $J_{x_2} = \frac{1}{3} [(B-b)c^3 + bh^3]$ $J_y = \frac{1}{12} [B^3c + b^3(h-c)]$ Кроме того, $J_x = \beta \frac{Bh^3}{12}$, где β находится из графика </p> 	<p> $W_{xв} = \frac{J_x}{y_1'} = \frac{J_{x_2}}{y_1'} - y_1' F$ (для верхних волокон) $W_{xn} = \frac{J_x}{y_1} = \frac{J_x}{h - y_1'}$ (для нижних волокон) $W_y = \frac{1}{6B} [B^3c + b^3(h-c)]$ </p>	<p> $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} =$ $= \frac{1}{2} \times$ $\times \sqrt{\frac{(B^3 - b^3)c + b^3h}{3[(B-b)c + bh]}}$ </p>
<p> $J_x = \frac{1}{3} (By_1^3 - bt + ay_1'^3)$ </p>	<p> $W_{xn} = \frac{J_x}{y_1}$ (для нижних волокон) $W_{xв} = \frac{J_x}{y_1'} = \frac{J_x}{H - y_1}$ (для верхних волокон) $W_{xв} > W_{xn}$ </p>	<p> $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ </p>

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Корытное сечение</p>  <p>Оси x_1-x_1 и y_1-y_1 — главные центральные</p>	$F = Bh + 2b(H - h)$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{Bh^2 + 2b(H^2 - h^2)}{2[Bh + 2b(H - h)]}$ $y_1' = H - y_1$
<p>Устой с обратными стенками</p>  <p>Оси x_1-x_1 и y_1-y_1 — главные центральные</p>	$F = BH - \frac{a+b}{2}h$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{3BH^2 - h^2(b + 2a)}{6BH - 2h(a + b)}$ $y_1' = H - y_1$
<p>Равнобокий уголок</p>  <p>Оси x_2-x_2 и y_2-y_2 — главные центральные</p>	$F = t(2h - t)$	$x_1 = y_1 = \frac{h^2 + t(h - t)}{2(2h - t)}$ $x_1' = y_1' = h - x_1 = h - y_1$

<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_K</p>	<p>Моменты сопротивления; осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_K</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$i_x = \frac{Bh^3 + 2b(H-h)^3}{12} +$ $+ Bh\left(y_1 - \frac{h}{2}\right)^2 +$ $+ 2b(H-h)\left(\frac{H-h}{2} +$ $+ h - y_1\right)^2$ $i_y = \frac{B^3H - (H-h)(B-2b)^3}{12}$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_x = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_y = \frac{B^3H - (H-h)(B-2b)^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_{x_2} - Fy_1^2$ $i_{x_2} = \frac{BH^3}{3} - \frac{h^3}{12}(b+3a)$ $J_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{h}{48} \frac{b^4 - a^4}{b-a}$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_x = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_y = \frac{HB^3}{6} - \frac{h}{24B} \frac{b^4 - a^4}{b-a}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$i_x = i_y = \frac{1}{3} [t(h-y_1)^3 +$ $+ hy_1^3 - (h-t)(y_1-t)^3]$ $J_{x_2} = \frac{t(2h-3t)(h^2+t^2)}{6}$ $J_{y_2} = \frac{7h^4 - 5(h-t)^4}{12} -$ $- 2h^2y_1(h+y_1) +$ $+ 2(h-t)(h-y_1) \times$ $\times (y_1+t) - 4hy_1(h-t)^2$	$W_x = W_t = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(для левых и нижних волокон)</p> $W_x = W_u = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(для правых и верхних волокон)</p>	$i_{\min} = i_{y_2} =$ $= \sqrt{\frac{J_{y_2}}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Равнобокий уголок</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = t(2h - t)$	$y_1 = \frac{h + t - 2c}{\sqrt{2}}$ $y_1' = \frac{h^2 + ht - t^2}{(2h - t)\sqrt{2}}$ $c = y_1' \frac{\sqrt{2}}{2}$
<p>Неравнобокий уголок</p> 	$F = t(b + h_2) = t(h + b_1)$	$x_1 = \frac{b^2 + h_1 t}{2(b + h_1)}$ $x_1' = b - x_1 = \frac{b^2 + h_1(2b - t)}{2(b + h_1)}$ $y_1 = \frac{h^2 + b_1 t}{2(h + b_1)}$ $y_1' = h - y_1 = \frac{h^2 + b_1(2h - t)}{2(h + b_1)}$
<p>Z-образное сечение</p> 	$F = ht_1 + 2t(b - t_1)$	$x_1 = b - \frac{t_1}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

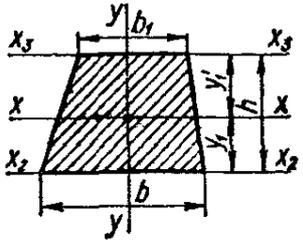
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при в свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции: $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = \frac{1}{3} [2c^4 - 2(c-t)^4 + t(h-2c + \frac{t}{2})^3]$ $J_y = \frac{h^4 - (h-t)^4}{12}$	<p>$W_{xв} = \frac{J_x}{y_1}$ (для верхних волокон)</p> <p>$W_{xн} = \frac{J_x}{y_1}$ (для нижних волокон)</p>	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$I_x = \frac{1}{3} [t(h-y_1)^3 + by_1^3 - b_1(y_1-t)^3]$ $I_y = \frac{1}{3} [t(b-x_1)^3 + hx_1^3 - h_1(x_1-t)^3]$ $I_{xy} = -\frac{bb_1h_1t_1}{4(b+h_1)} = -\frac{bb_1hk_1t}{4(h+b_1)}$	<p>$W_{xв} = \frac{J_x}{y_1}$ (для верхних волокон)</p> <p>$W_{xн} = \frac{J_x}{y_1}$ (для нижних волокон)</p> <p>$W_{yп} = \frac{J_y}{x_1}$ (для правых волокон)</p> <p>$W_{yл} = \frac{J_y}{x_1}$ (для левых волокон)</p>	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = 0,29h$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 0,32b$
$J_x = \frac{bt^3 - (b-t_1)(h-2t)^3}{12}$ $J_y = \frac{ht_1^3 + 6tb^2(b-t_1) + 2t(b-t_1)^3}{12}$ $J_{x_2} = \frac{J_x \cos^2 \alpha - J_y \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ $J_{y_2} = \frac{J_y \cos^2 \alpha - J_x \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{t(b-t_1)(h-t)}{J_x - J_y}$	$W_x = \frac{bt^3 - (b-t_1)(h-2t)^3}{6h}$ $W_y = \frac{ht_1^3 + 6tb^2(b-t_1) + 2t(b-t_1)^3}{6(2b-t_1)}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Треугольник</p> 	$F = \frac{1}{2} bh$	$y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$ $d = \frac{1}{3} (x_1' - x_1)$

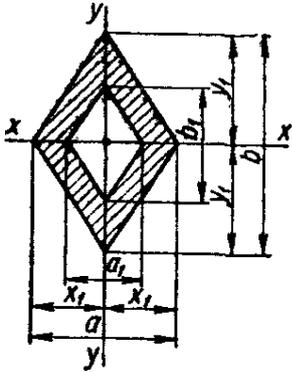
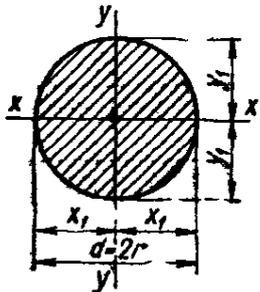
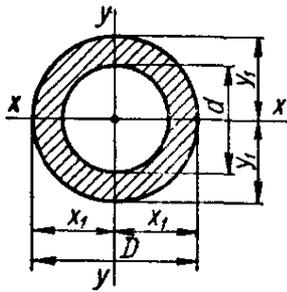
Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$ $J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{6}$ $J_{x_3} = \frac{bh^3}{4} = \frac{Fh^2}{2}$ $J_y = \frac{bh(b^2 - x'_1 x_1)}{36} = \frac{F(b^2 - x'_1 x_1)}{18}$ $J_{y_3} = \frac{h(x_1'^3 + x_1^3)}{12}$ $J_p = \frac{bh}{36} (h^2 + x_1'^2 + x_1^2 + x'_1 x_1 + x_1^2)$ $J_{pA} = \frac{h}{12} (3bh^2 + x_1'^3 + x_1^3)$	$W_{xн} = \frac{bh^2}{12} \text{ (для нижних волокон)}$ $W_{xв} = \frac{bh^2}{24} \text{ (для верхних волокон)}$ $W_{yп} = \frac{bh(b^2 - x'_1 x_1)}{36x_1} \text{ (для правых волокон)}$ $W_{yл} = \frac{bh(b^2 - x'_1 x_1)}{36x_1'} \text{ (для левых волокон)}$	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,2357h$ $i_y = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \sqrt{b^2 - x'_1 x_1} = 0,2357 \sqrt{b^2 - x'_1 x_1}$
<p>Для равностороннего треугольника со стороной b и высотой h</p>		
$J_1 = J_{y_2} = \frac{hb^3}{48} = \frac{Fb^2}{24}$ $J_k = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{h^4}{25,981} = \frac{3}{80} \cdot \frac{b^4}{\sqrt{3}} = \frac{b^4}{46,188}$	$W_{yп} = W_{yл} = \frac{hb^2}{12}$ $W_k = 0,05b^3 = \frac{h^3}{7,5\sqrt{3}} = \frac{h^3}{12,99} = \frac{2J_k}{h}$	$i_y = \frac{b}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,204b$
<p>Для равнобедренного треугольника с основанием b, высотой h и углом при вершине $\alpha < 15^\circ$</p>		
$J_k = \frac{1}{12} hb^3 = 0,105b^4$	$W_k = \frac{1}{12} hb^2 = 0,105b^3 = \frac{J_k}{b}$ <p>В точках длинных сторон вблизи основания τ_{\max}</p>	

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Прямоугольный треугольник</p>	$F = \frac{1}{2} bh$	$x_1' = \frac{1}{3} b$ $x_1 = \frac{2}{3} b$ $y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$

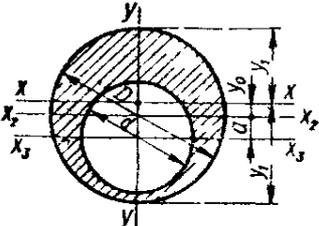
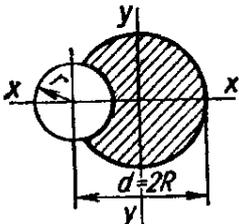
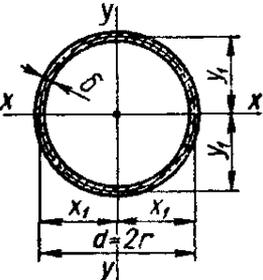
Моменты инерции осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_D и при свободном кручении J_K	Моменты сопротивления осевые W_x, W_y ; полярный W_D и при свободном кручении W_K	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$		
$J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{6}$		
$J_{x_3} = \frac{bh^3}{4} = \frac{Fh^2}{2}$	$W_{xн} = \frac{bh^2}{12} \text{ (для нижних волокон)}$	
$J_y = \frac{b^3h}{36} = \frac{Fb^2}{18}$	$W_{xв} = \frac{bh^2}{24} \text{ (для верхних волокон)}$	
$J_{y_3} = \frac{b^3h}{12} = \frac{Fb^2}{6}$	$W_{л} = \frac{b^2h}{12} \text{ (для левых волокон)}$	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,2357h$
$J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$W_{п} = \frac{b^2h}{24} \text{ (для правых волокон)}$	$i_y = \frac{b}{3\sqrt{2}} = 0,2357b$
$J_{x_2y_2} = \frac{b^2h^2}{24}$		
$J_{x_3y_3} = -\frac{b^2h^2}{8}$		
$J_D = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2) = \frac{bhc^2}{36}$		
$c^2 = h^2 + b^2$		
$J_{D4} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) = \frac{bhc^2}{12}$		
$J_{DB} = \frac{bh}{12} (3h^2 + b^2)$		

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Трапеция</p> 	$F = \frac{1}{2} (b_1 + b) h$	$y_1 = \frac{b + 2b_1}{3(b + b_1)} h$ $y_1' = \frac{2b + b_1}{3(b + b_1)} h$ <p>Для равнобедренной основа</p> $y_1' = \frac{3b_1 + 2b_0}{3(2b_1 + b_0)}$ $x_1 = \frac{b}{2}$ <p>Для трапеции в виде высотой</p>

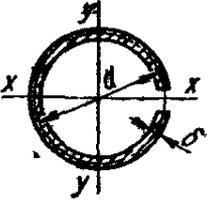
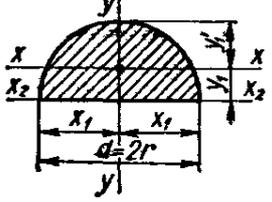
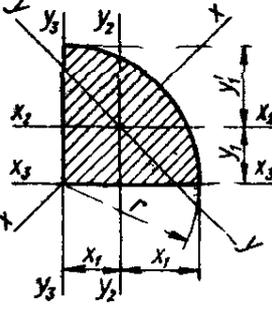
Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции
$J_x = \frac{h^3 (b^2 + 4tb_1 + b_1^2)}{36 (b + b_1)} =$ $= \frac{Fh^2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{18 (b + b_1)^2}$ $J_{x_2} = \frac{h^3 (b + 3b_1)}{12} =$ $= \frac{Fh^2 (b + 3b_1)}{6 (b + b_1)}$ $J_{x_3} = \frac{h^3 (3b + b_1)}{12} =$ $= \frac{Fh^2 (3b + b_1)}{6 (b + b_1)}$	$W_{xн} = \frac{h^2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12 (b + 2b_1)}$ (для нижних волокон) $W_{xв} = \frac{h^2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12 (2b + b_1)}$ (для верхних волокон)	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
трапеции с верхним b_1 и нижним $b_1 + b_0 = b$ ниями	$W_{xв} =$ $= \frac{h^2 (6b_1^2 + 6b_1b_0 + b_0^2)}{12 (3b_1 + 2b_0)}$ $W_y = \frac{h}{24} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b^2 - bb_1}$	$i_x = \frac{h}{6 (b + b_1)} \times$ $\times \sqrt{2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}$ $i_x = \frac{h}{6 (2b_1 + b_0)} \times$ $\times \sqrt{2 (6b_1^2 + 6b_1b_0 + b_0^2)}$ $i_y = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{24}}$
клина с большим b , меньшим b_1 основаниями и $h > 4b$	$J_k = \frac{h (b^4 - b_1^4)}{12 (b - b_1)} -$ $- 0,105 (b^4 + b_1^4)$ $W_k = \frac{J_k}{b} = \frac{h (b^4 - b_1^4)}{12b (b - b_1)} -$ $- 0,105 \frac{b^4 + b_1^4}{b}$	
	Максимальные касательные напряжения в точках длинных сторон ближе к широкому основанию $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}$	

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Полый ромб</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{1}{2} (ab - a_1b_1)$	$x_1 = \frac{a}{2}$ $y_1 = \frac{b}{2}$
<p>Круг</p>  <p>Любая центральная ось — главная</p>	$F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 \approx 0,785d^2$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$
<p>Кольцо</p>  <p>Любая центральная ось — главная</p>	$F = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) \approx 0,785D^2 (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = y_1 = \frac{D}{2}$

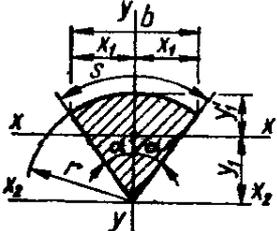
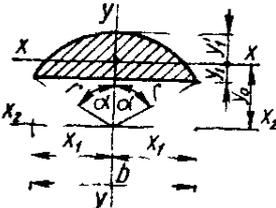
Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции
$J_x = \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{48}$ $J_y = \frac{a^3b - a_1^3b_1}{48}$	$W_x = \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{24b}$ $W_y = \frac{a^3b - a_1^3b_1}{24a}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ $i_x = \sqrt{\frac{ab^3 - a_1b_1^3}{24(ab - a_1b_1)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{a^3b - a_1^3b_1}{24(ab - a_1b_1)}}$
$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} =$ $= \frac{Fd^2}{16} = \frac{Fr^2}{4} \approx 0,05d^4 \approx$ $\approx 0,785r^4$ $J_p = J_k = 2J_x = 2J_y =$ $= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \approx 0,1d^4 \approx$ $\approx 1,57r^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4} \approx$ $\approx 0,1d^3 \approx 0,785r^3$ $W_p = W_k = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2} \approx$ $\approx 0,2d^3 \approx 1,57r^3$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>
$J_x = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} =$ $= \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) =$ $= \frac{F(D^2 + d^2)}{16} =$ $= \frac{FD^2}{16} (1 + \alpha^2) \approx$ $\approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4)$ $J_p = J_k = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} =$ $= \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4)$	$W_x = W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} =$ $= \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4)$ $W_p = W_k = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} =$ $= \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4)$	$i_x = i_y = \frac{1}{4} \times$ $\times \sqrt{D^2 + d^2} =$ $= \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$ <p>Эллипс инерции — круг</p>

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Круг с неконцентрическим отверстием</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = \frac{D}{2}$ $y_0 = \beta D \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$ $y_1 = \frac{D}{2} \frac{1 - \alpha^2 (1 - 2\beta)}{1 - \alpha^2}$ $y_1 = \frac{D}{2} \frac{1 - \alpha^2 (1 + 2\beta)}{1 - \alpha^2}$ $\beta = \frac{a}{D}$
<p>Круг с круговым вырезом</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные</p>	<p>—</p>	<p>—</p>
<p>Тонкостенное кольцо $\delta < 0,1d$</p>  <p>Любая центральная ось — главная</p>	$F = \pi \delta d$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$

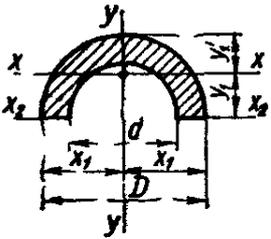
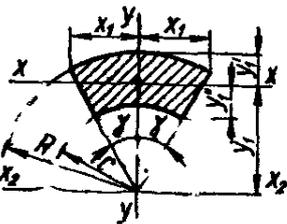
<p>Моменты инерции осевые J_x, J_y, центробежный J_{xy}, полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления осевые W_x, W_y, полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>																														
$J_x = \frac{\pi D^4}{64} \times \left(1 - \alpha^4 - 16 \frac{\alpha^2 \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)$ $J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \times \frac{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) - 16\alpha^2\beta^2}{1 - \alpha^2(1 + 2\beta)}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_x = \frac{\pi D^3}{32} \times \frac{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) - 16\alpha^2\beta^2}{1 - \alpha^2(1 - 2\beta)}$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$i_x = \frac{D}{4} \times \sqrt{1 + \alpha^2 - 16 \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} \right)^2}$ $i_y = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$																														
$J_k = k_1 R^4$	$W_k = \frac{R^3}{k_2}$ <p>Максимальное касательное напряжение τ_{max} на дне выреза</p>	<p>—</p>																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>r/R</th> <th>0</th> <th>0,005</th> <th>0,1</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>k_1</td> <td>1,57</td> <td>1,56</td> <td>1,56</td> <td>1,46</td> <td>1,22</td> <td>0,92</td> <td>0,63</td> <td>0,38</td> <td>0,07</td> </tr> <tr> <td>k_2</td> <td>0,64</td> <td>1,22</td> <td>1,22</td> <td>1,23</td> <td>1,31</td> <td>1,52</td> <td>1,91</td> <td>2,63</td> <td>7,14</td> </tr> </tbody> </table>			r/R	0	0,005	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	k_1	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07	k_2	0,64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14
r/R	0	0,005	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5																							
k_1	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07																							
k_2	0,64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14																							
$J_x = J_y = \frac{\pi \delta d^3}{8} = \pi \delta r^3 = \frac{F d^2}{8} \approx 0,393 \delta d^3$ $J_p = J_k = \frac{\pi \delta d^3}{4} = 2 \pi \delta r^3 \approx 0,785 \delta d^3$	$W_x = W_y = \frac{\pi \delta d^2}{4} = \pi \delta r^2 \approx 0,785 \delta d^2$ $W_p = W_k = \frac{\pi \delta d^2}{2} = 2 \pi \delta r^2 \approx 1,57 \delta d^2$	$i_x = i_y = \frac{d}{2\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0,353 d$ <p>Эллипс инерции — круг</p>																														

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Круговое незамкнутое тонкостенное кольцо</p>  <p>$\delta \ll d$</p>	—	$x_1 = y_1 = \frac{d + \delta}{2}$
<p>Полукруг</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2} \approx 0,393d^2$	$x_1 = \frac{d}{2} = r$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{d}{\pi} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \approx 0,212d$ $y'_1 \approx 0,288d$
<p>Четверть круга</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi r^2}{4} \approx 0,785r^2$	$x_1 = y_1 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424r$ $x'_1 = y'_1 \approx 0,576r$

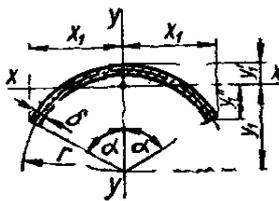
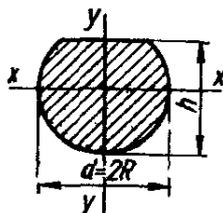
Моменты инерции осевые J_x, J_y , центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при вободном кручении J_k	Моменты сопротивления осевые W_x, W_y , полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_k = \frac{\pi d \delta^3}{3}$	$W_k = \frac{(\pi d \delta)^2}{3\pi d + 1,8\delta} \approx \frac{\pi d \delta^2}{3}$ <p>Максимальные касательные напряжения в точках внутреннего и наружного контуров сечения</p> $\tau_{\max} = \frac{3\pi d + 1,8\delta}{(\pi d \delta)^2} M_k$	—
$J_x = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00686d^4 \approx 0,11r^4$ $J_y = J_{x_2} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{F d^2}{16} = \frac{F r^2}{4} \approx 0,0246d^4 \approx 0,393r^4$	$W_x \approx 0,0324d^3 \approx 0,259r^3$ (для нижних волокон) $W_x \approx 0,0239d^3 \approx 0,191r^3$ (для верхних волокон) $W_y = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8} \approx 0,05d^3 \approx 0,393r^3$	$i_x \approx 0,132d$ $i_y = \frac{d}{4}$
$J_{x_{\max}} \approx 0,0714r^4$ $J_{y_{\min}} \approx 0,0384r^4$ $J_{x_2} = J_{y_2} \approx 0,0549r^4$ $J_{x_3} = J_{y_3} = \frac{\pi r^4}{16} \approx 0,196r^4$ $J_{x_2 y_2} = -0,0165r^4$ $J_{x_3 y_3} = \frac{r^4}{8}$	$W_{x_2} = W_{y_2} = \frac{\pi^2 r^3}{48} \times \frac{9\pi^2 - 64}{3\pi - 4} \approx 0,923r^3$ (для верхних и правых волокон) $W_{x_3} = W_{y_3} = \frac{\pi^2 r^3}{192} \times (9\pi^2 - 64) \approx 1,245r^3$ (для нижних и левых волокон)	$i_{x_{\max}} \approx 0,302r$ $i_{y_{\min}} \approx 0,221r$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p data-bbox="177 506 443 539">Круговой сектор</p>  <p data-bbox="177 853 528 920">Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{sr}{2} = \alpha r^2$ $s = 2r\alpha$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = \frac{b}{2} = r \sin \alpha$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{rb}{s} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} =$ $= 38,2 \frac{r \sin \alpha}{\alpha^\circ}$ $y_1' = r \left(1 - \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} \right)$ $b = 2r \sin \alpha$
<p data-bbox="177 1305 453 1339">Круговой сегмент</p>  <p data-bbox="177 1688 528 1756">Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha);$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $b = 2r \sin \alpha$ $y_0 = \frac{4r \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ $y_1 = r \left(\frac{4}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos \alpha \right)$ $y_1' = r \left(1 - \frac{4}{3} \times \right.$ $\left. \times \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$

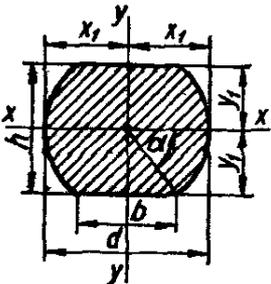
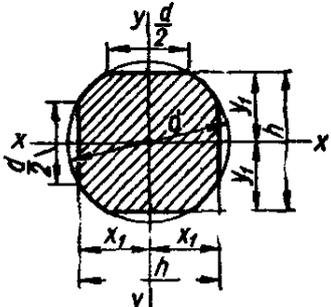
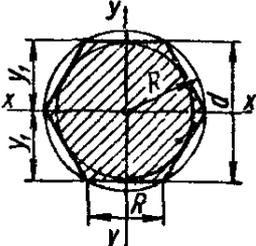
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления, осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = \frac{r^4}{8} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^3 \alpha}{9\alpha} \right) = \frac{Fr^2}{8\alpha} \times$ $\times \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ $J_{x_1} = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha)$ $J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha) =$ $= \frac{Fr^2}{8\alpha} (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$W_x = \frac{r^3}{8} \times$ $\frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha}}{1 - \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha}}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_x = \frac{3r^3\alpha}{16 \sin \alpha} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_y = r^3 \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$	$i_x = \frac{r}{2} \times$ $\times \sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha^2}}$ $i_y = \frac{r}{2} \times$ $\times \sqrt{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}$
$J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha) =$ $= \frac{Fr^2}{4} \left(1 + \frac{4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$ $J_y = \frac{r^4}{8} \left(2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \cos \alpha \sin^3 \alpha \right) =$ $= \frac{Fr^2}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \times \frac{\cos \alpha \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$ $J_{x_1} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ (для нижних волокон) $W_x = \frac{J_x}{y_1}$ (для верхних волокон) $W_y = \frac{r^3}{8 \sin \alpha} \left(2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \cos \alpha \sin^3 \alpha \right)$	$i_x = \frac{r}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}}$ $i_y = \frac{r}{2} \sqrt{1 - \frac{4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Полукольцо</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{8} =$ $= \frac{\pi D^2}{8} (1 - \alpha^2) \approx$ $\approx 0,393D^2 (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = \frac{D}{2}$ $y_1 = \frac{2}{3\pi} \frac{D^2 + Dd + d^2}{D + d} =$ $= \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha} \approx$ $\approx 0,212D \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha}$ $y_1' \approx D \left(0,288 - \right.$ $\left. - 0,212 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \right)$
<p>Сектор кольца</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \gamma (R^2 - r^2) =$ $= \gamma R^2 (1 - \alpha^2)$ $\gamma = \frac{\pi \gamma^\circ}{180^\circ}$ $\alpha = \frac{r}{R}$	$x_1 = R \sin \gamma$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2} \times$ $\times \frac{\sin \gamma}{\gamma} =$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin \gamma}{\gamma} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2}$ $y_1' = R \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \times \right.$ $\left. \times \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} \right)$ $y_1'' = \frac{2R \sin \gamma}{3\gamma} \times$ $\times \left(\frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} - \frac{3}{2} \alpha \gamma \operatorname{ctg} \gamma \right)$

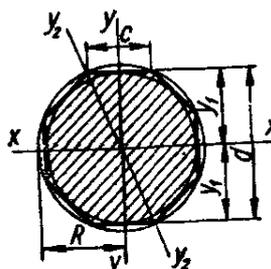
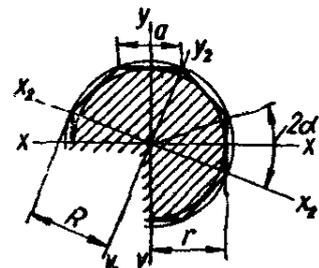
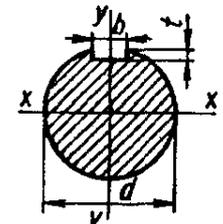
<p>Моменты инерции осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y, полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x \approx 0,00686 (D^4 - d^4) - \frac{0,0177D^2d^2 (D - d)}{D + d} =$ $= 0,00686D^4 \left(1 - \alpha^4 - 2,54\alpha^2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$ $J_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{128} =$ $= \frac{\pi D^4}{128} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,0246D^4 (1 - \alpha^4)$	$W_x \approx 0,00686D^3 \times$ $\frac{(1 - \alpha^4)(1 + \alpha) - 2,54\alpha^2(1 - \alpha)}{0,288(1 + \alpha) - 0,212\alpha^2}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_x \approx 0,0324D^3 \times$ $\frac{(1 - \alpha^4)(1 + \alpha) - 2,54\alpha^2(1 - \alpha)}{1 + \alpha + \alpha^2}$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_y = \frac{\pi D^3}{64} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,05D^3 (1 - \alpha^4)$	$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$ $i_y = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2} =$ $= \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$
$J_x = \frac{R^4 - r^4}{8} \left(2\gamma + \sin 2\gamma - \frac{32 \sin^2 \gamma}{9\gamma} \right) =$ $= \frac{R^4}{8} (1 - \alpha^4) \left(2\gamma + \sin 2\gamma - \frac{32 \sin^2 \delta}{9\gamma} \right) =$ $= \frac{FR^2}{8\gamma} (1 + \alpha^2) \left(2\gamma + \sin 2\gamma - \frac{32 \sin^2 \gamma}{9\gamma} \right)$ $J_{x_1} = \frac{R^4 - r^4}{8} (2\gamma + \sin 2\gamma) = \frac{R^4}{8} (1 - \alpha^4) \times (2\gamma + \sin 2\gamma)$ $J_y = \frac{R^4 - r^4}{8} (2\gamma - \sin 2\gamma) =$ $= \frac{R^4}{8} (1 - \alpha^4) (2\gamma - \sin 2\gamma) =$ $= \frac{FR^2}{8\gamma} (1 + \alpha^2) (2\gamma - \sin 2\gamma)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1} \text{ (для верхних волокон)}$ $W_x = \frac{J_x}{y_1'} \text{ (для нижних волокон)}$ $W_y = \frac{R^3}{8} (1 - \alpha^4) \times \frac{2\gamma - \sin 2\gamma}{\sin \gamma}$	$i_x = \frac{R}{2} \sqrt{(1 + \alpha^2) \left(1 + \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} - \frac{16 \sin^2 \gamma}{9\gamma^2} \right)}$ $i_y = \frac{R}{2} \times \sqrt{(1 + \alpha^2) \left(1 - \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} \right)}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Сектор тонкостенного кольца</p>  <p>$\delta \ll 2r$</p> <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = 2\alpha r\delta$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = r \sin \alpha$ $y_1 = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ $y_1' = r \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$ $y_1'' = r \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha\right)$
<p>Круг с лыской</p>  $\alpha = \frac{h}{d} > 0,5$ <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	<p>—</p>	<p>—</p>

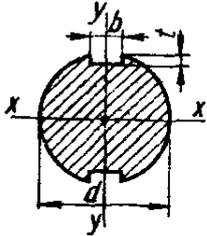
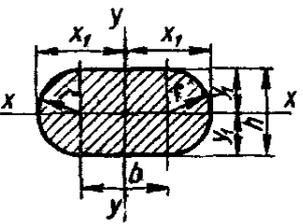
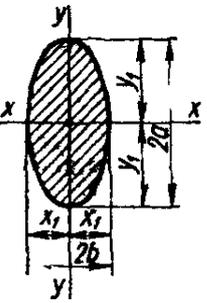
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y, центробежный J_{xy}; полярный J_D и при свободном кручении J_K</p>	<p>Моменты сопротивления осевые W_x, W_y, полярный W_D и при свободном кручении W_K</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = \frac{\delta r^3}{2} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right) = \frac{Fr^2}{4\alpha} \times \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right)$ $J_y = \frac{\delta r^3}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{Fr^2}{4\alpha} (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$W_x \approx \frac{\delta r^2}{2} \times \frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_x \approx \frac{\delta r^2}{2} \times \frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha}$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_y \approx \frac{\delta r^2}{2} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$	$i_x = \frac{r}{2} \times \sqrt{2 + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha^2}}$ $i_y = \frac{r}{2} \times \sqrt{2 - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$
$J_K = \frac{d^4}{16} \left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right) = \frac{d^4}{16} (2,6\alpha - 1)$	$W_K = \frac{d^3 (2,6\alpha - 1)}{8 (0,3\alpha + 0,7)}$ <p>Максимальное касательное напряжение τ_{\max} в середине плоского среза</p>	<p>—</p>

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Круг со срезанными сегментами сверху и снизу</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	<p>а) $b = d \cos \alpha$ $h = d \sin \alpha$ $F = \frac{d^2}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha)$</p> <p>б) $b = \frac{d}{2}$ $h = 0,866d$ $F = 0,74d^2$</p> <p>в) $b = \frac{d}{3}$ $h = 0,943d$ $F = 0,773d^2$</p>	<p>$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = \frac{d}{2} \sin \alpha$</p> <p>$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = 0,433d$</p> <p>$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = 0,471d$</p>
<p>Круг со срезанными сегментами с четырех сторон</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{\pi d^2}{12} \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) = 0,694d^2$	<p>$x_1 = y_1 = 0,433d$</p>
<p>Правильный шестиугольник</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	<p>$F = 0,866d^2 = 2,598R^2$</p>	<p>$y_1 = \frac{d}{2}$</p>

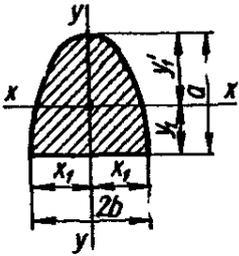
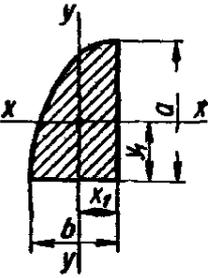
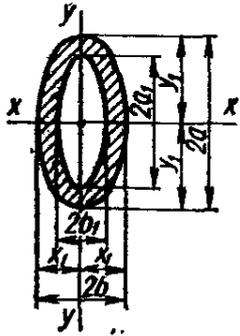
Моменты инерции осевые J_x, J_y , центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления осевые W_x, W_y , полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{d^4}{32} \left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right)$ $J_y = \frac{d^4}{32} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha \cos^2 \alpha}{3} \right)$ $J_x = 0,0395d^4$ $J_y = 0,0485d^4$ $J_x = 0,0461d^4$ $J_y = 0,049d^4$	$W_x = \frac{d^3}{16 \sin \alpha} \left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right)$ $W_y = \frac{d^3}{16} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha \cos^2 \alpha}{3} \right)$ $W_x = 0,0912d^3$ $W_y = 0,097d^3$ $W_x = 0,0978d^3$ $W_y = 0,098d^3$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ $i_x = 0,231d$ $i_y = 0,256d$ $i_x = 0,244d$ $i_y = 0,252d$
$J_x = J_y = 0,038d^4$	$W_x = W_y = 0,087d^3$	$i_x = i_y = 0,234d$
$J_x = J_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 =$ $= 0,5413R^4 = 0,06d^4$ $J_k = 0,533F \frac{d^2}{4}$	$W_x = \frac{5}{8} R^3 = 0,625R^3 =$ $= 0,12d^3$ $W_y = 0,5413R^3 = 0,06d^3$ $W_k = 0,436F \frac{d}{2}$ <p>Максимальные касательные напряжения τ_{\max} посередине сторон</p>	$i_x = i_y = 0,456R =$ $= 0,263d$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Правильный восьмиугольник</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = 0,828d^2 = 4,828a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2}$
<p>Правильный многоугольник с n сторонами</p> 	$F = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \alpha = nr^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{nar}{2}$	$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$
<p>Круговое сечение с одной шпоночной канавкой</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F \approx \frac{\pi d^2}{4} - bl$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2}$

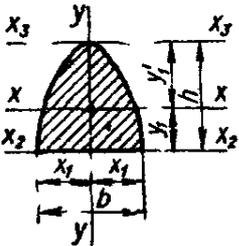
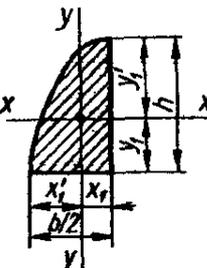
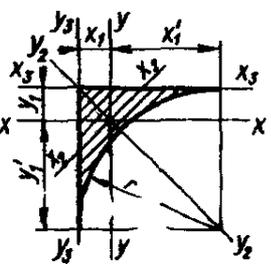
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = J_y = J_{y_2} =$ $= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 =$ $= 0,638R^4 = 0,0547d^4$ $J_k = 0,52F \frac{d^2}{4}$	$W_x = W_y = 0,6906R^3 =$ $= 0,1095d^3$ <p>Относительно диагонали</p> $W_y = 0,638R^3 = 0,1012d^3$ $W_k = 0,447F \frac{d}{2}$ <p>Максимальные касательные напряжения τ_{\max} посередине сторон</p>	$i_x = i_y = i_{y_2} =$ $= 0,257d$
$J_x = J_{x_2} = \frac{F}{24} (6R^2 - a^2) =$ $= \frac{nar}{48} (6R^2 - a^2)$ $J_x = J_{x_2} = \frac{F^2}{48} (12r^2 + a^2) =$ $= \frac{nar}{96} (12r^2 + a^2)$	<p style="text-align: center;">—</p>	$i_x = \sqrt{\frac{6R^2 - a^2}{24}}$ $i_{x_2} = \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}$
$J_x \approx \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ $J_k \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$	$W_x \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$ $W_k \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Круговое сечение с двумя шпоночными канавками</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F \approx \frac{\pi d^2}{4} - 2bt$	$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 \approx \frac{d}{2}$
<p>Мостовой бык с закруглениями</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = bh + \pi r^2 =$ $= bh \left(1 + \frac{\pi}{4} \alpha \right)$ $r = \frac{h}{2}$ $\alpha = \frac{h}{b}$	$x_1 = \frac{b+h}{2} = \frac{b}{2} (1 + \alpha)$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Эллипс</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \pi ab$ $\frac{a}{b} > 1$	$x_1 = b$ $y_1 = a$

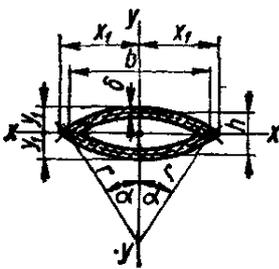
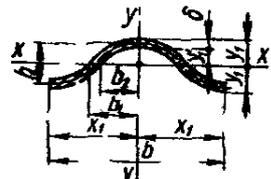
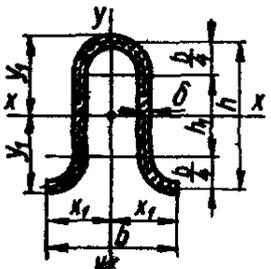
Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x \approx \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{2}$ $J_k \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2}$	$W_x \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$ $W_k \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} \left(1 + \frac{3\pi}{16} \alpha \right)$ $J_y = \frac{hb^3}{12} [1 + 0,165\alpha^3 + 3\pi(0,5 + 0,212\alpha)^2]$	$W_x = \frac{bh^2}{6} \left(1 + \frac{3\pi}{16} \alpha \right)$ $W_y = \frac{hb^2}{6(1+\alpha)} [1 + 0,165\alpha^3 + 3\pi(0,5 + 0,212\alpha)^2]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Fa^2}{4} \approx 0,785a^3 b$ $J_y = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{Fb^2}{4} \approx 0,785ab^3$ $J_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2)$ $J_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{F^3}{\pi^2 (a^2 + b^2)} = \frac{F^4}{4\pi^2 J_p}$	$W_x = \frac{\pi a^2 b}{4} \approx 0,785a^2 b$ $W_y = \frac{\pi a b^2}{4} \approx 0,785ab^2$ $W_k = \frac{\pi b^2 a}{2}$ <p>По концам малой оси</p> $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{2M_k}{\pi b^2 a}$ <p>По концам большой оси</p> $\tau = \frac{b\tau_{\max}}{a}$	$i_x = \frac{a}{2}$ $i_y = \frac{b}{2}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Полуэллипс</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ главные центральные</p>	$F = \frac{\pi ab}{2}$	$x_1 = b$ $y_1 = \frac{4}{3\pi} a$ $y'_1 = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) a$
<p>Четверть эллипса</p> 	$F = \frac{\pi ab}{4}$	$x_1 = \frac{4}{3\pi} b$ $y_1 = \frac{4}{3\pi} a$
<p>Полый эллипс</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ главные центральные</p>	$F = \pi (ab - a_1 b_1)$	$x_1 = b$ $y_1 = a$ $a - a_1 = b - b_1 = \delta$ $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = n > 1$ $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \alpha < 1$

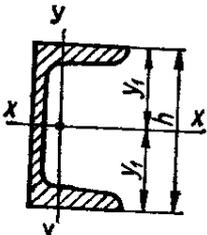
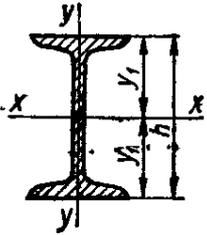
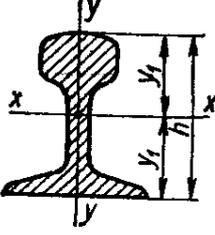
<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
$J_x = ba^3 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) =$ $= 2Fa^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right)$ $J_y = \frac{\pi ab^3}{8} = \frac{Fb^2}{4}$	$W_x = \frac{3}{4} ba^2 \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{8}{9} \right)$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_x = \frac{ba^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)}{1 - \frac{4}{3\pi}}$ <p>(для верхних волокон)</p> $W_y = \frac{\pi ab^2}{8} \approx 0,392ab^2$	$i_x = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2};$ $i_y = \frac{b}{2}$
$J_x = ba^3 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) =$ $= 4Fa^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2} \right)$ $J_y = ab^3 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) =$ $= 4Fb^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2} \right)$	$W_{x \min} = \frac{3}{4} ba^2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{9} \right)$ <p>(для нижних волокон)</p> $W_{y \min} = \frac{3}{4} ab^2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{9} \right)$ <p>(для правых волокон)</p>	$i_x = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2}$ $i_y = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2}$
$J_x = \frac{\pi}{4} (a^3b - a_1^3b_1) \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) \delta$ $J_y = \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_1b_1^3) \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} b^2 (b + 3a) \delta$ <p>Приближенные значения J и W пригодны, если отношения $\delta : a_1$ и $\delta : b_1$ малы</p> $J_k = \frac{\pi b^4 n^3}{n^2 + 1} (1 - \alpha^4)$	$W_x = \frac{\pi}{4} \frac{a^3b - a_1^3b_1}{a} \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} a (a + 3b) \delta$ $W_y = \frac{\pi}{4} \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{b} \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} b (b + 3a) \delta$ $W_k = \frac{\pi b^2 n}{2} (1 - \alpha^4)$ <p>Касательное напряжение τ в конце малой полуоси $\tau_{\max} =$ $\frac{M_k}{W_k}$; в конце большой полуоси $\tau = \frac{\tau_{\max}}{n}$</p>	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Параболический сегмент</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \frac{2}{3} bh$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{2}{5} h$ $y'_1 = \frac{3}{5} h$
<p>Параболический полу-сегмент</p> 	$F = \frac{bh}{3}$	$x_1 = \frac{3}{16} b$ $x'_1 = \frac{5}{16} b$ $y_1 = \frac{2}{5} h$ $y'_1 = \frac{3}{5} h$
<p>Круговой треугольник</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = 0,215r^2$	$x_1 = y_1 = 0,223r$ $x'_1 = y'_1 = 0,777r$

<p>Моменты инерции: осевые J_x, J_y; центробежный J_{xy}; полярный J_p и при свободном кручении J_k</p>	<p>Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y; полярный W_p и при свободном кручении W_k</p>	<p>Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$</p>
	<p>При малой толщине можно принять равномерное рас- пределение напряжений по сечению $\tau = \frac{M_k}{2F\delta}$</p>	
<p>$J_x = \frac{8}{175} bh^3 = \frac{12Fh^2}{175}$ $J_{x_2} = \frac{16}{105} bh^3 = \frac{8Fh^2}{35}$ $J_{x_3} = \frac{2}{7} bh^3 = \frac{3Fh^2}{7}$ $J_y = \frac{hb^3}{30} = \frac{Fb^2}{20}$</p>	<p>$W_x = \frac{4}{35} bh^2$ (для нижних волокон) $W_x = \frac{8}{105} bh^2$ (для верхних волокон) $W_y = \frac{hb^2}{15}$</p>	<p>$i_x = \frac{2}{5} h \sqrt{\frac{3}{7}}$ $i_y = \frac{b}{2\sqrt{5}}$</p>
<p>$J_x = \frac{4}{175} bh^3 = \frac{12Fh^2}{175}$</p>	<p>$W_{x_{\min}} = \frac{2}{35} bh^2$ (для нижних волокон)</p>	<p>$i_x = \frac{2}{5} h \sqrt{\frac{3}{7}}$</p>
<p>$J_x = J_y = 0,00755r^4$ $J_{x_2} = 0,003r^4$ $J_{x_3} = J_{y_3} = 0,0181r^4$ $J_{y_2} = 0,0121r^4$</p>	<p>$W_{x_{2\min}} = 0,0097r^3$</p>	<p>$i_{x_{2\min}} = 0,187r$</p>

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Полое сечение в виде чечевицы</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = \alpha \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \times$ $\times h\delta = \frac{\alpha\delta}{h} (h^2 + b^2) =$ $= 4\alpha r\delta$ $b = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ $r = \frac{h}{4} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$	$x_1 = \sqrt{(\delta + h) \times}$ $\times \left(r + \frac{\delta - h}{4} \right)$ $y_1 = \frac{\delta + h}{2}$
<p>Волнистое железо (волны образованы параболическими дугами)</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = 12,5\delta \frac{b}{h} \times$ $\times \left\{ \frac{4h}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{b} \right)^2} + \right.$ $\left. + \ln \left[\frac{4h}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{b} \right)^2} \right] \right\} \approx$ $\approx \frac{1}{3} \delta (2b + 5,2h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h + \delta}{2}$ $y'_1 = \frac{h - \delta}{2}$ $b_1 = \frac{b + 2,6\delta}{4}$ $b_2 = \frac{b - 2,6\delta}{4}$
<p>Волнистое железо (волны образованы дугами круга)</p>  <p>Оси $x-x$ и $y-y$ — главные центральные</p>	$F = 2\delta \left(\frac{\pi b}{4} + h_1 \right)$ $h_1 = h - \frac{b}{2}$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h + \delta}{2}$

Моменты инерции осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = r^3 \delta [2\alpha (2 + \cos 2\alpha) - 3 \sin 2\alpha] =$ $= \frac{Fr^3}{4\alpha} [2\alpha (2 + \cos 2\alpha) - 3 \sin 2\alpha]$ $J_y = r^3 \delta (2\alpha - \sin 2\alpha) =$ $= \frac{Fr^3}{4\alpha} (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1} = \frac{2J_x}{\delta + h}$ $W_y = \frac{J_y}{x_1}$	$i_x = r \sqrt{\frac{2 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{3 \sin 2\alpha}{4\alpha}}$ $i_y = r \times \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4\alpha}} =$ $= \frac{r}{2} \sqrt{2 - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$
$J_x = \frac{1280}{21} \cdot \frac{1}{b} (b_1 y_1^3 - b_2 y_1^3) = \frac{64}{105} (b_1 y_1^3 - b_2 y_1^3) = \frac{16}{105} [b(y_1^3 - y_1'^3) + 2,6\delta (y_1^3 + y_1'^3)]$	$W_x = \frac{2J_x}{h + \delta}$	$i_x = \sqrt{\frac{3J_x}{\delta (2b + 5,2h)}} \approx 1,35 \times \sqrt{\frac{b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3}{\delta (2b + 5,2h)}}$
$J_x = \frac{\delta}{4} \left(\frac{\pi b^3}{16} + b^2 h_1 + \frac{\pi b h_1^2}{2} + \frac{2}{3} h_1^3 \right)$	$W_x = \frac{2J_x}{h + \delta}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$

Форма сечения	Площадь сечения F	Координаты крайних точек сечения
<p>Стандартный прокатный швеллер на ребро. Формулы приближенные, h, см</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	—	$y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Стандартный прокатный двутавр на ребро. Формулы приближенные, h, см</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	—	$y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Сечение железнодорожного рельса (формулы приближенные)</p>  <p>Оси x — x и y — y — главные центральные</p>	$F \approx 0,238h^2$	$y_1 \approx 0,5h$
<p>Сечение любой формы. Формулы могут быть использованы только для ориентировочной оценки величины момента инерции и момента сопротивления относительно центральной оси</p>	F — площадь внутри наружного контура сечения	h и b — высота и ширина сечения s и t — периметр и толщина (для полого сечения)

Моменты инерции: осевые J_x, J_y ; центробежный J_{xy} ; полярный J_p и при свободном кручении J_k	Моменты сопротивления: осевые W_x, W_y ; полярный W_p и при свободном кручении W_k	Радиусы инерции $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x \approx \frac{h(h+5)^3}{162}$	$W_x \approx \frac{(h+5)^3}{81}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x \approx \frac{h(h+2)^3}{102}$	$W_x \approx \frac{(h+2)^3}{51}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x \approx 0,032h^4$	$W_x \approx 0,064h^3$	$i_x \approx 0,37h$
Для сплошного сечения $J \approx \frac{F^2 h}{12b}$	Для сплошного симметричного сечения $W \approx \frac{F^2}{6b}$	—
Для полого сечения $J \approx \frac{Fh}{6b} \left[s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] t$	Для полого симметричного сечения $W \approx \frac{F}{3b} \left[s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] t$	—

Ошибка ~ 15 %

Ошибка ~ 25 %

- J — момент инерции;
 i — радиус инерции;
 Z_0 — расстояние от центра тяжести до
 наружной грани полки,
 J_{xy} — центробежный момент инерции

ные значения для осей							Масса 1 м угло- ка кг
$\lambda_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			$J_{xy}, \text{ см}^4$	$Z_0,$ см	
$J_{x_0 \max},$ см ⁴	$i_{x_0 \max},$ см	$J_{y_0 \min}$ см ⁴	$W_{y_0}, \text{ см}^3$	$i_{y_0 \min},$ см			
0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
14,80	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44

- J — момент инерции;
 i — радиус инерции;
 Z_0 — расстояние от центра тяжести до
 наружной грани полки,
 J_{xy} — центробежный момент инерции

ные значения для осей							Масса 1 м угло- ка кг
$\lambda_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			$J_{xy}, \text{см}^4$	$Z_0,$ см	
$J_{x_0 \max},$ см ⁴	$i_{x_0 \max},$ см	$J_{y_0 \min}$ см ⁴	$W_{y_0}, \text{см}^3$	$i_{y_0 \min},$ см			
0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
14,80	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44

Номер уголка	мм				Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справоч		
	b	t	R	r		x — x		
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см
6	60	5	7,0	2,3	5,41	15,97	3,96	1,72
		4			4,72	16,21	3,70	1,85
		5			5,83	19,79	4,56	1,84
		6			6,92	23,21	5,40	1,83
		8			9,04	29,55	7,00	1,81
6,3	63	10	7,0	2,3	11,08	35,32	8,52	1,79
		4			4,96	18,86	4,09	1,95
		5			6,13	23,10	5,05	1,94
7	70	6	8,0	2,7	7,28	27,06	5,98	1,93
		4,5			6,20	29,04	5,67	2,16
7,5	75	5	9,0	3,0	6,86	31,94	6,27	2,16
		6			8,15	37,58	7,43	2,15
		7			9,42	42,98	8,57	2,14
		8			10,67	48,16	9,68	2,12
		10			13,11	57,90	11,82	2,10
8	80	5,5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31
		6			8,78	46,57	8,57	2,30
		7			10,15	53,31	9,89	2,29
		8			11,50	59,84	11,18	2,28
		9			12,83	66,10	12,43	2,27
9	90	6	10,0	3,3	8,63	52,68	9,03	2,47
		7			9,38	56,97	9,80	2,47
		8			10,85	65,31	11,32	2,45
		10			12,30	73,36	12,80	2,44
		12			15,14	88,58	15,67	2,42
10	100	6	12,0	4,0	17,90	102,74	18,42	2,40
		7			10,61	82,10	12,49	2,78
		8			12,28	94,30	14,45	2,77
		9			13,93	106,11	16,36	2,76
		10			15,60	118,00	18,29	2,75
11	110	7	12,0	4,0	17,17	128,60	20,07	2,74
		8			20,33	149,67	23,85	2,71
		6,5			12,82	122,10	16,69	3,09
		7			13,75	130,59	17,90	3,08
		8			15,60	147,19	20,30	3,07
		10			19,24	178,95	24,97	3,05
11	110	12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03
		14			26,28	237,15	33,83	3,00
		15			27,99	250,68	35,95	2,99
		16			29,68	263,82	38,04	2,98
		7			15,15	175,61	21,83	3,40

Продолжение табл. 2

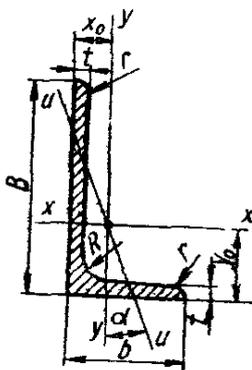
Масштабные величины для осей							Масса Г м угол- ка, кг
$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			J_{x_0} , см ⁴	Z_0 , см	
$J_{x_0 \max}$ см ⁴	$x_{0 \max}$ см	$J_{y_0 \min}$ см ⁴	W_{y_0} , см ³	$y_{0 \min}$ см			
25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71
31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58
36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43
46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10
55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70
29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
26,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39
76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29
62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07
83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	20,90	2,17	6,78
90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
103,66	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	56,70	2,35	11,88
162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	59,50	2,42	14,05
130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,30	2,59	13,48
235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,20	2,67	15,96
193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90
374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63
395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	145,00	3,03	21,97
416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30
278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89

Номер уголка	мм				Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справоч		
	b	t	R	-		x — x		
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см
12	120	8			17,20	198,17	24,77	3,39
		8			18,80	259,75	29,68	3,72
		10			23,24	317,16	36,59	3,69
		12			27,60	371,80	43,30	3,67
		15			33,99	448,90	52,96	3,63
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87
		9			22,0	327,48	36,00	3,86
		10			24,33	359,82	39,74	3,85
		12			28,89	422,23	47,06	3,82
		14			33,37	481,76	54,17	3,80
		16			37,77	538,56	61,09	3,78
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34
		10			27,33	512,29	50,32	4,33
		12			32,49	602,49	59,66	4,31
15	150	10			29,33	634,76	58,07	4,65
		12			34,89	747,48	68,90	4,63
		15			43,08	908,38	84,66	4,59
		18			51,09	1060,08	99,86	4,56
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96
		11			34,42	844,21	72,44	4,95
		12			37,39	912,89	78,62	4,94
		14			43,57	1046,47	90,77	4,92
		16			49,07	1175,19	102,64	4,89
		18			54,79	1290,24	114,24	4,87
		20			60,40	1418,85	125,60	4,85
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60
		12			42,19	1316,62	100,41	5,59
		15			52,18	1607,36	123,74	5,55
		18			61,99	1884,07	146,36	5,51
		20			68,43	2061,11	161,07	5,49
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22
		13			50,85	1960,77	134,44	6,21
		14			54,6	2097,00	144,17	6,20
		16			61,98	2362,57	163,37	6,17
		18			69,30	2620,64	182,22	6,15
		20			76,54	2871,47	200,73	6,12
		24			90,78	3350,66	236,77	6,08
		25			94,29	3466,21	245,59	6,06
		30			111,54	4019,60	288,57	6,00
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83
		16			68,58	3175,44	198,71	6,80

ные величины для осей							Масса 1 м угла- ка, кг
$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			$J_{xy}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$	
$J_{x_0 \text{max}}, \text{см}^4$	$l_{x_0 \text{max}}, \text{см}$	$J_{y_0 \text{min}}, \text{см}^4$	$W_{y_0}, \text{см}^3$	$l_{y_0 \text{min}}, \text{см}$			
314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50
412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	153,00	3,25	14,76
503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187,00	3,33	18,24
590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218,00	3,41	21,67
711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262,00	3,53	26,68
466,76	4,87	121,96	25,67	2,49	172,00	3,36	15,46
520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10
670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68
763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20
852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65
739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,78	19,41
813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45
956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50
1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374,00	4,07	23,02
1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440,00	4,15	27,39
1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534,00	4,27	33,82
1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621,00	4,38	40,11
1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
1340,66	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	33,97
1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,44
1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	30,47
2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
2554,99	7,00	659,73	93,11	3,56	948,00	5,01	40,96
2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	1108,00	5,13	48,66
3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	1210,00	5,20	53,72
2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544,00	5,62	54,40
4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
5313,59	7,65	1387,73	167,74	3,91	1963,00	5,85	71,26
5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1862,00	6,02	53,83

Номер уголка	мм				Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справоч		
	b	t	R	r		x — x		
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76
		18			87,72	5247,24	288,82	7,73
		20			96,96	5764,87	318,76	7,71
		22			106,12	6270,32	348,26	7,69
		25			119,71	7006,39	391,72	7,65
		28			133,12	7716,86	434,86	7,61
		30			141,96	8176,51	462,11	7,59

Таблица 3 Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сор



B — ширина большей полки,
b — ширина меньшей полки;
t — толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки;

Номер уголка	мм					Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справоч			
	B	b	t	R	r		x — x			J _y , см ⁴
							J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22
3/2	30	20	3	4,0	1,3	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56
3,2/2	32	20	3	4,0	1,3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69

ные величины для осей							Масса 1 м угол- ка, кг
$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			$J_{xy}, \text{ см}^4$	$Z_0, \text{ см}$	
$J_{x_0, \text{max}}, \text{ см}^4$	$i_{x_0, \text{max}}, \text{ см}$	$J_{y_0, \text{min}}, \text{ см}^4$	$W_{y_0}, \text{ см}^3$	$i_{y_0, \text{min}}, \text{ см}$			
7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	61,55
8336,69	9,75	2157,78	223,39	4,96	3089,00	6,83	68,86
9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	76,11
9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	83,31
11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	93,97
12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	104,50
12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31	111,44

тамент (ГОСТ 8510—86)

- J — момент инерции;
- i — радиус инерции;
- x_0, y_0 — расстояние от центра тяжести до наружных краев полок;
- J_{xy} — центробежный момент инерции

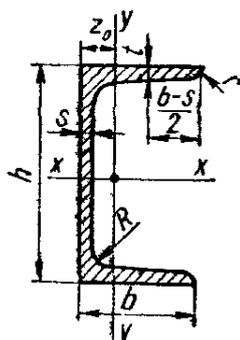
ные величины для осей								Угол накло- на оси, $\text{tg } \alpha$	Масса 1 м угол- ка, кг
$y - y$		$u - u$			$x_0, \text{ см}$	$y_0, \text{ см}$	$J_{xy}, \text{ см}^4$		
$W_{y_0}, \text{ см}^3$	$i_{y_0}, \text{ см}$	$J_{u, \text{min}}, \text{ см}^4$	$W_{u_0}, \text{ см}^3$	$i_{u, \text{min}}, \text{ см}$					
0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,427	1,12
0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38
0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,69	0,544	2,09
1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,57
0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20

Номер уголка	м					Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справоч			
	B	b	t	R	r		λ — x			J _y , см ⁴
							J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70
			5			4,41	13,82	3,70	1,77	4,48
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16
			5			4,98	19,91	4,72	2,00	6,26
			6			5,90	23,31	5,58	1,99	7,29
			8			7,68	29,60	7,22	1,96	9,15
6,5/5	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08
			6			6,60	27,46	6,16	2,04	14,12
			7			7,62	31,32	7,08	2,03	16,05
			8			8,62	35,00	7,99	2,02	18,88
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60
			7			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52
8/5	80	50	5			6,36	41,64	7,71	2,56	12,68
			6			7,55	48,98	9,15	2,55	14,85
8/6	80	60	6			8,15	52,06	9,42	2,53	25,18
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21
			10			15,47	153,83	23,32	3,15	47,18
10/6,5	100	65	7			11,23	114,05	16,87	3,19	38,32
			8			12,73	138,31	19,11	3,18	42,96
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68
11/7	110	70	6,5			11,45	142,42	19,11	3,53	45,61
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64
12,5/8	125	80	7	11,00	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73
			8			15,98	255,62	30,27	4,00	80,95
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47

ные величины для осей								Угол накло- на оси, tg α	Масса 1 м угол ка, кг
y — y		u — u			x ₀ , см	y ₀ , см	J _{xy} , см ⁴		
W _y , см ²	i _y , см	J _{umin} , см ⁴	W _u , см ²	i _{umin} , см					
0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03
3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36
3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77
2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43
3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,20	0,387	4,99
3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39
7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77
6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81
8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,99
10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30
8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93
11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,04	84,10	0,406	12,54
16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404	15,47

Номер уголка	мм					Площадь попереч- ного сече- ния, см ²	Справоч			
	B	b	t	R	r		x — x			J _y , см ⁴
							J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	
			12			23,36	364,79	44,07	3,95	116,84
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60
18/11	180	110	10	14,0	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09
20/12,5	200	125	11			34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66

Таблица 4 Сталь горячекатаная. Швеллеры. Сортамент (ГОСТ 8240)



- h* — высота,
b — ширина полки,
s — толщина стенки,
t — толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки.

Номер швеллера	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг
	мм							
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30
14а	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	13,30
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20
16а	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30

Продолжение табл. 3

ные величины для осей								Угол наклона оси, $\text{tg } \alpha$	Масса I м уголка, кг
$y - y$		$u - u$			$x_0, \text{ см}$	$y_0, \text{ см}$	$J_{xy}, \text{ см}^4$		
$W_{y_1}, \text{ см}^3$	$i_{y_1}, \text{ см}$	$J_{u \text{ min}}, \text{ см}^4$	$W_{u_1}, \text{ см}^3$	$i_{u \text{ min}}, \text{ см}$					
19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400	18,34
17,19	2,58	70,27	14,39	1,98	2,03	4,49	121,00	0,411	14,13
21,14	2,56	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409	17,46
23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391	17,96
26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390	19,85
31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388	23,58
35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385	27,26
32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376	22,24
38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374	26,45
45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00	0,392	27,37
49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392	29,74
57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390	34,43
64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388	39,07

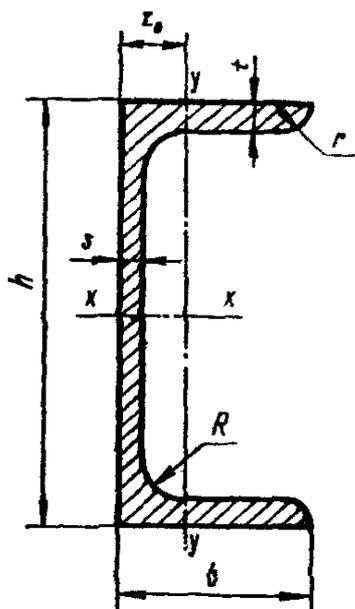
—72). Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

J — момент инерции;
 W — момент сопротивления,
 i — радиус инерции;
 S — статический момент полусечения;
 Z_0 — расстояние от оси $y - y$ до наружной грани стенки.

Справочная величина для осей							$Z_0, \text{ см}$
$x - x$				$y - y$			
$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$J_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	
22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24
89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
545,0	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80
823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00

Номер швеллера	l	l	s	l	R	r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг
	мм							
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	19,80
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	22,60
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	25,80
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30

Т а б л и ц а 5. Сталь горячекатаная. Швеллеры. Сортамент (ГОСТ 8240)



- h — высота,
 b — ширина полки;
 s — толщина стенки;
 l — толщина полки;
 R — радиус внутреннего закругления;
 r — радиус закругления полки;

Номер швеллера	h	b	s	l	R	r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг
	мм							
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40

Справочная величина для осей							$Z_0, \text{ см}$
$x - x$				$y - y$			
$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$J_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	
1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,94
1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,180	2,13
1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,300	2,07
1670,0	167,0	8,15	95,90	139,00	24,20	2,350	2,28
2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,370	2,21
2330,0	212,0	8,99	121,00	187,00	30,00	2,550	2,46
2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,600	2,42
3180,0	265,0	9,84	151,00	254,00	37,20	2,780	2,67
4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,730	2,47
5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,840	2,52
7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,970	2,59
10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,100	2,68
15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,230	2,75

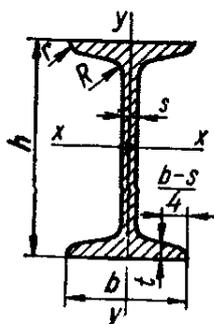
—72). Швеллеры с параллельными гранями полок

- J — момент инерции;
- W — момент сопротивления;
- i — радиус инерции;
- S — статический момент полусечения;
- Z_0 — расстояние от оси $y - y$ до наружной грани стенки

Справочная величина для осей							$Z_0, \text{ см}$
$x - x$				$y - y$			
$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$J_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	
22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
48,8	15,00	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29
89,8	22,50	3,16	13,30	13,90	5,31	1,240	1,38
175,0	34,90	3,99	20,50	22,60	7,37	1,440	1,53
305,0	50,80	4,79	29,70	34,90	9,84	1,620	1,66

Номер швеллера	h	b	s	t	R	r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг
	мм							
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30
14а	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,00	13,30
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20
16а	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30
18а	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40
20а	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,20	19,80
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00
22а	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,80	22,60
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00
24а	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,90	25,80
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30

Таблица 6. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. Сортумент



h — высота балки;
 b — ширина полки;
 s — толщина стенки;
 t — средняя толщина полки;
 R — радиус внутреннего закругления;

Номер балки	h	b	s	t	R	r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг
	мм							
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40
18а	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00

Справочная величина для осей							Z_0 , см
$x - x$				$y - y$			
J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	
493,0	70,40	5,61	40,90	51,50	12,90	1,810	1,82
547,0	78,20	5,68	45,20	65,20	15,70	1,960	2,04
750,0	93,80	6,44	54,30	72,80	16,40	2,000	1,97
827,0	103,00	6,51	59,50	90,50	19,60	2,150	2,19
1090,0	121,00	7,26	70,00	100,00	20,60	2,200	2,14
1200,0	133,00	7,34	76,30	123,00	24,30	2,350	2,36
1530,0	153,00	8,08	88,00	134,00	25,20	2,390	2,30
1680,0	168,00	8,17	96,20	162,00	29,70	2,540	2,53
2120,0	193,00	8,90	111,00	178,00	31,00	2,580	2,47
2340,0	212,00	9,01	121,00	220,00	37,00	2,770	2,75
2910,0	243,00	9,75	139,00	248,00	39,50	2,850	2,72
3200,0	266,00	9,86	152,00	302,00	46,50	3,030	3,01
4180,0	310,00	10,90	178,00	314,00	46,70	2,990	2,78
5830,0	389,00	12,00	224,00	393,00	54,80	3,120	2,83
8010,0	486,00	13,10	281,00	491,00	64,60	3,250	2,90
10 850,0	603,00	14,30	350,00	611,00	76,30	3,380	2,99
15 260,0	763,00	15,80	445,00	760,00	89,90	3,510	3,05

(ГОСТ 8239—72)

- r — радиус закругления полки;
 J — момент инерции;
 W — момент сопротивления;
 S — статический момент полусечения;
 i — радиус инерции

Справочные величины для осей

Справочные величины для осей						
$x - x$				$y - y$		
J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07

Номер балки	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>r</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг
	мм							
20а	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00
22а	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30
24а	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50
27а	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50
30а	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00

Продолжение табл. 6

Справочные величины для осей

$x - x$				$y - y$		
$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
13 380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
19 062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
27 696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
39 727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55 962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
76 806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

**ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ.
МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ.
НАПРЯЖЕНИЯ В СЕЧЕНИИ**

3.1. Классификация внешних сил

Внешними силами, или *нагрузками*, называются силы взаимодействия рассматриваемого элемента конструкции со связанными с ним телами. Если внешние силы являются результатом непосредственного, контактного взаимодействия данного тела с другими телами, то они приложены только к точкам поверхности тела в месте контакта и называются *поверхностными силами*. Поверхностные силы могут быть

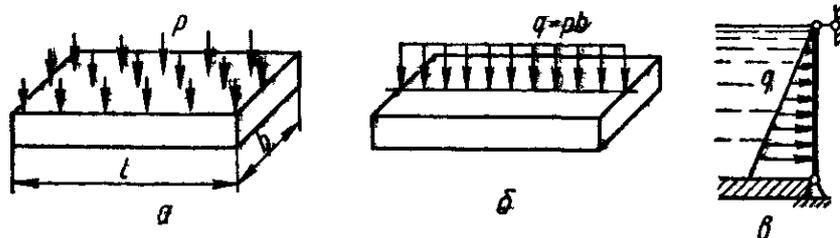


Рис. 26

непрерывно распределены по всей поверхности тела или ее части. Величина нагрузки, приходящаяся на единицу площади, называется *интенсивностью нагрузки*, обозначается обычно буквой p (рис. 26, а) и имеет размерность Н/м^2 , кН/м^2 , МН/м^2 (ГОСТ 8 417—81). Допускается применение обозначения Па (паскаль), кПа, МПа; $1\text{Па} = 1\text{Н/м}^2$.

Поверхностная нагрузка, приведенная к главной плоскости (рис. 26, б), т. е. нагрузка, распределенная по линии, называется *погонной нагрузкой*, обозначается обычно буквой q и имеет размерность Н/м , кН/м , МН/м . Изменение q по длине обычно показывают в виде эпюры (графика) q .

В случае равномерно распределенной нагрузки (рис. 26, а) эпюра q прямоугольная (рис. 26, б). При действии гидростатического давления эпюра q треугольная (рис. 26, в).

Равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади ее эпюры и приложена в ее центре тяжести. Если нагрузка распределена на небольшой части поверхности тела, то ее всегда заменяют равнодействующей, называемой *сосредоточенной силой* P (Н, кН).

Встречаются нагрузки, которые могут быть представлены в виде сосредоточенного момента (пары). Моменты M (Н·м или кН·м) обозначают обычно одним из двух способов (рис. 27, а, б), или в виде вектора, перпендикулярного к плоскости действия пары. В отличие от вектора силы вектор момента изображают в виде двух стрелок или волнистой линией (рис. 27, в, г). Вектор момента обычно принято считать правовинтовым.

Силы, не являющиеся результатом контакта двух тел, а приложенные к каждой точке объема занятого тела (собственный вес, силы инерции), называются *объемными* или *массовыми* силами.

В зависимости от характера приложения сил во времени различают нагрузки *статические* и *динамические*. Нагрузка считается *статической*, если она сравнительно медленно и плавно (хотя бы в течение нескольких секунд) возрастает от нуля до своего конечного значения, а затем остается неизменной. При этом можно пренебречь ускорениями деформируемых масс, а следовательно, и силами инерции.

Динамические нагрузки сопровождаются значительными ускорениями как деформируемого тела, так и взаимодействующих с ним тел. Возникающими при этом силами инерции пренебречь нельзя. Динамические нагрузки делятся на *мгновенно приложенные*, *ударные* и *повторно-переменные*.

Мгновенно приложенная нагрузка возрастает от нуля до максимума в течение долей секунды. Такие нагрузки возникают при воспламенении горючей смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания, при трогании с места железнодорожного состава,

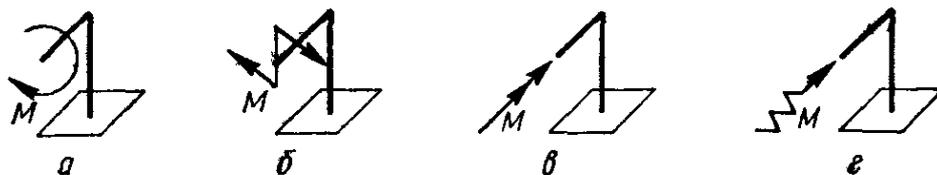


Рис. 27

Ударная нагрузка характерна тем, что в момент ее приложения тело, вызывающее нагрузку, обладает определенной кинетической энергией. Такая нагрузка возникает, например, при забивке свай с помощью копра, в элементах кузнечного молота.

Повторно-переменная нагрузка характерна своей периодичностью. Такие нагрузки испытывают при работе штоки, валы, оси железнодорожных вагонов, колеблющиеся элементы конструкций и др.

3.2. Внутренние силы. Метод сечений. Эпюры внутренних сил

Между соседними частицами любого тела (кристаллами, молекулами, атомами) всегда имеются определенные силы взаимодействия, или *внутренние силы*, которые стремятся сохранить тело как единое целое, противодействуя всему, что может изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать тело.

Внешние силы, наоборот, всегда стремятся вызвать деформацию тела.

Величина внутренних сил, действующих между двумя какими-либо частицами тела, в нагруженном и ненагруженном теле будет различной.

В сопротивлении материалов не принимаются во внимание внутренние силы, действующие в ненагруженном теле, а рассматриваются только те дополнительные внутренние силы, которые появляются при нагружении тела. Эти дополнительные внутренние силы взаимодействия, возникающие в результате нагружения, часто называют *усилиями*.

Для выявления внутренних усилий, возникающих в теле под нагрузкой, в сопротивлении материалов пользуются *методом сечений*.

Смысл этого метода состоит в том, что нагруженное тело (рис. 28, а) мысленно рассекают некоторой плоскостью на две части А и В. Для того чтобы каждая из таких частей находилась в равновесии под

действием приложенных к ней внешних нагрузок, необходимо действие отсеченной части заменить некоторой системой внутренних сил в сечении. Эти силы и явятся силами взаимодействия частей тела A и B . Внутренние силы, действующие в сечении со стороны части A , в соответствии с третьим законом Ньютона, равны по величине и противоположны по направлению внутренним силам, действующим в сечении со стороны части B (рис. 28, б).

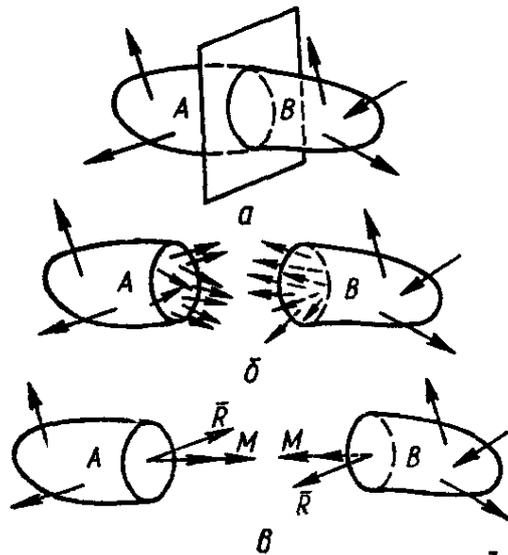


Рис. 28

M_x). Эти величины называются *усилиями* и *моментами* в сечении стержня.

Как видно из рисунка, сила N вызывает продольную деформацию стержня (растяжение или сжатие); силы Q_y и Q_x — сдвиг сторон сечения соответственно в направлении y и x ; момент M_z вызывает кручение стержня; моменты M_y и M_x — изгиб стержня в главных плоскостях (xz и yz). Поэтому для усилий и моментов в сечении приняты следующие

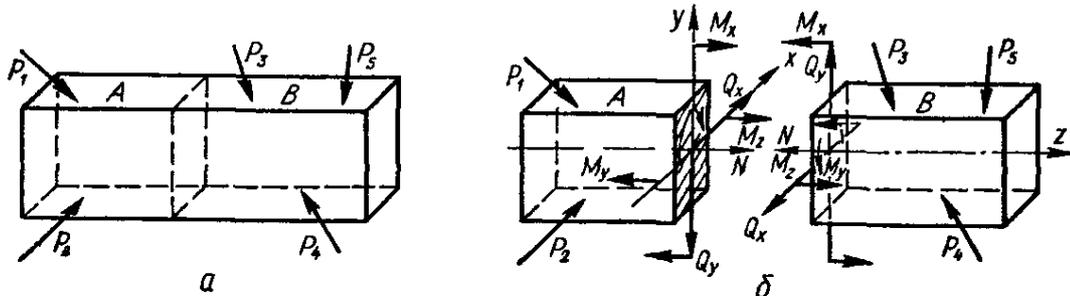


Рис. 29

названия: N — *продольная*, или *осевая* (направленная вдоль оси) *сила*; Q_y и Q_x — *поперечные* (реже *перерезывающие*) *силы*; $M_z = M_{кр}$ — *крутящий момент*; M_y и M_x — *изгибающие моменты*.

Можно дать следующие определения перечисленным компонентам внутренних усилий: *продольная сила* N представляет собой сумму проекций всех внутренних сил, действующих в сечении, на нормаль к сечению (или на ось стержня); *поперечные силы* Q_y и Q_x — это суммы проекций всех внутренних сил в сечении на главные центральные оси сечения y и x соответственно; *крутящий момент* M_z (или $M_{кр}$) — это сумма моментов всех внутренних сил в сечении относитель-

но оси стержня; изгибающие моменты M_y и M_x — это суммы моментов всех внутренних сил в сечении относительно главных центральных осей инерции сечения y и x соответственно.

Для практического вычисления усилий и моментов в сечении следует иметь в виду, что: N численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую) рассеченного стержня, на ось стержня (или на нормаль к сечению); Q_y — то же на ось y ; Q_x — то же на ось x ; $M_{кр}$ численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую) относительно оси стержня; M_y — то же относительно оси y ; M_x — то же относительно оси x .

Таким образом, метод сечений позволяет найти все усилия и моменты в любом сечении стержня при действии любой нагрузки. Для этого необходимо сделать следующее.

1. Найти главные центральные оси поперечного сечения стержня

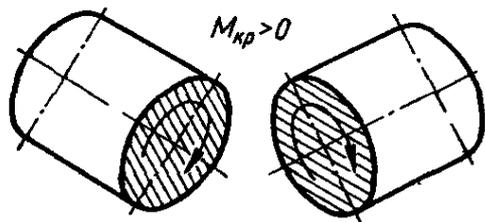


Рис. 30

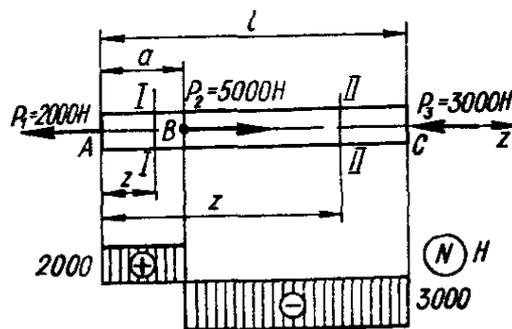


Рис. 31

2. Разделить мысленно стержень в том поперечном сечении, где нужно найти усилия и моменты.

3. Вычислить усилия N , Q_y , Q_x и моменты $M_{кр}$, M_y , M_x как алгебраические суммы проекций и моментов внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую по отношению к сечению) рассеченного стержня, обычно на ту, где проекции и моменты вычисляются проще.

Усилия и моменты в разных сечениях одного и того же стержня в общем случае различны. Графики (диаграммы), показывающие, как изменяются усилия и моменты при переходе от сечения к сечению, называются эпюрами усилий и моментов.

При построении эпюр рекомендуется пользоваться следующими правилами.

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня (или совпадала с ней).

2. Ординаты эпюр, выражающие в выбранном масштабе значение усилия или момента, откладывают от базы эпюры по перпендикуляру.

3. Эпюры принято штриховать линиями, перпендикулярными к базе. В зависимости от расположения базы (горизонтальное или вертикальное) положительные значения усилий или моментов откладывают вверх или слева от базы, отрицательные — вниз или справа.

4. На эпюрах проставляют числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке ставят знак усилия.

При построении эпюр продольных сил и крутящих моментов рекомендуется пользоваться следующими правилами в отношении их знаков.

1. Продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение, и отрицательной, если вызывает сжатие.

2. Крутящий момент $M_{кр}$ считается положительным, если при наблюдении с торца вдоль оси рассматриваемой части он действует по часовой стрелке (рис 30).

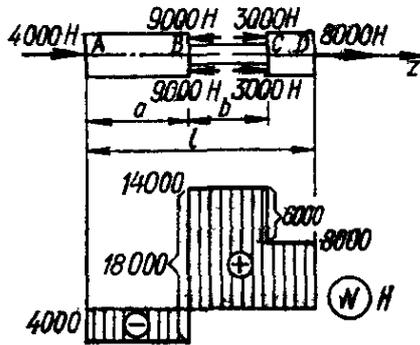


Рис. 32

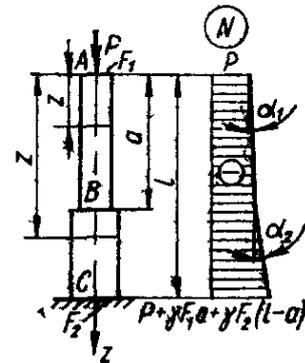


Рис. 33

Примеры построения эпюр продольных сил показаны на рис. 31, 32, 33 ($\alpha_1 = \text{arctg } \gamma F_1$; $\alpha_2 = \text{arctg } \gamma F_2$; γ — объемная масса) Эпюра крутящих моментов для трансмиссионного вала, схема которого приведена на рис. 34, а, показана на рис. 34, б. На рис. 34, в показано направление максимального положительного момента в сечении рассматриваемого вала.

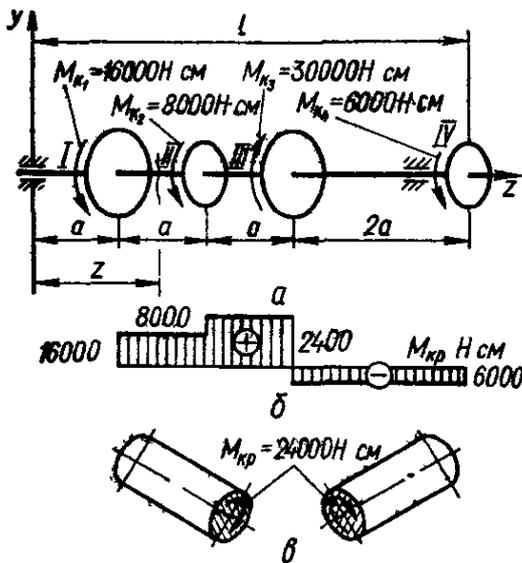


Рис. 34

Прежде чем перейти к построению эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе балок — к разделу сопротивления материалов, имеющему весьма существенное значение для понимания поведения элементов конструкций под нагрузкой, напомним некоторые исходные понятия, связанные с балками.

3.3. Балки и их опоры

Балками называются прямолинейные стержни, работающие на изгиб. *Плоским изгибом* балки называется такой изгиб балки, при котором все заданные силы лежат в одной (силовой) плоскости (рис. 35, а), причем эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки.

При расчете балку принято заменять ее осью (рис. 35, б), все нагрузки должны быть приведены к этой оси, а силовая плоскость будет совпадать с плоскостью чертежа.

Все многообразие существующих опорных устройств балок схематизируется в виде следующих трех основных типов опор.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 36, а), в которой может возникать только одна составляющая реакция R_A , направленная вдоль опорного стержня.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 36, б), в которой могут возникнуть две составляющие реакции — вертикальная R_A и горизонтальная H_A .

Защемление (иначе *жестков защемление* или *заделка*), где могут быть три составляющие — вертикальная R_A и горизонтальная H_A реакции и опорный момент M_A (рис. 36, в).

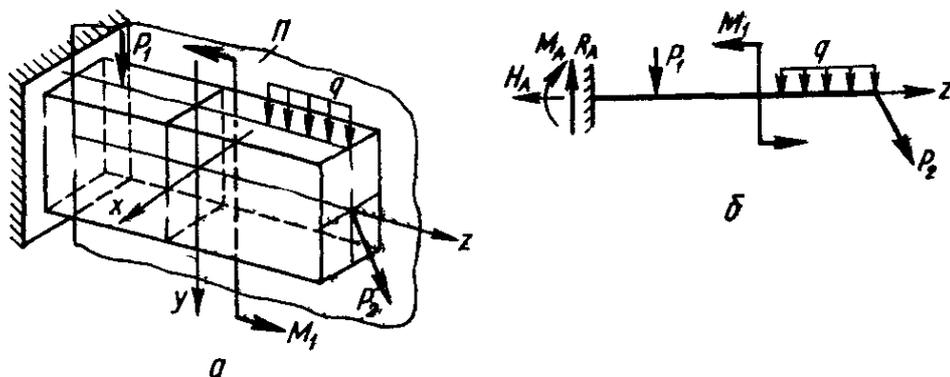


Рис. 35

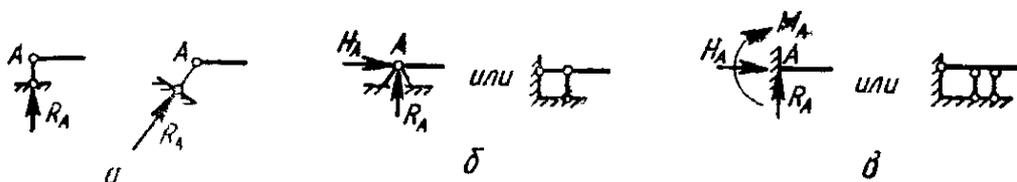


Рис. 36

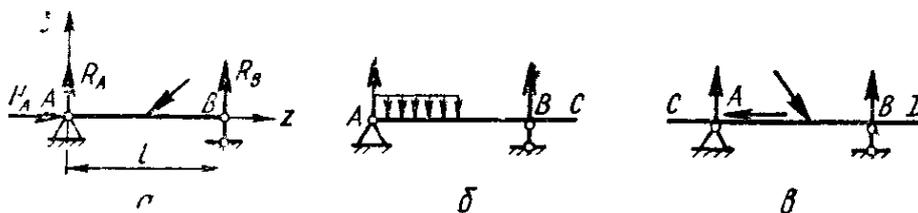


Рис. 37

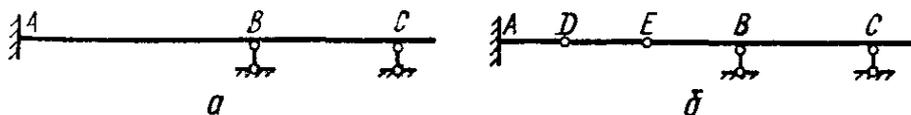


Рис. 38

Все реакции и моменты считаются приложенными в точке A — центре тяжести опорного сечения.

Балка, показанная на рис. 37, а, называется простой или однопролетной, или двухопорной, а расстояние l между опорами — *пролетом*.

Консолью называется балка, защемленная одним концом и не имеющая других опор (рис. 35, б), или часть балки, свешивающаяся за опоры (часть BC на рис. 37, б и части AC и BD на рис. 37, в). Балки, имеющие свешивающиеся части, называются *консольными*.

Балка называется *статически определимой*, если число неизвестных опорных реакций не превышает трех; в противном случае балка

статически неопределима. Балки, изображенные на рис 35 и 37, статически определимы, а балка, изображенная на рис 38, а, называется *неразрезной* и является статически неопределимой, поскольку имеет пять неизвестных опорных реакций. три — в опоре *A* и по одной — в опорах *B* и *C*. Поставив, например, в любых двух сечениях первого пролета балки шарниры (точки *D* и *E* на рис 38, б), получим статически определимую шарнирную балку, ибо каждый такой промежуточный шарнир к трем основным уравнениям статики прибавляет одно дополнительное уравнение, поскольку сумма моментов относительно центра шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю.

3.4. Вычисление реакций

Для того чтобы можно было приступить к построению эпюр внутренних усилий, необходимо знать все внешние нагрузки, включая реакции, которые предварительно должны быть определены.

При определении реакций рекомендуется придерживаться следующей последовательности, которую мы проиллюстрируем на примере простой балки (рис. 37, а).

1. Обозначив опоры буквами *A* и *B*, три неизвестные реакции R_A , R_B и H_A определим из следующих уравнений равновесия:

сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\sum Z = 0,$$

откуда находим H_A :

сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира *A* равна нулю:

$$\sum M_A = 0,$$

откуда находим R_B :

сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира *B* равна нулю:

$$\sum M_B = 0,$$

откуда находим R_A .

2. Для контроля можно использовать условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось *y*:

$$\sum Y = 0$$

или условие равенства нулю суммы моментов относительно какой-либо точки *C*, отличной от *A* и *B*:

$$\sum M_C = 0.$$

3. Если в результате вычисления какая-либо реакция окажется отрицательной, то на рисунке необходимо изменить ее направление на обратное по сравнению с направлением, принятым в начале расчета.

4. Если нагрузки, действующие на балку, перпендикулярны к оси балки, то $H_A = 0$ и уравнением $\sum Z = 0$ не пользуются.

3.5. Усилия и моменты в сечениях балки. Построение эпюр Q и M

При плоском изгибе вся нагрузка расположена в главной плоскости стержня zy (рис. 35, а), поэтому она не дает проекций на ось x и моментов относительно осей z и y . Следовательно, в любом сечении балки

$$Q_x = M_z = M_{кр} = M_y = 0,$$

и отличными от нуля будут три величины — N , Q_y и M_x , которые принято обозначать N , Q и M .

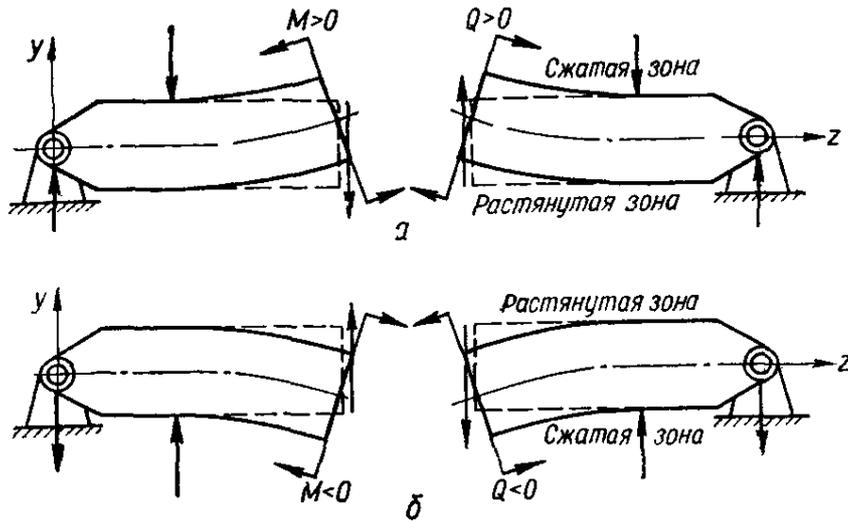


Рис. 39

Эти усилия действуют в сечениях рам и кривых стержней. В балках же при нагрузке, перпендикулярной к оси, продольная сила $N = 0$. Поэтому в балках приходится иметь дело с поперечной силой Q и изгибающим моментом M .

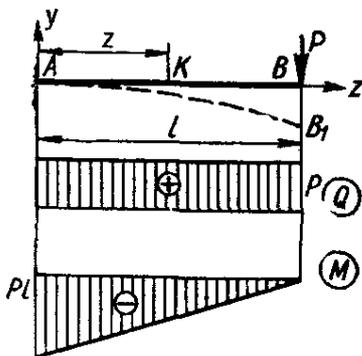


Рис. 40

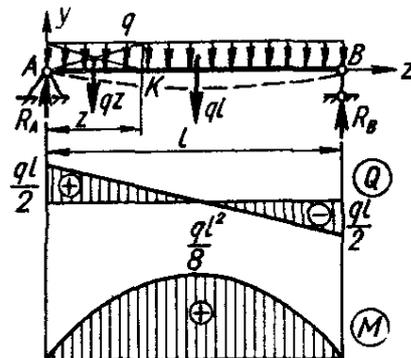


Рис. 41

При построении эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M принимают следующие правила знаков.

П о п е р е ч н а я с и л а Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой стрелке (рис. 39, а).

И з г и б а ю щ и й м о м е н т M в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхних волокнах балки (рис. 39, а).

Очевидно, поперечные силы и моменты, показанные на рис. 39, б, имеют отрицательные знаки. Эпюры поперечных сил и изгибающих

моментов для балок, нагруженных по различным типичным схемам, приведены на рис. 40—44. Штриховой линией условно показано положение балок в деформированном состоянии.

Как видно, с учетом правил построения эпюр и указанного правила знаков эпюры изгибающих моментов строят со стороны сжатых волокон балки. Иногда (при расчетах элементов строительных конструкций)

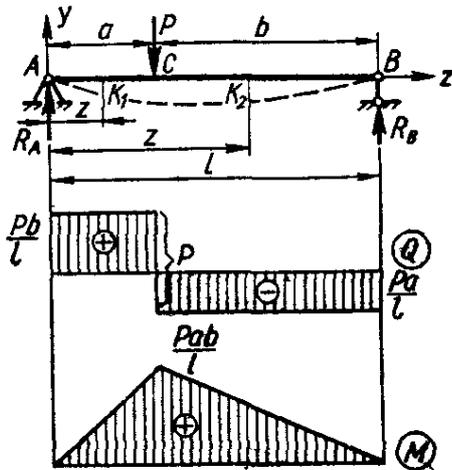


Рис. 42

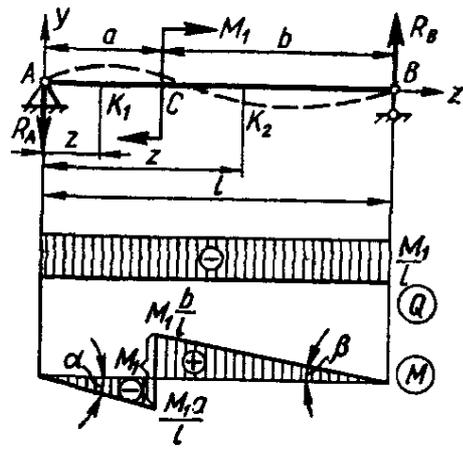


Рис. 43

эпюры изгибающих моментов строят со стороны растянутых волокон.

Для консоли, нагруженной сосредоточенной силой P на свободном конце (рис. 40), поперечная сила и изгибающий момент в произвольном сечении с абсциссой z определены соответственно по формулам

$$Q(z) = P; \quad M(z) = -PKB = -P(l-z).$$

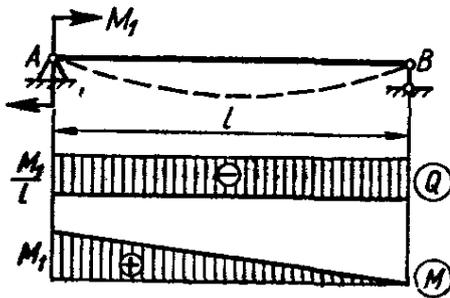


Рис. 44

Для двухопорной балки, нагруженной равномерно распределенной по длине нагрузкой интенсивностью q (рис. 41), реакции опор $R_A = R_B = ql/2$, поперечная сила и изгибающий момент определены по формулам

$$Q(z) = R_A - qAK = q\left(\frac{l}{2} - z\right);$$

$$M(z) = R_A(z) - qz \frac{z}{2} = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right).$$

Для двухопорной балки, нагруженной в пролете сосредоточенной силой P (рис. 42), реакции опор $R_A = \frac{Pb}{l}$; $R_B = \frac{Pa}{l}$, поперечная сила и изгибающий момент определены на участке AC ($0 < z < a$) по формулам

$$Q(z) = R_A = \frac{Pb}{l}; \quad M(z) = R_A AK_1 = \frac{Pb}{l} z$$

и на участке CB ($a < z < l$) по формулам

$$Q(z) = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M(z) = R_B K_2 b = \frac{Pa}{l} (l-z).$$

Для двухопорной балки, нагруженной в пролете сосредоточенным моментом M_1 (рис. 43), реакции опор $R_A = R_B = M_1/l$, поперечная сила и изгибающий момент определены на участке AC ($0 \leq z \leq a$) по формулам

$$Q(z) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(z) = -R_A AK_1 = -\frac{M_1}{l} z$$

и на участке CB ($a \leq z \leq l$) по формулам

$$Q(z) = -R_B = -\frac{M_1}{l}; \quad M(z) = R_B K_2 B = \frac{M_1}{l} (l - z).$$

В частном случае, когда момент приложен в опорном сечении, $Q(z)$ и $M(z)$ определяют по формулам для одного из рассмотренных участков. Например, если момент приложен в сечении A (рис. 44), то $Q(z)$ и $M(z)$ определяют по формулам для второго участка при $a = 0$.

3.6. Дифференциальные зависимости при изгибе балок. Некоторые особенности эпюр Q и M

Рассмотрим балку с произвольной нагрузкой (рис. 45, а). Между интенсивностью q распределенной нагрузки, поперечной силой в сечении Q и изгибающим моментом M , действующими в некотором сечении, существуют следующие дифференциальные зависимости, которые легко могут быть выведены из условий равновесия выделенного из балки элемента длиной dz (рис. 45, б).

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad (3.1)$$

$$\frac{dM}{dz} = Q; \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q. \quad (3.3)$$

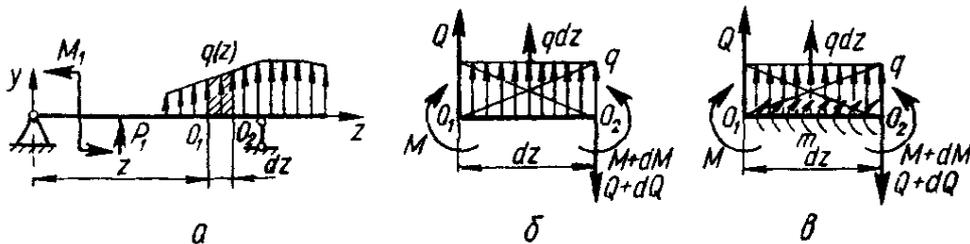


Рис. 45

В тех случаях, когда на рассматриваемом участке действует равномерно распределенный момент интенсивностью m (Н · м/м) (рис. 45, в), формула (3.2) принимает вид

$$\frac{dM}{dz} = Q + m. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.1) — (3.4) называются *дифференциальными зависимостями при изгибе*. Они позволяют установить некоторые особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

1. На тех участках, где нет распределенной нагрузки, эюора Q ограничена прямыми, параллельными базе, а эюора M , в общем случае, — наклонными прямыми (рис. 46).

2. На тех участках, где к балке приложена равномерно распределенная нагрузка, эюора Q ограничена наклонными прямыми, а эюора

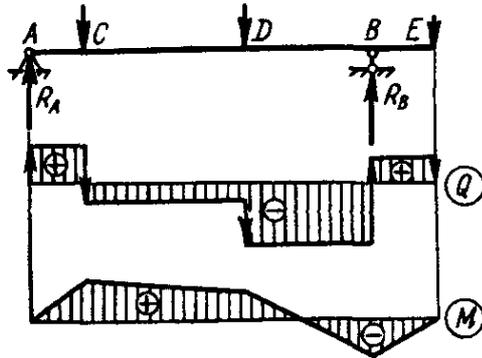


Рис. 46

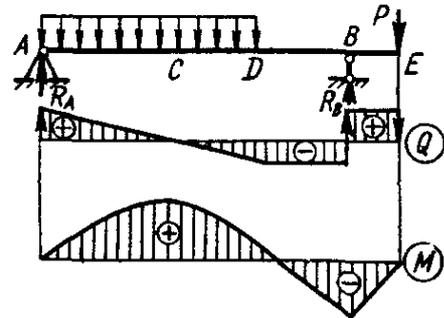


Рис. 47

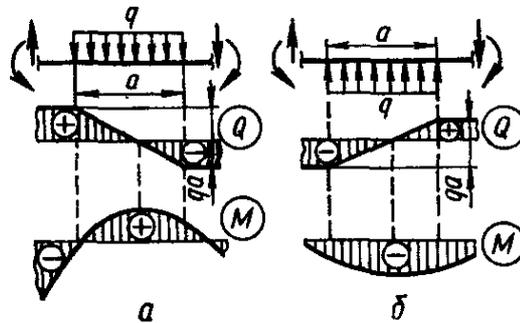


Рис. 48

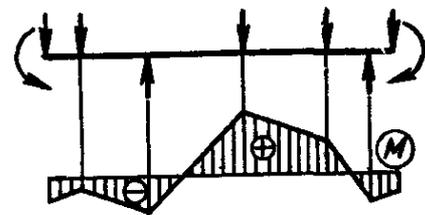


Рис. 49

M — квадратичными параболоми (рис. 47). При построении эюоры M на сжатых волокнах выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки q (рис. 48, а, б).

3. В тех сечениях, где $Q = 0$, касательная к эюоре M параллельна оси эюоры (рис. 47, 48).

4. На участках, где $Q > 0$, M возрастает, т. е. слева направо положительные ординаты эюоры M увеличиваются, отрицательные — уменьшаются (участки AC и BE на рис. 46 и 47); на тех же участках, где $Q < 0$, M убывает (участки CD и DB на рис. 46 и 47).

5. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

а) на эюоре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил (на рис. 46 и 47 эти скачки отмечены жирными линиями со стрелками);

б) на эюоре M будут переломы (рис. 49), причем острие перелома направлено против действия силы.

6. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты, на эюорах M будут скачки на величину этих моментов, на эюорах Q никаких изменений не будет.

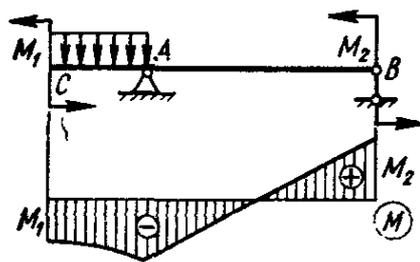


Рис. 50

7. Если на конце консоли или в концевой опоре приложен сосредоточенный момент, то в этом сечении изгибающий момент равен внешнему моменту (сечения C и B на рис. 50).

8. Эпюра Q представляет собой диаграмму производной от эпюры M . Значит, ординаты Q пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре M (на рис. 43 $\alpha = \beta = \arctg M_1/l$).

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок с различным закреплением концов приведены в табл. 7.

3.7. Построение эпюр для статически определимых рам

Рамами называются системы, состоящие из стержней, соединенных жесткими узлами. Вертикальные стержни рамы принято называть стойками, горизонтальные — ригелями. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных в узле стержней, т. е. в узловой точке углы между их осями при деформации остаются неизменными.

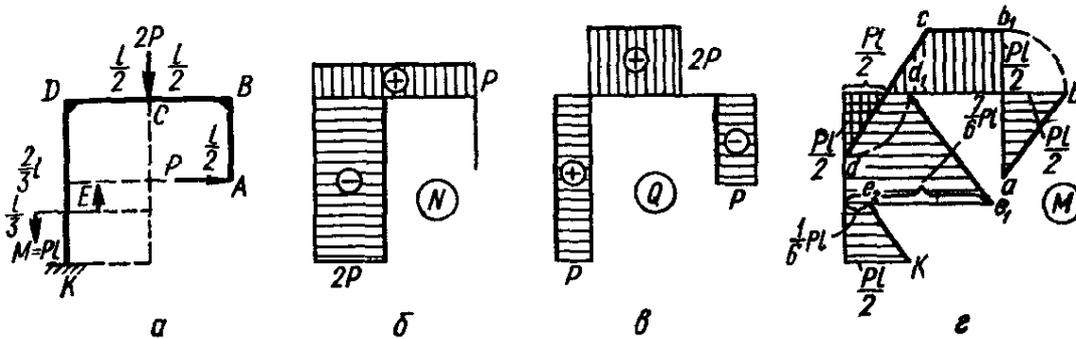


Рис. 51

Ось рамы представляет собой ломаную линию, однако каждый участок ее можно рассматривать как балку. Поэтому построение эпюр для рамы сводится к построению эпюр для каждого входящего в нее стержня как для балки. Однако в отличие от обыкновенных балок в сечениях стержней рамы, кроме изгибающих моментов M и поперечных сил Q , обычно действуют еще и продольные силы N . Поэтому для рам необходимо строить эпюры M , Q и N .

Для N и Q сохраняются ранее принятые правила знаков: $N > 0$, если продольная сила вызывает растяжение; $Q > 0$, если вектор силы вращает часть рассеченной рамы по часовой стрелке.

Для изгибающих моментов специальных правил знаков не устанавливают, а при составлении выражений для M принимают по собственному усмотрению какой-либо момент положительным.

При построении эпюр положительные ординаты N и Q откладывают с внешней стороны, а отрицательные — внутрь контура рамы. Эпюры M для рам условимся строить на сжатых волокнах.

При расчетах рам строительных конструкций эпюры изгибающих моментов строят со стороны растянутых волокон. Построению эпюр должно предшествовать определение неизвестных реакций.

Пример построения эпюр N , Q и M для рамы-консоли, нагруженной по схеме, приведенной на рис. 51, а, показан на рис. 51, б, в, г.

Значения внутренних усилий N , Q и M определены для соответствующих участков (рис. 51, а) по формулам, приведенным ниже.

Участок AB $\left(0 < z < \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = 0; \quad Q(z) = -P; \quad M(z) = Pz.$$

Участок BC $\left(0 < z < \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = P; \quad Q(z) = 0; \quad M(z) = P \frac{l}{2}.$$

Участок CD $\left(0 < z < \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = P; \quad Q(z) = 2P; \quad M(z) = P \frac{l}{2} - 2Pz = P \left(\frac{l}{2} - 2z\right).$$

Участок DE $\left(0 < z < \frac{2}{3}l\right)$

$$N(z) = -2P; \quad Q(z) = P; \quad M(z) = 2P \frac{l}{2} - P \left(\frac{l}{2} - z\right) = P \left(\frac{l}{2} + z\right).$$

Участок EK $\left(\frac{2}{3}l < z < l\right)$

$$N(z) = -2P; \quad Q(z) = P; \quad M(z) = P \left(\frac{l}{2} + z\right) - M = P \left(z - \frac{l}{2}\right).$$

3.8. Построение эпюр для кривых стержней

В поперечных сечениях плоского кривого бруса могут действовать, как и в рамах, три силовых фактора: N , Q и M . В случае, когда ось кривого стержня очерчена по дуге окружности, положение любого сечения удобно определять с помощью полярной системы координат и тогда продольная и поперечная силы и изгибающий момент будут функциями угла φ — $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$.

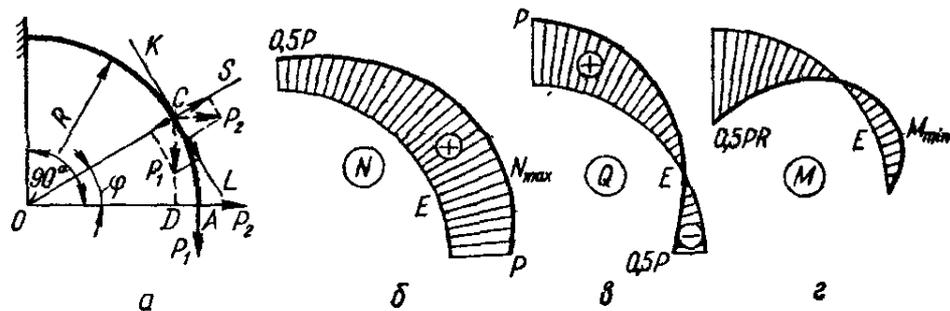


Рис. 52

Для N и Q остаются ранее принятые правила знаков; эпюры M , как и в случае рам, строят со стороны сжатых волокон.

Пример построения эпюр $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ для кривого бруса-консоли, нагруженного по схеме, приведенной на рис. 52, а, при $P_1 = 2P_2 = P$, когда

$$N(\varphi) = (\cos \varphi + 0,5 \sin \varphi) P;$$

$$Q(\varphi) = (\sin \varphi - 0,5 \cos \varphi) P;$$

$$M(\varphi) = (1 - \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi) PR,$$

показан на рис. 52, б, в, г.

Если на кривой стержень действует равномерно распределенная нагрузка, при вычислении N , Q и M полезно использовать следующую теорему: равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, приложенной к дуге любого очертания, равна произведению интенсивности нагрузки на длину хорды, стягивающей эту дугу, перпендикулярна этой хорде и проходит через ее середину.

Эпюры $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ для кривого стержня, нагруженного по схеме, приведенной на рис. 53, а, показаны на рис. 53, б, в, г.

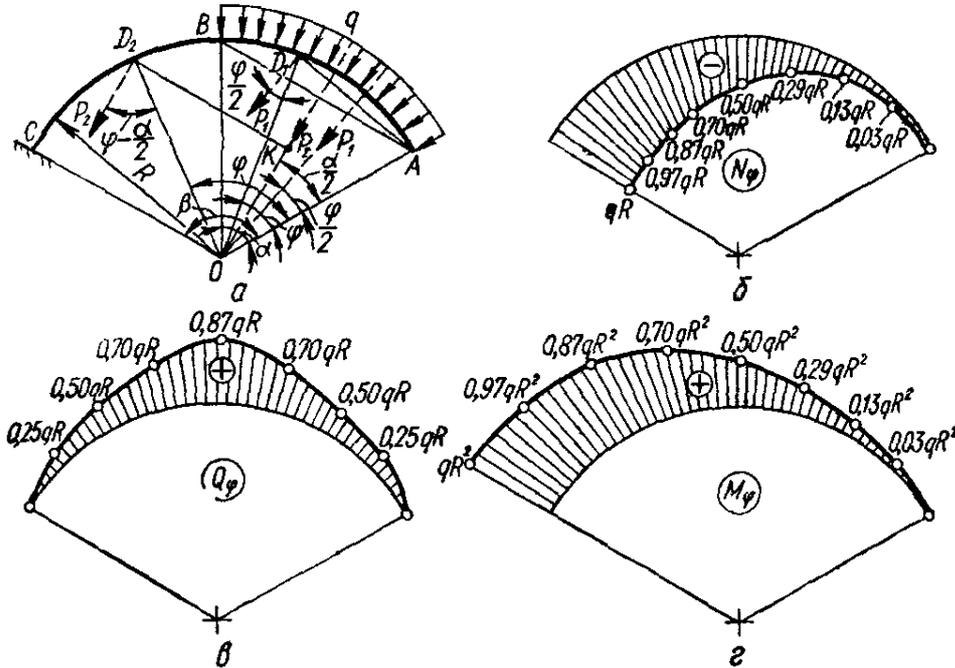


Рис. 53

На участке $0 < \varphi < \alpha$ эпюры $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ определялись соответственно по формулам

$$N(\varphi) = -P_1 \sin \frac{\varphi}{2} = -2qR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -qR(1 - \cos \varphi);$$

$$Q(\varphi) = P_1 \cos \frac{\varphi}{2} = 2qR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = qR \sin \varphi;$$

$$M(\varphi) = P_1 \frac{AD_1}{2} = 2qR^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = qR^2(1 - \cos \varphi),$$

где равнодействующая распределенной нагрузки q на дуге, соответствующей углу φ , $P_1 = 2qR \sin \frac{\varphi}{2}$.

На участке $\alpha < \varphi < \beta$

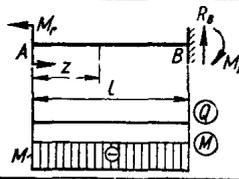
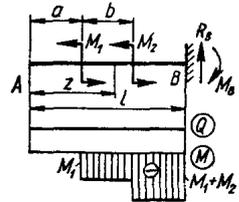
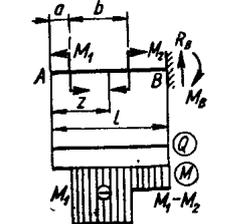
$$N(\varphi) = -P_2 \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = -2qR \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$Q(\varphi) = P_2 \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$M(\varphi) = P_2 KD_2 = P_2 R \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right),$$

где равнодействующая распределенной нагрузки q на дуге AB , соответствующей углу α , $P_2 = 2qR \sin \frac{\alpha}{2}$.

Таблица 7. Опорные реакции, поперечные силы и изгибающие моменты в статически определимых балках

Схема нагружения балки, опоры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_B = 0$ $M_B = M_0$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < l$ $M = -M_0$	—
	$R_B = 0$ $M_B = M_1 + M_2$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < a$ $M = 0$ $a < z < a + b$ $M = -M_1$ $a + b < z < l$ $M = -(M_1 + M_2)$	$a + b < z_0 < l$ $M_{\max} = -(M_1 + M_2)$
	$R_B = 0$ $M_B = M_1 - M_2$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < a$ $M = 0$ $a < z < a + b$ $M = -M_1$ $a + b < z < l$ $M = -(M_1 - M_2)$	I $M_1 > M_2$ $a < z_0 < b$ $M_{\max} = -M_1$ II $M_2 > 2M_1$ $a + b < z_0 < l$ $M_{\max} = M_2 - M_1$

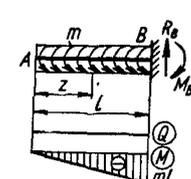
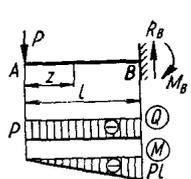
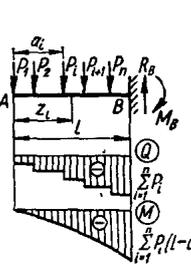
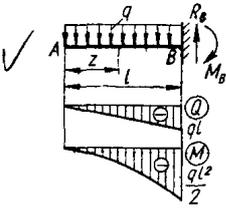
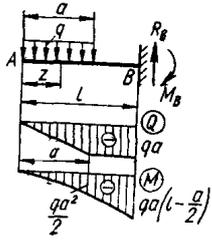
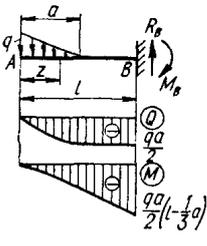
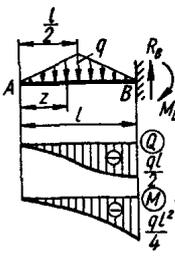
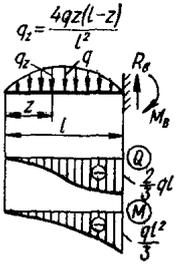
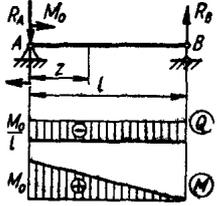
	$R_B = 0$ $M_B = ml$	$0 \leq z \leq l$ $Q = 0$	$0 \leq z \leq l$ $M = -mz$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -ml$
	$R_B = P$ $M_B = Pl$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -P$	$0 \leq z \leq l$ $M = -Pz$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -Pl$
	$R_B = \sum_{i=1}^n P_i$ $M_B = \sum_{i=1}^n P_i b_i$ $b_i = l - a_i$	$a_i \leq z \leq a_{i+1}$ $Q = -\sum_{j=1}^i P_j$	$a_i \leq z \leq a_{i+1}$ $M = -\sum_{j=1}^i P_j (z - a_j)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\sum_{i=1}^n P_i b_i$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_B = ql$ $M_B = \frac{ql^2}{2}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -qz$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{qz^2}{2}$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{2}$
	$R_B = qa$ $M_B = qa \left(l - \frac{a}{2} \right)$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -qz$ $a \leq z \leq l$ $Q = -qa$	$0 \leq z \leq a$ $M = -\frac{qz^2}{2}$ $a \leq z \leq l$ $M = -qa \left(z - \frac{a}{2} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -qa \left(l - \frac{a}{2} \right)$

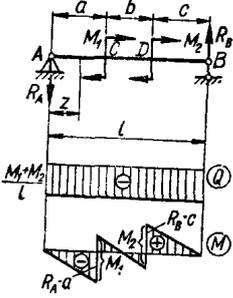
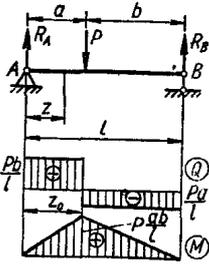
	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{6}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{qz^2}{2l}$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{qz^3}{6l}$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{6}$
	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{3}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -ql \times \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l^2} \right)$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{ql^2}{2} \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{l^3} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{3}$
	$R_B = \frac{qa}{2}$ $M_B = \frac{qa}{2} \left(l - \frac{2}{3} a \right)$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -\frac{qz^2}{2a}$ $a \leq z \leq l$ $Q = -\frac{qa}{2}$	$0 \leq z \leq a$ $M = -\frac{qz^3}{6a}$ $a \leq z \leq l$ $M = -\frac{qa}{2} \left(z - \frac{2}{3} a \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{qa}{2} \left(l - \frac{2}{3} a \right)$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_B = \frac{qa}{2}$ $M_B = \frac{qa}{2} \left(l - \frac{a}{3} \right)$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -\frac{qa}{2} \left(2 \frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2} \right)$ $a < z \leq l$ $Q = -\frac{qa}{2}$	$0 \leq z \leq a$ $M = -\frac{qa^2}{2} \left(\frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{a^3} \right)$ $a < z \leq l$ $M = -\frac{qa}{2} \left(z - \frac{a}{3} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{qa}{2} \left(l - \frac{a}{3} \right)$
	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{4}$	$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ $Q = -\frac{qz^2}{2}$ $\frac{l}{2} < z \leq l$ $Q = -ql \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$	$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ $M = -\frac{qz^3}{3l}$ $\frac{l}{2} < z \leq l$ $M = -\frac{ql^2}{4} \left[\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{3} \right) + 2 \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^3 \right]$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{4}$

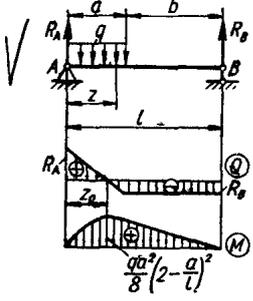
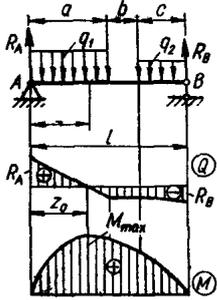
	$R_B = \frac{q_1 + q_2}{2} l$ $M_B = (2q_1 + q_2) \times \frac{l^2}{6}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -q_1 z - \frac{q_2 - q_1}{2l} z^2$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{q_1 z^2}{2} - \frac{q_2 - q_1}{6l} z^3$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -(2q_1 + q_2) \times \frac{l^2}{6}$
	$R_B = \frac{ql}{3}$ $M_B = \frac{ql^2}{12}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{qz^3}{3l^2}$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{qz^4}{12l^2}$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{12}$
	$R_B = \frac{2}{3} ql$ $M_B = \frac{ql^2}{4}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -ql \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{3} \right) \times \frac{z^3}{l^3}$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{ql^2}{3} \left(\frac{z^3}{l^3} - \frac{z^4}{4l^4} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{4}$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_B = \frac{2}{3} ql$ $M_B = \frac{ql^2}{3}$	$0 < z < l$ $Q = -2ql \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{z^3}{l^3} \right)$	$0 < z < l$ $M = -\frac{ql^2}{3} \left(2 \frac{z^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{3}$
	$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $M = \frac{M_0}{l} (l - z)$	$z_0 = 0$ $M_{\max} = M_0$

	$R_A = R_B = \frac{M_1 - M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 - M_2}{l}$	$0 < z < l$ $M = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} z$	I $M_1 > M_2$ $z_0 = 0, M_{\max} = M_1$ II $M_1 < M_2$ $z_0 = l, M_{\max} = M_2$
	$R_A = R_B = \frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $M = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} z$	I $M_1 > M_2$ $z_0 = 0, M_{\max} = M_1$ II $M_1 < M_2$ $z_0 = l, M_{\max} = M_2$
	$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_0}{l}$	$0 < z < a$ $M = -\frac{M_0}{l} z$ $a < z < l$ $M = \frac{M_0}{l} (l - z)$	I $a < \frac{l}{2}$ $z_0 = a, M_{\max} = M_0 \times \frac{l - a}{l}$ II $a > \frac{l}{2}$ $z_0 = a, M_{\max} = -M_0 \times \frac{a}{l}$

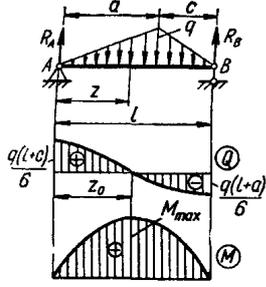
Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_A = R_B = \frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < a$ $M = -\frac{M_1 + M_2}{l} z$ $a < z < a + b$ $M = -\frac{M_1 + M_2}{l} z + M_1$ $a + b < z < l$ $M = \frac{M_1 + M_2}{l} (l - z)$	M_{\max} — наибольшее абсолютное значение момента в сечениях C и D
	$R_A = P \frac{b}{l}$ $R_B = P \frac{a}{l}$	$0 < z < a$ $Q = P \frac{b}{l}$ $a < z < l$ $Q = -P \frac{a}{l}$	$0 < z < a$ $M = P \frac{bz}{l}$ $a < z < l$ $M = P \frac{a}{l} (l - z)$	$z_0 = a$ $M_{\max} = P \frac{ab}{l}$

	$R_A = R_B = P$	$0 \leq z \leq a$ $Q = P$ $a < z \leq l - a$ $Q = 0$ $l - a < z \leq l$ $Q = -P$	$0 \leq z \leq a$ $M = Pz$ $a < z \leq l - a$ $M = Pa$ $l - a < z \leq l$ $M = P(l - z)$	$a \leq z_0 \leq l - a$ $M_{\max} = Pa$
	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = ql \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{l} \right)$	$0 \leq z \leq l$ $M = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right)$	$z_0 = \frac{l}{2}$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$
	$R_A = \frac{qb(2c+b)}{2l}$ $R_B = \frac{qb(2a+b)}{2l}$	$0 \leq z \leq a$ $Q = \frac{qb(2c+b)}{2l}$ $a < z \leq a+b$ $Q = qb \left(\frac{2c+b}{2l} - \frac{z-a}{b} \right)$ $a+b < z \leq l$ $Q = -\frac{qb(2a+b)}{2l}$	$0 \leq z \leq a$ $M = qb \frac{2c+b}{2l} z$ $a < z \leq a+b$ $M = \frac{qb^2}{2} \left[\frac{2c+b}{l} \frac{z}{b} - \frac{(z-a)^2}{b^2} \right]$ $a+b < z \leq l$ $M = qb \frac{2a+b}{2l} (l-z)$	$z_0 = a + \frac{b(2c+b)}{2l}$ $M_{\max} = qb \frac{2c+b}{2l} \times \left[a + \frac{b(2c+b)}{4l} \right]$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_A = \frac{qa}{l} \left(\frac{a}{2} + b \right)$ $R_B = \frac{qa^2}{2l}$	$0 \leq z \leq a$ $Q = qa \left(\frac{a}{2l} + \frac{b}{l} - \frac{z}{a} \right)$ $a \leq z \leq l$ $Q = -\frac{qa^2}{2l}$	$0 \leq z \leq a$ $M = qa^2 \left[\left(\frac{a}{2l} + \frac{b}{l} \right) \times \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} \right]$ $a \leq z \leq l$ $M = \frac{qa^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$	$z_0 = \frac{a}{2} \left(2 - \frac{a}{l} \right) =$ $= \frac{a}{l} \left(\frac{a}{2} + b \right)$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{l} \right)^2$
	$R_A = q_1 a - R$ $R_B = q_2 c + R$ $R = \frac{q_1 a^2 - q_2 c^2}{l}$	$0 \leq z \leq a$ $Q = q_1 (a - z) - R$ $a \leq z \leq a + b$ $Q = -R$ $a + b \leq z \leq l$ $Q = q_2 (a + b - z) - R$	$0 \leq z \leq a$ $M = q_1 a^2 \left(\frac{z}{a} - \frac{R}{q_1 a} \times \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} \right)$ $a \leq z \leq a + b$ $M = q_1 \frac{a^2}{2} - Rz$	<p>I $R > 0$</p> $z_0 = a - \frac{R}{q_1}$ $M_{\max} = \frac{q_1}{2} \left(a - \frac{R}{q_1} \right)^2$ <p>II $R < 0$</p> $z_0 = c + \frac{R}{q_2}$

			$a + b \leq z \leq l$ $M = q_2 c (l - z) \times$ $\times \left(1 + \frac{R}{q_2 c} - \frac{l - z}{2c} \right)$	$M_{\max} = \frac{q_2}{2} \left(c + \frac{R}{q_2} \right)^2$
	$R_A = \frac{ql}{6}$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$Q \leq z \leq l$ $Q = \frac{ql}{6} \left(1 - 3 \frac{z^2}{l^2} \right)$	$0 \leq z \leq l$ $M = \frac{ql^2}{6} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$	$z_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,5774l$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} =$ $= 0,0642ql^2$
	$R_A = \frac{2q_1 + q_2}{6} l$ $R_B = \frac{q_1 + 2q_2}{6} l$	$0 \leq z \leq l$ $Q = R_A - q_1 z +$ $+ \frac{q_1 - q_2}{2l} z^2$	$0 \leq z \leq l$ $M = R_A z - \frac{q_1 z^2}{2} +$ $+ \frac{q_1 - q_2}{6l} z^3$	$z_0 = \frac{1 - R}{1 - k} l$ $M_{\max} = \frac{q_1 l^2}{6} \times$ $\times \frac{2R^2 - k(1 + k)}{(1 - k)^2}$ $k = \frac{q_2}{q_1}$ $R = \sqrt{\frac{1 + k + k^2}{3}}$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_A = \frac{qc^2}{6l}$ $R_B = \frac{qc}{6} \left(3 - \frac{c}{l} \right)$	$0 \leq z \leq a$ $Q = \frac{qc^2}{6l}$ $a \leq z < l$ $Q = \frac{qc}{6} \left[\frac{c}{l} - 3 \times \frac{(z-a)^2}{c^2} \right]$	$0 \leq z < a$ $M = \frac{qc^2}{6l} z$ $a \leq z < l$ $M = \frac{qc^2}{6} \left[\frac{z}{l} - \frac{(z-a)^3}{c^3} \right]$	$z_0 = a + c \sqrt{\frac{c}{3l}}$ $M_{\max} = \frac{qc^2}{6l} \times \left(a + \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{c}{3l}} \right)$
	$R_A = \frac{qa}{6} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right)$ $R_B = \frac{qa^2}{3l}$	$0 \leq z < a$ $Q = \frac{qa}{6} \left(3 - 2 \frac{a}{l} - 3 \frac{z^2}{a^2} \right)$ $a \leq z < l$ $Q = -\frac{qa^2}{3l}$	$0 \leq z < a$ $M = \frac{qa^2}{6} \left[\left(3 - 2 \frac{a}{l} \right) \times \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} \right]$ $a \leq z < l$ $M = \frac{qa^2}{3} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$	$z_0 = a \sqrt{1 - \frac{2a}{3l}}$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{3} \times \left(1 - \frac{2a}{3l} \right)^{3/2}$



$$R_A = \frac{q(l+c)}{6}$$

$$R_B = \frac{q(l+a)}{6}$$

$$0 < z < a$$

$$Q = \frac{qa}{6} \left(\frac{l+c}{a} - 3 \frac{z^2}{a^2} \right)$$

$$a < z < l$$

$$Q = -\frac{qc}{6} \left[\frac{l+a}{c} - 3 \frac{(l-z)^2}{c^2} \right]$$

$$0 < z < a$$

$$M = \frac{qaz}{6} \left(\frac{l+c}{a} - \frac{z^2}{a^2} \right)$$

$$a < z < l$$

$$M = \frac{qc(l-z)}{6} \left[\frac{l+a}{c} - \frac{(l-z)^2}{c^2} \right]$$

I $a > c$

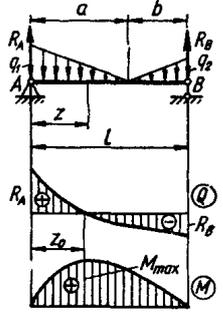
$$z_0 = \sqrt{\frac{a(l-c)}{3}}$$

$$M_{max} = \frac{q(l+c)}{9} \times \sqrt{\frac{a(l-c)}{3}}$$

II $a < c$

$$z_0 = l - \sqrt{\frac{c(l-a)}{3}}$$

$$M_{max} = \frac{q(l+a)}{9} \times \sqrt{\frac{c(l-a)}{3}}$$



$$R_A = \frac{q_1 a}{2} - R$$

$$R_B = \frac{q_2 b}{2} + R$$

$$R = \frac{q_1 a^2 - q_2 b^2}{6l}$$

$$0 < z < a$$

$$Q = R_A - \frac{q_1 z}{2} \left(2 - \frac{z}{a} \right)$$

$$a < z < l$$

$$Q = -R_B + \frac{q_2(l-z)}{2} \times \left(2 - \frac{l-z}{b} \right)$$

$$0 < z < a$$

$$M = R_A \cdot z - \frac{q_1 z^2}{6} \times \left(3 - \frac{z}{a} \right)$$

$$a < z < l$$

$$M = R_B(l-z) - \frac{q_2(l-z)^2}{6} \times \left(3 - \frac{l-z}{b} \right)$$

I $R > 0$

$$z_0 = a - \sqrt{\frac{2R a}{q_1}}$$

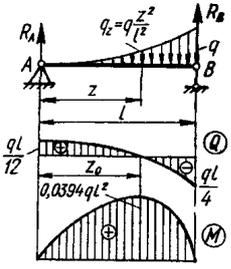
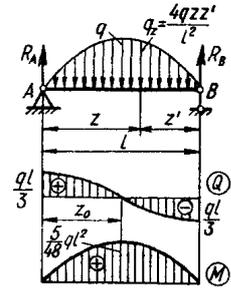
$$M_{max} = M^* + \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{2R a}{q_1}}$$

II $R < 0$

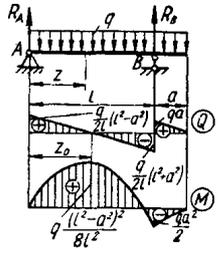
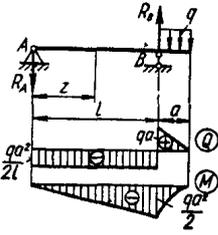
$$z_0 = a + \sqrt{-\frac{2R b}{q_2}}$$

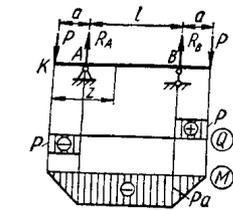
$$M_{max} = M^* - \frac{2}{3} R \sqrt{-\frac{2R b}{q_2}}$$

$$M^* = \frac{q_1 a^2}{6} - R a = \frac{q_2 b^2}{6} + R b$$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координаты опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_A = \frac{ql}{12}$ $R_B = \frac{ql}{4}$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{12} \left(1 - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{12} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^4}{l^4} \right)$	$z_0 = 0,63l$ $M_{\max} = 0,0394ql^2$
	$R_A = \frac{ql}{3}$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{3} \left(1 - 6 \times \right.$ $\left. \times \frac{z^2}{l^2} + 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{3} \left(\frac{z}{l} - 2 \times \right.$ $\left. \times \frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right)$	$z_0 = \frac{l}{2}$ $M_{\max} = \frac{5}{48} ql^2$

	$R_A = \frac{ql}{2} - \frac{\Delta M}{l}$ $R_B = \frac{ql}{2} + \frac{\Delta M}{l}$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{l} \right) - \frac{\Delta M}{l}$	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - \Delta M \frac{z}{l} - M_1$	$z_0 = \frac{l}{2} - \frac{\Delta M}{ql}$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{(\Delta M)^2}{2ql} - \frac{M_2 + M_1}{2}$
	$R_A = R_B = \frac{M}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M}{l}$ $l < z < l + a$ $Q = 0$	$0 < z < l$ $M = -M \frac{z}{l}$ $l < z < l + a$ $M = -M$	$l < z_0 < l + a$ $M_{\max} = -M$
	$R_A = P \frac{a}{l}$ $R_B = P \left(1 + \frac{a}{l} \right)$	$0 < z < l$ $Q = -P \frac{a}{l}$ $l < z < l + a$ $Q = P$	$0 < z < l$ $M = -P \frac{a}{l} z$ $l < z < l + a$ $M = -P(l + a - z)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -Pa$

Схема нагруженной балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_A = q \frac{l^2 - a^2}{2l}$ $R_B = q \frac{l^2 + a^2}{2l} + qa$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{2} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} - 2 \frac{z}{l} \right)$ $l < z < l + a$ $Q = q(l + a - z)$	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right]$ $l < z < l + a$ $M = -\frac{1}{2} q(l + a - z)^2$	<p>I $l < a(1 + \sqrt{2})$ $z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{2}$</p> <p>II $l > a(1 + \sqrt{2})$ $z_0 = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$ $M_{\max} = \frac{q(l^2 - a^2)^2}{8l^2}$</p>
	$R_A = \frac{qa^2}{2l}$ $R_B = \frac{qa^2}{2l} \times \left(1 + 2 \frac{l}{a} \right)$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{qa^2}{2l}$ $l < z < l + a$ $Q = q(l + a - z)$	$0 < z < l$ $M = -\frac{qa^2}{2} \frac{z}{l}$ $l < z < l + a$ $M = -\frac{q(l + a - z)^2}{2}$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{qa^2}{2}$

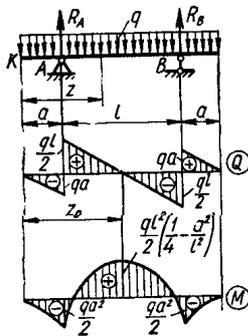


$$R_A = R_B = P$$

$$\begin{aligned} 0 < z < a \\ Q &= -P \\ a < z < a + l \\ Q &= 0 \\ a + l < z < l + 2a \\ Q &= P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < z < a \\ M &= -Pz \\ a < z < a + l \\ M &= -Pa \\ a + l < z < l + 2a \\ M &= -P(l + 2a - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a < z_0 < l + a \\ M_{\max} &= -Pa \end{aligned}$$



$$R_A = R_B = q \left(\frac{l}{2} + a \right)$$

$$\begin{aligned} 0 < z < a \\ Q &= -qz \\ a < z < a + l \\ Q &= \frac{ql}{2} \left(1 + 2 \frac{a}{l} - 2 \frac{z}{l} \right) \\ a + l < z < l + 2a \\ Q &= q(l + 2a - z) \end{aligned}$$

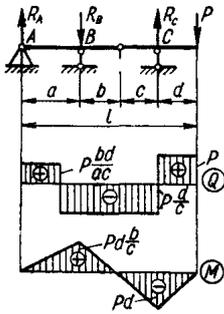
$$\begin{aligned} 0 < z < a \\ M &= -\frac{qz^2}{2} \\ a < z < a + l \\ M &= \frac{ql^2}{2} \left[\left(1 + 2 \frac{a}{l} \right) \times \left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l} \right) - \frac{z^2}{l^2} \right] \\ a + l < z < l + 2a \\ M &= -\frac{1}{2} q(l + 2a - z)^2 \end{aligned}$$

I $l > 2\sqrt{2}a$
 $z_0 = a + \frac{l}{2}$
 $M_{\max} = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{a^2}{l^2} \right)$

II $l < 2\sqrt{2}a$
 $z_0 = a; z_0 = a + l$
 $M_{\max} = -\frac{qa^2}{2}$

Схема нагружения балки, эпюры Q и M	Опорные реакции	Поперечная сила Q	Изгибающий момент M	Координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}
	$R_A = P \left(1 + \frac{a}{b} \right)$ $R_B = P \frac{a}{b}$ $M_B = P \frac{ac}{b}$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -P$ $a < z \leq l$ $Q = P \frac{a}{b}$	$0 \leq z \leq a$ $M = -Pz$ $a < z \leq l$ $M = -Pa \left(1 - \frac{z-a}{b} \right)$	<p>I</p> $c > b$ $z_0 = l$ $M_{\max} = P \frac{ac}{b}$ <p>II</p> $c < b$ $z_0 = a$ $M_{\max} = -Pa$
	$R_A = q \frac{(l-c)^2}{2b}$ $R_B = q \left[l - \frac{(l-c)^2}{2b} \right]$ $M_B = \frac{q}{2} \left[c^2 + \right.$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -qz$ $a < z \leq l$ $Q = q \left[\frac{(l-c)^2}{2b} - z \right]$	$0 \leq z \leq a$ $M = -\frac{1}{2} qz^2$ $a < z \leq l$ $M = -\frac{1}{2} q \left[z^2 - \right.$ $\left. - (l-c)^2 \frac{z-a}{b} \right]$	$z_0^* = \frac{(l-c)^2}{2b}$ $M_{\max}^* = -\frac{q}{2} \left[z_0^{*2} - \right.$ $\left. - (l-c)^2 \frac{z_0^* - a}{b} \right]$

$$+ (b^2 - a^2) \times \left[\frac{c}{b} \right]$$



$$R_A = P \frac{bd}{ac}$$

$$R_B = P \frac{d}{c} \times \left(1 + \frac{b}{a} \right)$$

$$R_C = P \left(1 + \frac{d}{c} \right)$$

$$0 < z < a$$

$$Q = P \frac{bd}{ac}$$

$$a < z < a + b + c$$

$$Q = -P \frac{d}{c}$$

$$l - d < z < l$$

$$Q = P$$

$$0 < z < a$$

$$M = P \frac{bd}{ac} z$$

$$a < z < l - d$$

$$M = P \frac{d}{c} (a + b - z)$$

$$l - d < z < l$$

$$M = -P (l - z)$$

I $c > b$

$$z_0 = l - d$$

$$M_{\max} = -Pd$$

II $b > c$

$$z_0 = a$$

$$M_{\max} = Pd \frac{b}{c}$$

3.9. Дифференциальные зависимости при изгибе плоских кривых стержней

Дифференциальные соотношения между q , Q , N и M , которые могут быть выведены из условия равновесия элемента длиной ds , выделенного из произвольно нагруженного кривого стержня (рис. 54 и 55), имеют вид

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q; \quad (3.5)$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} = N + qr; \quad (3.6)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Qr. \quad (3.7)$$

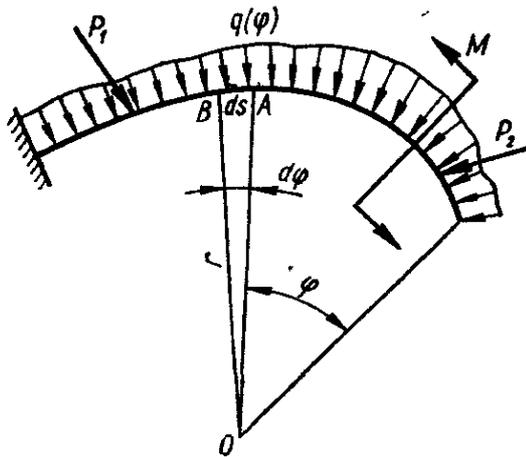


Рис. 54

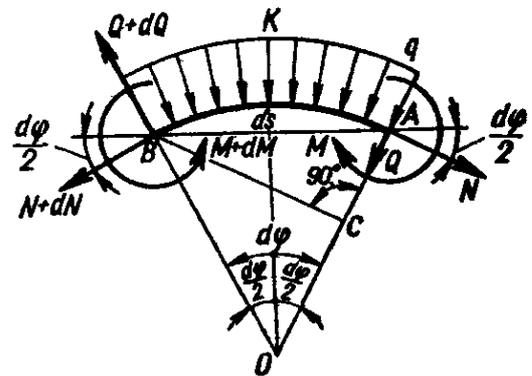


Рис. 55

Полагая $r d\varphi = ds$, эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{r}; \quad (3.8)$$

$$\frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{r}; \quad (3.9)$$

$$\frac{dM}{ds} = Q. \quad (3.10)$$

При выводе указанных зависимостей было предположено, что изгибающий момент считается положительным, если он вызывает сжатие внутренних волокон стержня (волокон, расположенных на вогнутой стороне), а распределенная нагрузка положительна, если она направлена к центру кривизны стержня. Зависимости (3.5) — (3.10) позволяют проверить правильность составления выражений для $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$. Выражения для внутренних усилий в кривом стержне для различных случаев его нагружения приведены в табл. 8 и 9.

3.10. Построение эпюр внутренних сил для пространственных стержней

В рамных системах, оси составляющих стержней которых не лежат в одной плоскости, а также в плоских системах, находящихся под воздействием пространственной нагрузки, могут действовать в сече-

ниях стержней все шесть внутренних силовых факторов: N_z , Q_y , Q_x , M_z , M_y , M_x (рис. 29, б). В этом случае эпюры изгибающих моментов по-прежнему строятся на сжатых волокнах, причем ориентировать их следует так, чтобы плоскость эпюры совпадала с плоскостью действия пары того изгибающего момента, для которого она построена. Знак изгибающего момента вводится произвольно и притом только в случае необходимости записать соответствующее уравнение.

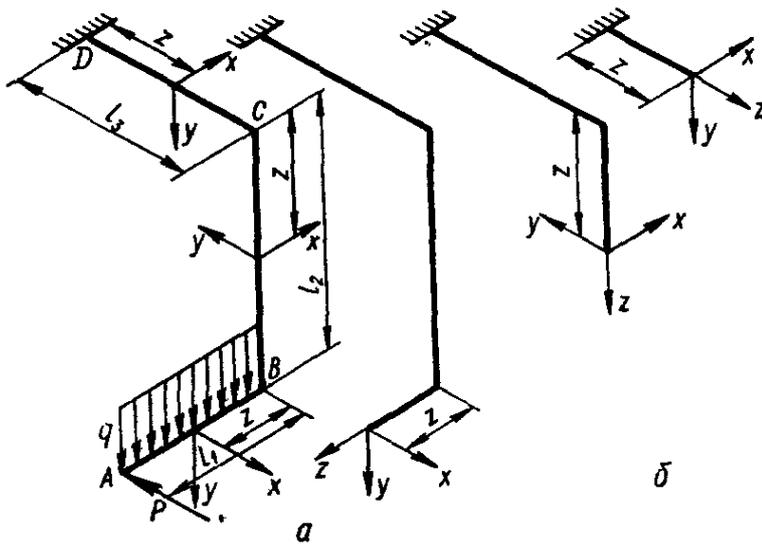


Рис. 56

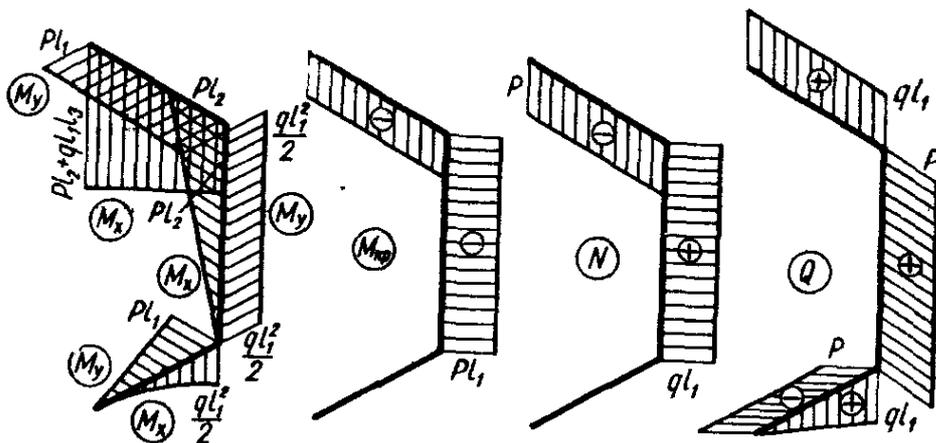


Рис. 57

Для продольных сил и крутящих моментов сохраняются прежние правила знаков. Эпюры N и $M_{кр}$ могут быть ориентированы как угодно, но их ординаты всегда откладываются по нормали к оси стержня.

Поперечные силы в сечении считаются положительными, если их направление совпадает с положительным направлением осей.

В качестве иллюстрации приведем для ломаного стержня (рис. 56) результаты построения эпюр внутренних силовых факторов (рис. 57). Внутренние усилия для соответствующих участков стержня определялись по формулам, приведенным ниже. На участке AB ($0 \leq z \leq l_1$)

$$N \equiv 0; \quad Q_x = -P; \quad Q_y = q(l_1 - z); \quad M_{кр} \equiv 0;$$

$$M_y = P(l - z) \text{ (сжаты левые волокна);}$$

$$M_x = \frac{q(l_1 - z)^2}{2} \text{ (сжаты нижние волокна).}$$

На участке BC ($0 < z < l_2$)

$$N = ql_1; \quad Q_x \equiv 0; \quad Q_y = P; \quad M_{кр} = -Pl_1;$$

$$M_y = \frac{ql_1^2}{2}; \quad M_x = P(l_2 - z).$$

На участке CD ($0 < z < l_3$)

$$N = -P, \quad Q_x \equiv 0; \quad Q_y = ql_1; \quad M_{кр} = -\frac{ql_1^2}{2};$$

$$M_x = Pl_2 + ql_1(l_2 - z).$$

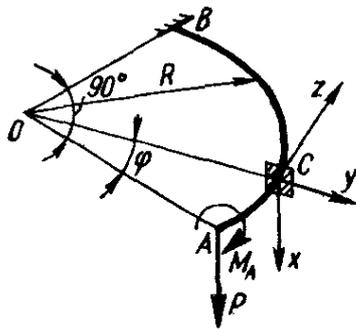


Рис. 58

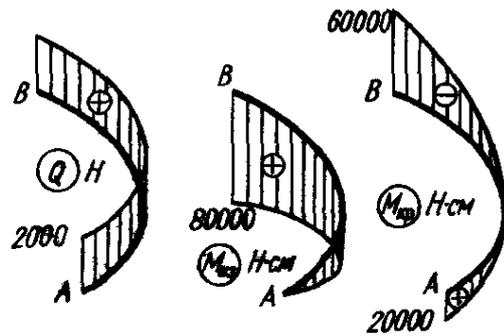


Рис. 59

Эпюры внутренних сил для пространственно нагруженного криволинейного стержня (рис. 58), построенные на основании зависимостей

$$M_{из}(\varphi) = M_y(\varphi) = (PR + M_A) \sin \varphi;$$

$$M_{кр}(\varphi) = M_z(\varphi) = (PR + M_A) \cos \varphi - PR,$$

при $P = 2$ кН; $M_A = 20$ кН·см; $R = 30$ см приведены на рис. 59.

3.11. Напряжения в сечении

В сечениях нагруженного стержня возникают непрерывно распределенные внутренние усилия (рис. 60, а), равнодействующими которых являются главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} , приложенные в центре тяжести сечения. Проекция \vec{R} и \vec{M} на главные центральные оси x , y и ось стержня z дают величины компонентов внутренних усилий N , Q_y , Q_x , M_y , M_x и M_z .

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади dF (рис. 60, б) с произвольными координатами x , y . В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия распределены на нем равномерно, а равнодействующая их $d\vec{R}$ приложена в центре его тяжести. Следовательно, при приведении этих усилий к центру тяжести элемента $d\vec{R}$ будет являться главным вектором силы, а главный момент, очевидно, будет равен нулю.

Проекциями $d\vec{R}$ на осн z , y , x будут элементарные силы dN , dQ_y , dQ_x . Разделив все эти величины на площадь dF , получим выражения

для внутренних усилий, приходящихся на единицу площади, называемых напряжениями в точке (y, x) поперечного сечения стержня:

$$p = \frac{dR}{dF}; \quad \sigma = \frac{dN}{dF}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dF}, \quad (3.11)$$

где p — полное напряжение; σ — нормальное напряжение; τ_y, τ_x — касательные напряжения.

Размерность напряжений — сила, деленная на квадрат длины ($\text{Н/м}^2, \text{кН/м}^2, \text{МН/м}^2$ и т. д.). Обычно напряжения измеряют в паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$) или кратных единицах (кПа, МПа).

Таким образом, напряжением называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения, т. е. интенсивность внутренней силы в данной точке сечения.

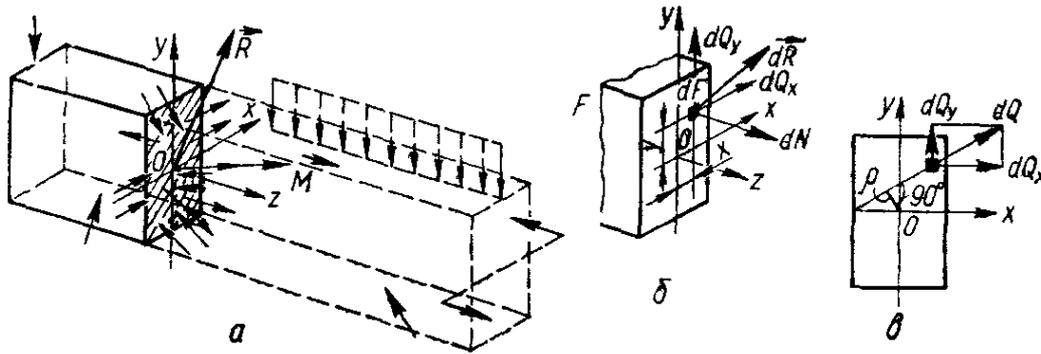


Рис. 60

Полное напряжение в точке может быть выражено через нормальное и касательные напряжения:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_x^2}. \quad (3.12)$$

Учитывая (3.11), нетрудно установить общие зависимости между напряжениями σ и τ , с одной стороны, и компонентами внутренних усилий — с другой:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad (3.13)$$

$$Q_y = \int_F \tau_y dF; \quad (3.14)$$

$$Q_x = \int_F \tau_x dF; \quad (3.15)$$

$$M_y = \int_F x\sigma dF; \quad (3.16)$$

$$M_x = \int_F y\sigma dF; \quad (3.17)$$

$$M_z = M_{кр} = \int_F (y\tau_x + x\tau_y) dF = \int_F \rho\tau dF, \quad (3.18)$$

где

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \sqrt{\left(\frac{dQ_y}{dF}\right)^2 + \left(\frac{dQ_x}{dF}\right)^2} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2};$$

ρ — расстояние от центра тяжести сечения до линии действия dQ (рис. 60, в).

Зависимости (3.13) — (3.18) называются *статическими уравнениями*. В общем случае расчета, когда закон распределения напряжений по сечению не известен, их применять нельзя. Например, зная величину изгибающего момента M_y в сечении, нельзя найти нормальные напряжения, пользуясь формулой (3.16). Однако если, пользуясь теми или иными соображениями, удастся установить, как распределяются по сечению σ или τ , то тогда по формулам (3.13) — (3.18) можно найти и сами величины напряжений.

Выводы формул для определения напряжений целесообразно проводить по такой схеме.

1 Рассматривается *статическая сторона задачи* — записываются те из уравнений (3.13) — (3.18), которые необходимы для вывода.

2. Рассматривается *геометрическая сторона задачи* — на основании опытных данных записываются геометрические уравнения, устанавливающие зависимость перемещений точек стержня от их положения в сечении.

3. Рассматривается *физическая сторона задачи* — на основании опытных данных записываются уравнения, выражающие зависимость между напряжениями и деформациями (или перемещениями).

4 Производится синтез, т. е. совместно решаются уравнения, полученные в п. 1—3, и путем исключения деформаций (или перемещений) получаются формулы, выражающие напряжения через усилия или моменты в сечении.

3.12. Условия прочности и жесткости

Основной задачей сопротивления материалов является определение надежных размеров поперечного сечения детали, подверженной тому или иному силовому, температурному или другому воздействию. Такие размеры могут быть определены из расчета на прочность, жесткость или устойчивость. Основным является расчет на прочность.

Физически очевидно, что материал не в состоянии выдерживать сколь угодно большие напряжения. Поэтому величины наибольших напряжений из условия надежности работы детали должны быть ограничены некоторыми допустимыми значениями. Эти значения называются *допускаемыми напряжениями* и обозначаются $[\sigma]$ или $[\tau]$.

Если известны допускаемые напряжения и имеются формулы, выражающие напряжения через усилия или моменты в сечении, то принципиально можно рассчитать на прочность (подобрав необходимые размеры, при которых напряжение не будет превышать допускаемые) любую деталь.

На практике встречаются три случая расчета на прочность.

1. По известным нагрузкам требуется для выбранного материала найти необходимые размеры поперечного сечения детали, обеспечивающие ее надежную работу (проектировочный расчет).

2. Известны материал и размеры детали. Требуется выяснить, может ли эта деталь выдержать заданную нагрузку (проверочный расчет).

3. Известны материал, размеры детали и схема ее нагружения; требуется найти допустимую величину нагрузки.

В основе всех этих расчетов лежит *условие прочности*

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ или } \tau_{\max} \leq [\tau],$$

выражающее тот факт, что наибольшие напряжения — нормальное,

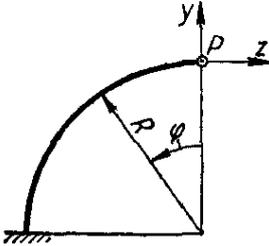
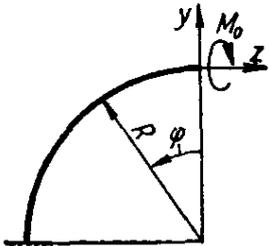
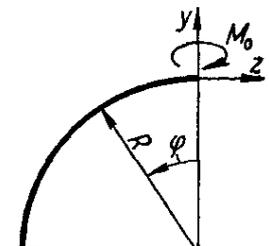
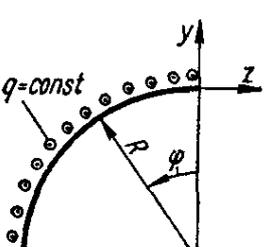
Таблица 8. Изгибающий момент M , нормальная N и поперечная Q силы в консольном круговом стержне при нагружении в его плоскости

Схема	N	Q	M
	$P \sin \varphi + T \cos \varphi$	$P \cos \varphi - T \sin \varphi$	$M_0 + PR \sin \varphi - TR(1 - \cos \varphi)$
	$P \cos (\alpha - \varphi) + T \sin \alpha \times (\alpha - \varphi)$	$P \sin (\alpha - \varphi) - T \cos (\alpha - \varphi)$	$M_0 + PR \times [\cos (\alpha - \varphi) - \cos \alpha] - TR [\sin \alpha - \sin (\alpha - \varphi)]$
	$qR(1 - \cos \varphi)$	$qR \sin \varphi$	$qR^2(1 - \cos \varphi)$
	$qR \sin \varphi$	$-qR(1 - \cos \varphi)$	$-qR^2(\varphi - \sin \varphi)$
	0	0	$mR\varphi$

касательное или эквивалентное (см. гл. 6), действующие в опасной точке, не должны превышать допустимого напряжения.

Аналогично проводится и расчет на жесткость, только вместо условия прочности используется *условие жесткости*, ограничивающее величину деформаций (или перемещений). Однако даже в том случае, когда выполнен расчет на жесткость, всегда необходимо проводить проверочный расчет на прочность и, если он дает отрицательный результат, следует принять размеры, полученные из расчета на прочность.

Таблица 9. Изгибающий $M_{из}$ и крутящий $M_{кр}$ моменты в консольном круговом стержне при нагружении, перпендикулярном к его плоскости

Схема	$M_{из}$ (перпендикулярно к плоскости yz)	$M_{кр}$
	$PR \sin \varphi$	$PR(1 - \cos \varphi)$
	$M_0 \sin \varphi$	$-M_0 \cos \varphi$
	$M_0 \cos \varphi$	$M_0 \sin \varphi$
	$qR^2(1 - \cos \varphi)$	$qR^2(\varphi - \sin \varphi)$

**МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ.
КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ**

4.1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии

Напряженное состояние осевого растяжения или сжатия характеризуется тем, что из шести компонентов внутренних усилий только продольная сила N не равна нулю. Рассмотрим стержень, нагруженный осевыми силами (рис. 61). Для произвольного сечения $n-n$ статическая сторона задачи выражается уравнением

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

Геометрическая сторона задачи определяется гипотезой плоских сечений (гипотезой Бернулли), основанной на данных эксперимента: поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации, перемещаясь поступательно вдоль оси стержня. Из этого следует, что все волокна элемента длиной l удлиняются на одну и ту же величину Δl и их относительные удлинения ϵ одинаковы:

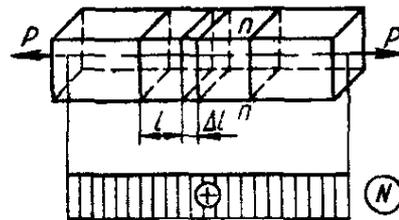


Рис 61

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}. \quad (4.2)$$

Физическая сторона рассматриваемой задачи определяется законом Гука, выражающим линейную зависимость деформаций от напряжений:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ или } \sigma = E\epsilon, \quad (4.3)$$

где E — коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости при растяжении (сжатии) или модулем Юнга. E имеет размерность напряжения (Н/м^2 , МН/м^2 и т. д.), обычно измеряется в паскалях (Па) или кратных единицах (кПа, МПа), и является одной из физических констант материала (табл. 10, 11, 12). Учитывая, что $E = \text{const}$, а согласно формулам (4.2), (4.3) и $\sigma = E \cdot \epsilon = \text{const}$, из (4.1) находим

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (4.4)$$

При растяжении σ положительно, при сжатии — отрицательно. Формула (4.4) справедлива для сечений, достаточно удаленных от мест приложения сосредоточенных нагрузок. Вблизи приложения нагрузок выполняется более сложный закон распределения напряжений.

При определении напряжений при растяжении и сжатии, как и при других видах деформаций, необходимо пользоваться вытекающими

из эксперимента положением, называемым *принципом Сен-Венана* если тело нагружается статически эквивалентной системой сил, т. е. такими силами, у которых главный вектор и главный момент одинаковы, и при этом область приложения нагрузок невелика по сравнению с размерами тела, то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения сил, напряжения мало зависят от способа нагружения.

Этот принцип можно проиллюстрировать примером приложения эквивалентных нагрузок, приведенным на рис. 62. Один и тот же стержень, закрепленный верхним концом, нагружается на свободном конце статически эквивалентными нагрузками, равнодействующие которых выражаются величиной вектора P . Исследования показывают, что напряжения в сечении, достаточно удаленном от места приложения нагрузки (на расстоянии, превышающем в 1,5—2 раза поперечные размеры стержня), практически оказываются во всех трех случаях одинаковыми.

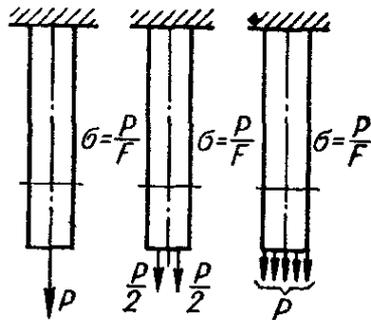


Рис. 62

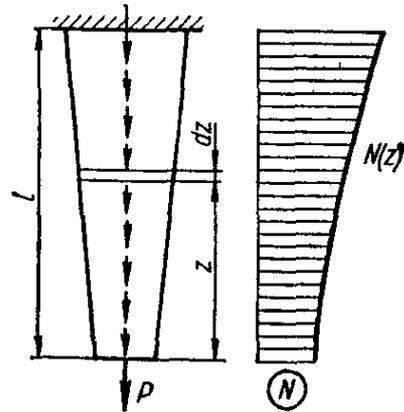


Рис. 63

Относительная деформация определяется через продольную силу на основании (4.3) и (4.4) следующей формулой:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad (4.5)$$

а полная деформация стержня длиной l для однородного материала ($E = \text{const}$) при одинаковой по длине силе N — формулой

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) выражает закон Гука для абсолютных удлинений (укорочений). Произведение EF в знаменателе формулы называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии) и имеет размерность силы, а величина $c = \frac{EF}{l}$ называется жесткостью стержня при растяжении (сжатии), ее размерность — сила, деленная на длину.

В том случае, когда продольная сила и поперечное сечение стержня по длине не постоянны (рис. 63), полное удлинение стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{EF(z)} dz. \quad (4.7)$$

Растяжение и сжатие сопровождаются также изменением поперечных размеров стержня (рис. 64, а, б). Абсолютные поперечные деформации стержня определяются формулами

$$\Delta a = a_1 - a;$$

$$\Delta b = b_1 - b.$$

Относительные поперечные деформации (при растяжении отрицательные, а при сжатии положительные) определяются формулой

$$e' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Между относительной поперечной и относительной продольной деформациями при простом растяжении и сжатии в пределах применимости закона Гука существует постоянное отношение, абсолютная величина которого называется коэффициентом Пуассона и обозначается буквой μ :

$$\mu = \left| \frac{e'}{\varepsilon} \right|. \quad (4.8)$$

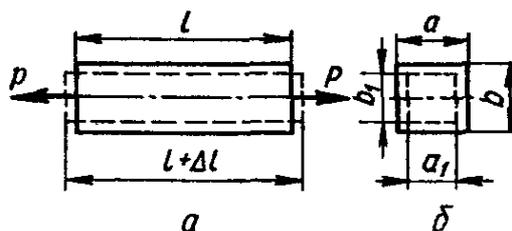


Рис. 64

Коэффициент Пуассона — безразмерная величина и для всех изотропных материалов (см. табл. 10) находится в пределах 0—0,5 (для пробки близко к нулю; для каучука близко к 0,5, для стали $\mu \approx 0,3$).

Учитывая, что в ε и e' всегда имеют противоположные знаки, получаем

$$e' = -\mu\varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (4.9)$$

При расчете стержней, работающих на растяжение или сжатие, условие прочности следует записывать для опасного сечения, которое характеризуется максимальным значением N_{\max} на эпюре осевых сил

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma], \quad (4.10)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_+]$ (при расчете на растяжение) или допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_-]$ (при расчете на сжатие).

По формуле (4.10) могут быть решены задачи трех типов: подбор размеров поперечного сечения стержня; проверка прочности; определение допускаемой нагрузки.

В некоторых случаях стержни рассчитывают исходя из условия жесткости

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{EF(z)} dz \leq [\Delta l], \quad (4.11)$$

где $[\Delta l]$ — допускаемая величина изменения длины стержня.

Расчет из условия жесткости всегда должен быть дополнен расчетом на прочность. Если окажется, что условие прочности не удовлетворяется, то размеры стержня должны быть взяты исходя из этого условия.

4.2. Испытание материалов на растяжение, сжатие и твердость

Испытание на растяжение. Основным видом исследования механических свойств материалов является испытание на растяжение. Оно проводится на специальных испытательных машинах, создающих постепенно возрастающую нагрузку на испытываемый образец и осуществляющих в процессе нагружения регистрацию величины действующей на образец силы и его деформации.

Чаще всего применяют цилиндрические образцы (рис. 65, а), а при испытании листового материала — плоские образцы (рис. 65, б). Для цилиндрических образцов выдерживают определенное соотношение между расчетной длиной образца l_0 и диаметром образца d_0 . Обычно $l_0 = 10d_0$ (длинный образец); реже $l_0 = 5d_0$ (короткий образец).

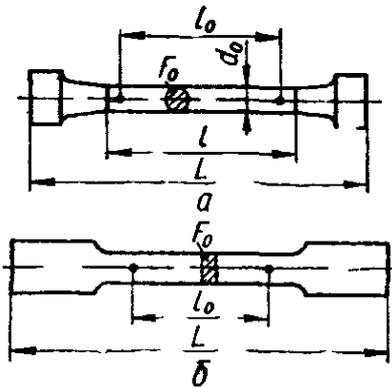


Рис. 65

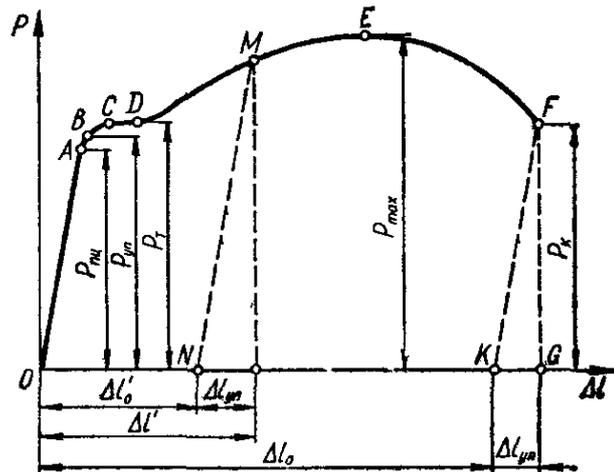


Рис. 66

Учитывая, что диаметр d_0 связан с площадью сечения образца F формулой

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 1,13 \sqrt{F_0},$$

связь между расчетной длиной l_0 и площадью поперечного сечения образца F_0 можно выразить для длинного и короткого образцов соответственно зависимостями

$$\begin{aligned} l_0 &= 11,3 \sqrt{F_0}, \\ l_0 &= 5,65 \sqrt{F_0}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В качестве основных образцов при испытании на растяжение применяют цилиндрические образцы с диаметром $d_0 = 10$ мм, расчетной длиной $l_0 = 100$ мм и $l_0 = 50$ мм. Допускается применение и других пропорциональных образцов, в которых выдержаны соотношения размеров в соответствии с формулами (4.12).

Диаграмма растяжения. При испытании материала на растяжение современные машины позволяют автоматически получить записанный в определенном масштабе график зависимости деформации образца от нагрузки, или так называемую *диаграмму растяжения*. Типичный вид диаграммы растяжения в координатах $P - \Delta l$ для малоуглеродистой стали приведен на рис. 66.

На диаграмме имеется ряд характерных участков и точек, соответствующих различным стадиям деформирования образца. Точка *A* характеризует наибольшую (предельную) нагрузку $P_{пц}$, до которой соблюдается линейная зависимость между нагрузкой и удлинением образца; точка *B* соответствует наибольшей нагрузке $P_{уп}$, при которой образец сохраняет упругие свойства, т. е. при разгрузке еще не наблюдается остаточная деформация; точка *C* соответствует нагрузке $P_{т}$, при которой образец деформируется без возрастания нагрузки, или, как говорят, материал начинает «течь», образуя на диаграмме так называемую площадку текучести *CD*. После стадии текучести материал снова приобретает способность увеличивать сопротивление дальнейшей деформации. Точка *E* соответствует максимальной (предельной) нагрузке P_{max} , после которой начинается местное сужение образца в виде шейки (рис. 67), в результате чего происходит падение нагрузки. Точка *F* соответствует нагрузке $P_{к}$, при которой образец разрушается.

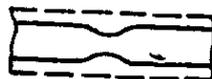


Рис 67

Пользуясь указанными характерными нагрузками, взятыми из диаграммы растяжения, и зная площадь сечения испытуемого образца F_0 , определяют основные характеристики прочности материала:

$$\sigma_{п} = \frac{P_{пц}}{F_0} \text{ — предел пропорциональности;}$$

$$\sigma_{уп} = \frac{P_{уп}}{F_0} \text{ — предел упругости;}$$

$$\sigma_{т} = \frac{P_{т}}{F_0} \text{ — предел текучести;}$$

$$\sigma_{в} = \frac{P_{max}}{F_0} \text{ — предел прочности, или временное сопротивление;}$$

$$\sigma_{к} = \frac{P_{к}}{F_0} \text{ — напряжение в момент разрыва.}$$

Поскольку при растяжении сечение образца непрерывно меняется, особенно в период нагружения, характеризуемый участком диаграммы *DEF*, значения $\sigma_{в}$ и $\sigma_{к}$ имеют достаточно условный характер. Особенно условным является напряжение $\sigma_{к}$, так как начиная с нагрузки P_{max} происходит образование шейки и в момент разрыва сечение образца в шейке $F_{ш}$ оказывается существенно меньше начальной площади сечения образца F_0 .

Для материалов, диаграмма растяжения которых не имеет резко выраженной площадки текучести, предел текучести условно определяют как напряжение, при котором остаточная деформация составляет величину, установленную ГОСТом или техническими условиями. По ГОСТу 1497—84 эта величина остаточной деформации составляет 0,2 % расчетной длины образца, а условный предел текучести $\sigma_{т}$ обозначается $\sigma_{0,2}$.

Учитывая, что практически трудно установить начало отклонения от закона пропорциональности и начало появления первых остаточных деформаций, вводят также понятие условного предела пропорциональности и условного предела упругости.

Под *условным пределом пропорциональности* понимают наименьшее напряжение, при котором отклонение от линейной зависимости

между напряжением и деформацией достигает некоторой заданной величины (порядка 0,002 %).

Под *условным пределом упругости* понимают наименьшее напряжение, при котором остаточная деформация достигает заданной величины (обычно 0,001 % — 0,05 %). Условный предел упругости отмечается индексом, соответствующим заданной величине остаточной деформации, например $\sigma_{0,001}$ и $\sigma_{0,05}$.

При испытании образцов на растяжение определяют также характеристики пластичности, к которым относится *относительное удлинение* после разрыва

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100 \%$$

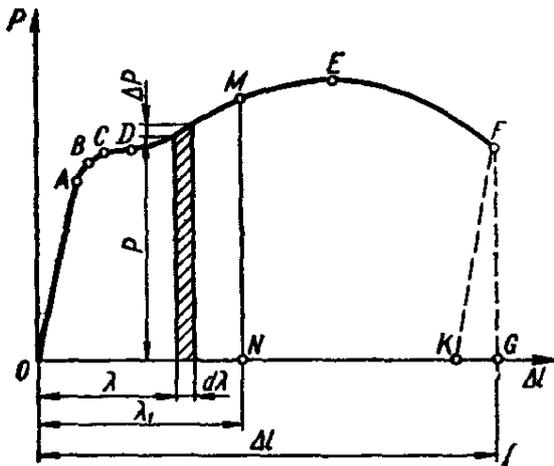


Рис. 68

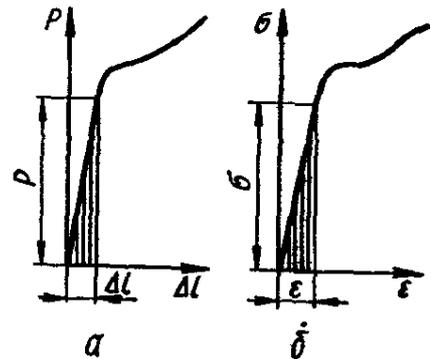


Рис. 69

и *относительное сужение* после разрыва

$$\psi = \frac{\Delta F_0}{F_0} \cdot 100 \%,$$

где

$$\Delta F_0 = F_0 - F_{\min}.$$

Кроме указанных выше механических свойств материала (прочности и пластичности), данные о которых для различных материалов приведены в Приложении 1, определяются еще энергетические характеристики материала. Оказывается, что диаграмма растяжения дает информацию и об этих его свойствах. Так, ее площадь характеризует работу, затраченную на растяжение образца. Работа, затраченная на растяжение образца до деформации λ_1 (рис. 68), определяется формулой

$$A_1 = \int_0^{\lambda_1} (P + dP) d\lambda \approx \int_0^{\lambda_1} P d\lambda,$$

что соответствует площади $OABCDMN$ диаграммы, а работа, затраченная на разрыв образца, определяется площадью всей диаграммы $OABCDEFG$.

В пределах упругости *работа деформации* выражается площадью заштрихованного треугольника (рис. 69, а) и при удлинении образца Δl и соответствующей ему силе P равна

$$A_{уп} = \frac{P\Delta l}{2}.$$

a удельная работа деформации

$$a_{уп} = \frac{A_{уп}}{V} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\sigma \epsilon}{2}$$

и выражается площадью заштрихованного треугольника диаграммы в координатах $\sigma - \epsilon$ (рис. 69, б).

Диаграмма напряжений. Поскольку диаграмма растяжения характеризует не только свойства материала, но и размеры образца, то ее принято перестраивать в относительных координатах $\sigma - \epsilon$. Такая диаграмма, построенная на основании диаграммы растяжения (рис. 66) и называемая **диаграммой напряжений**, представлена на рис. 70. На этой диаграмме точки $0, a, b, c, d, e, f$ соответствуют точкам $0, A, B, C, D, E, F$ первичной диаграммы растяжения (рис. 66).

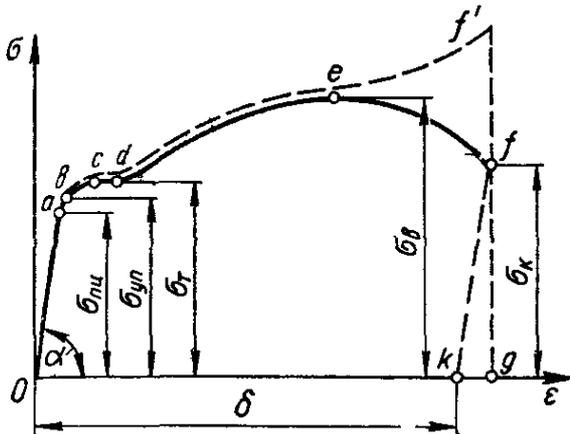


Рис. 70

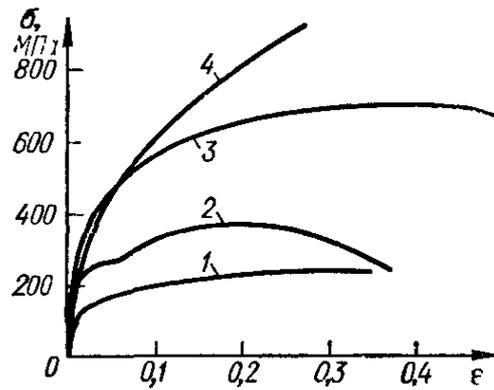


Рис. 71

Из диаграммы напряжений (рис. 70) видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E,$$

т. е. модуль упругости при растяжении численно равен тангенсу угла наклона прямолинейного участка диаграммы напряжений к оси абсцисс. В этом заключается геометрический смысл модуля упругости при растяжении.

Заметим, что нисходящий участок ef диаграммы напряжений (рис. 70) — условный из-за значительного различия между сечением шейки и первоначальной площадью сечения образца F_0 , на которую делят соответствующие усилия, взятые из диаграммы растяжения для получения ординат диаграммы напряжений на участке ef .

Примерный вид диаграмм напряжений для различных материалов приведен на рис. 71. Кривые 1, 2, 3, 4 соответственно характеризуют механические свойства бронзы ($\sigma_B = 247$ МПа; $\delta = 36\%$); углеродистой стали ($\sigma_B = 358$ МПа; $\delta = 38\%$); никелевой стали ($\sigma_B = 715$ МПа; $\delta = 54\%$); марганцовистой стали ($\sigma_B = 916$ МПа; $\delta = 30\%$).

Диаграмма напряжений для чугуна, являющаяся типичной для хрупкого материала, приведена на рис. 72. Диаграмма не имеет выраженного прямолинейного начального участка. При определении деформаций с использованием формул, выражающих закон Гука, значение модуля упругости E находят как тангенс угла (α) наклона прямой, проведенной через начальную точку диаграммы 0 и точку B , соответствующую напряжению, при котором определяют деформацию. Такой модуль упругости называют *секущим*.

Если относить усилия, действующие на образец в каждый момент времени нагружения, к истинному значению поперечного сечения в соответствующий момент времени, то получим *диаграмму истинных напряжений* (рис. 70, штриховая линия).

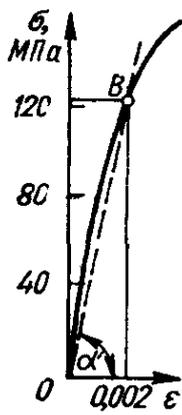


Рис. 72

Испытание на сжатие. Испытание материалов на сжатие производится на специальных прессах или универсальных испытательных машинах. Для испытания изготавливаются образцы в виде цилиндров небольшой высоты (обычно высота составляет от одного до трех диаметров) или кубиков. При испытании на сжатие трение, возникающее между сжимающими плитами испытательной машины и торцами образца, оказывает существенное влияние на результаты испытания и характер разрушения испытуемого образца.

При сжатии цилиндрического образца из малоуглеродистой стали последний принимает бочкообразную форму (рис. 73). Диаграмма сжатия, полученная для этого материала, приведена на рис. 74.

На рис. 75, а показан характер разрушения при сжатии образца из камня при наличии сил трения между плитами машины и торцами образца. При уменьшении сил трения путем нанесения на торцы слоя парафина характер разрушения того же образца может быть проиллюстрирован на рис. 75, б.

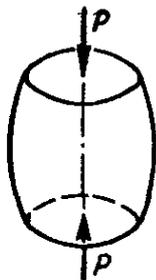


Рис. 73

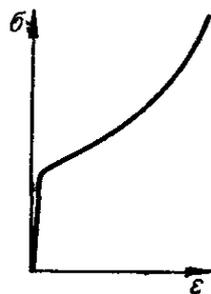


Рис. 74

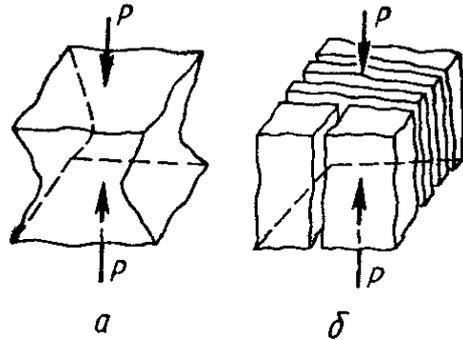


Рис. 75



Рис. 76

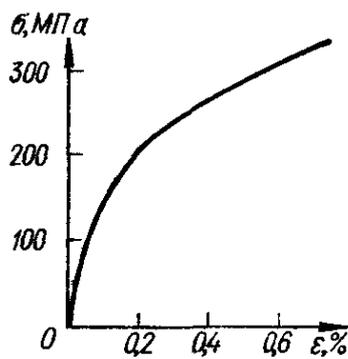


Рис. 77

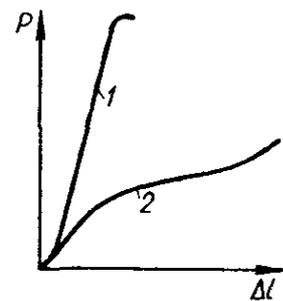


Рис. 78

Вид разрушенного при сжатии чугунного образца показан на рис. 76, а соответствующая диаграмма сжатия — на рис. 77.

Диаграммы сжатия при испытании кубика древесины показаны на рис. 78 (кривая 1 — при сжатии вдоль волокон, кривая 2 — при сжатии поперек волокон).

Определение твердости материала. В некоторых случаях для оценки величины временного сопротивления можно воспользоваться косвенным методом, в частности измерением твердости.

Твердостью материала называют способность оказывать сопротивление механическому проникновению в его поверхность другого, более твердого тела. Для определения твердости чаще всего в поверхность материала с определенной силой вдавливают тело (индентор) в виде стального шарика, алмазного конуса или пирамиды. По размерам полученного отпечатка судят о твердости испытываемого материала.

Определение твердости — весьма распространенное испытание, что объясняется его чрезвычайной простотой. Твердость можно определять и непосредственно в условиях производства на готовых изделиях, так как остающиеся отпечатки во многих случаях не портят изделия.

Наиболее распространенным способом определения твердости является способ Бринелля. Стальной закаленный шарик диаметром D (рис. 79) вдавливается в испытываемый образец (изделие) под действием нагрузки P , приложенной в течение определенного времени. После удаления нагрузки измеряется диаметр отпечатка, оставшегося на поверхности образца. Число твердости HB по Бринеллю определяется делением нагрузки P на площадь поверхности сферического отпечатка (m^2) и может быть вычислено по формуле

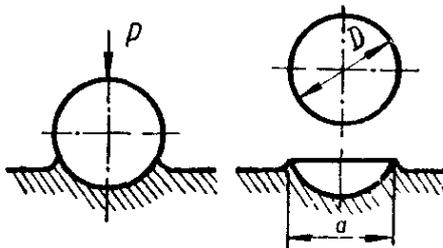


Рис. 79

$$HB = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (4.13)$$

где P — нагрузка, Н; D — диаметр шарика, м; d — диаметр отпечатка, м.

Число твердости выражается в МПа, хотя обычно эту единицу не указывают. Для оценки твердости иногда используют диаметр отпечатка d и мм.

Если твердость измеряют шариком $D = 0,01$ м (10 мм) под нагрузкой $P = 30\,000$ Н с выдержкой $t = 10$ с, то число твердости по Бринеллю сопровождают обозначением HB , например $HB\ 3000$. При других условиях определения твердости число твердости сопровождают индексами в следующем порядке: диаметр шарика, нагрузка и продолжительность выдержки. Например, $HB\ 5/2500/30-2000$ означает число твердости по Бринеллю (2000) при испытании шариком $D = 5$ мм под нагрузкой $P = 2500$ Н, приложенной в течение $t = 30$ с.

Опытным путем установлено, что для некоторых материалов существует определенная связь между числом твердости по Бринеллю и временным сопротивлением при разрыве. Например, для малоуглеродистой стали $\sigma_b \approx 0,36HB$; для стального литья $\sigma_b = (0,3 - 0,4)HB$; для серого чугуна $\sigma_b = \frac{HB - 40}{6}$.

Если твердость материала $HB \geq 4000$ МПа, то определить ее, вдавливая шарик, нельзя в связи с заметной деформацией последнего. В этих случаях вместо шарика вдавливают алмазный конус (по Роквеллу) или алмазную пирамиду (по Виккерсу).

Число твердости HRC по Роквеллу (шкала С) соответствует разности глубин проникновения в поверхность исследуемого материала алмазного конуса с углом при вершине 120° под действием основной (1500 Н) и предварительной (100 Н) нагрузки.

В табл. 13 приведены установленные соотношения между числами твердости HV , HRC и временным сопротивлением σ_B для различных сталей.

При определении твердости по Виккерсу используют индентор в виде правильной четырехгранной пирамиды с углом между противоположными гранями 136° . Число твердости HV по Виккерсу определяется отношением нагрузки на индентор к площади его отпечатка:

$$HV = \frac{P}{F} = \frac{2P \sin \gamma}{b^2} = 1,8544 \frac{P}{b^2}, \quad (4.14)$$

где P — нагрузка на индентор, Н; F — площадь поперечного сечения отпечатка, m^2 ; $\gamma = 136^\circ/2 = 68^\circ$; b — среднее арифметическое длии двух диагоналей отпечатка, м.

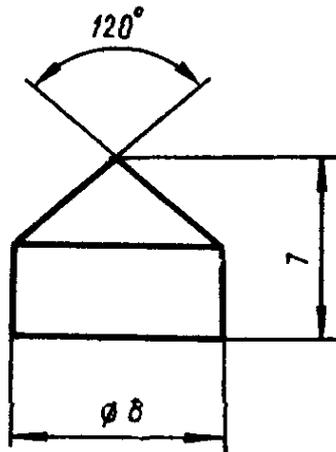


Рис. 80

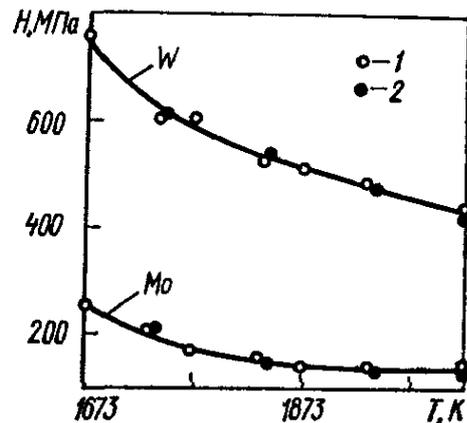


Рис. 81

Величина нагрузки находится в пределах 50—1200 Н. Числа твердости HV и HRC практически совпадают в диапазоне их значений до 4000.

Применяют и другие способы определения твердости материала, например, по высоте отскока бойка, падающего с определенной высоты на поверхность испытываемого материала, по периоду качания маятника, упирающегося в поверхность материала.

Твердость, полученная различными методами, с помощью специальных таблиц может быть переведена в твердость по Бринеллю.

Для определения твердости сталей при повышенных температурах (673—773 К) может использоваться метод вдавливания стального шарика, а для определения твердости жаропрочных и тугоплавких материалов при температурах до 2273 К обычно используют метод вдавливания индентора в виде четырехугольной пирамиды из синтетического корунда (сапфира). При температурах до 3273 К применяют метод одностороннего сплющивания конического образца с углом при вершине 120° (рис. 80).

Значения твердости по методу одностороннего сплющивания конического образца определяют как среднее давление (в МПа) на площади отпечатка сплющивания:

$$H = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2} = 1,2732 \frac{P}{d^2}, \quad (4.15)$$

где P — нагрузка на образец, Н; F — площадь поверхности отпечатка сплющивания конической вершины образца, mm^2 ; d — диаметр отпечатка, мм. Размеры образца обычно принимают равными 8 мм по диа-

метру и 5—7 мм по высоте (до изготовления конуса). Нагрузка на образец $P = 50$ Н, выдержка образца под нагрузкой 60 с.

Соответствие показателей твердости вольфрама и молибдена, получаемых по методу вдавливания пирамидального индентора и одностороннего сплющивания в диапазоне температур 1673—2023 К продемонстрировано на рис. 81. Данные о твердости некоторых тугоплавких материалов при различных температурах приведены в табл. 14.

4.3. Понятие о механизме образования деформаций

Как известно, металлы имеют кристаллическую структуру. При затвердевании металла в расплаве одновременно возникает много центров кристаллизации, вследствие чего рост каждого кристалла стеснен соседними. В результате технический металл состоит из большого числа кристаллов неправильной огранки, называемых *кристаллитами* или *кристаллическими зёрнами*. Относительно друг друга кристаллические зёрна ориентированы самым различным образом. Вместе с тем в каждом из них атомы расположены совершенно определенно и образуют так называемую *кристаллическую решетку*, состоящую из повторяющихся одинаковых ячеек.

Атомы электрически нейтральны. Однако при достаточном их сближении возникает возможность отрыва валентного электрона одного атома положительно заряженным ядром другого, у этого — следующим и т. д. Таким образом, часть валентных электронов начинает перемещаться вокруг ядер всех взаимодействующих атомов. Эти электроны называются *свободными*, поскольку не связаны с определенными атомами. Металл можно представить себе как постройку из нейтральных атомов и ионов, находящихся в атмосфере электронного газа, который как бы стигивает ионы. Связь между атомами, осуществляемая электростатическими силами в результате взаимодействия положительных ионов и электронного газа, называется *металлической*. Поскольку эти атомы по своей природе одинаковы, то расположиться они должны на таких расстояниях один от другого и в таких точках пространства, где действующие на них силы притяжения и отталкивания были бы равны. В результате происходит закономерное расположение атомов, наблюдаемое в кристаллической решетке.

Кристаллическую решетку образуют воображаемые линии в плоскости, проходящие через точки пространства, в которых располагаются ионы металла. Более правильно эти точки определить как центры наиболее вероятного расположения ионов, так как те не остаются неподвижными, а колеблются около этих центров. Последние обычно называют *узлами кристаллической решетки*. Наиболее распространенными типами таких решеток металлов являются кубическая объемноцентрированная (рис. 82, а), кубическая гранецентрированная (рис. 82, б) и гексагональная плотноупакованная (рис. 82, в). В них атомы находятся в устойчивом положении равновесия и обладают минимальной потенциальной энергией.

При деформации металла расстояния между атомами под действием внешних сил изменятся по определенным направлениям, линии и плоскости, проходящие через атомы, искривляются, кристаллическая решетка искажается. Так как при этом равнодействующие сил притяжения и отталкивания между атомами уже не равны нулю, то в решетке будут действовать внутренние силы, стремящиеся вернуть атомы в положение равновесия. Зависимость между малыми смещениями атомов и силами взаимодействия с известной степенью приближения можно считать линейной. Суммарно это проявляется в линейной

зависимости между смещениями точек тела и внешними силами, выражаемой законом Гука.

При устранении внешних сил атомы вновь занимают свои прежние места в кристаллической решетке, вследствие чего происходит упругое восстановление формы металлического тела. Так объясняется упругая деформация.

Если внешние силы увеличиваются, то возрастают и внутренние. Тогда в зернах металла происходит смещение одной части относительно другой, называемое *скольжением*. Исследованиями установлено, что оно происходит по плоскостям и направлениям, вдоль которых

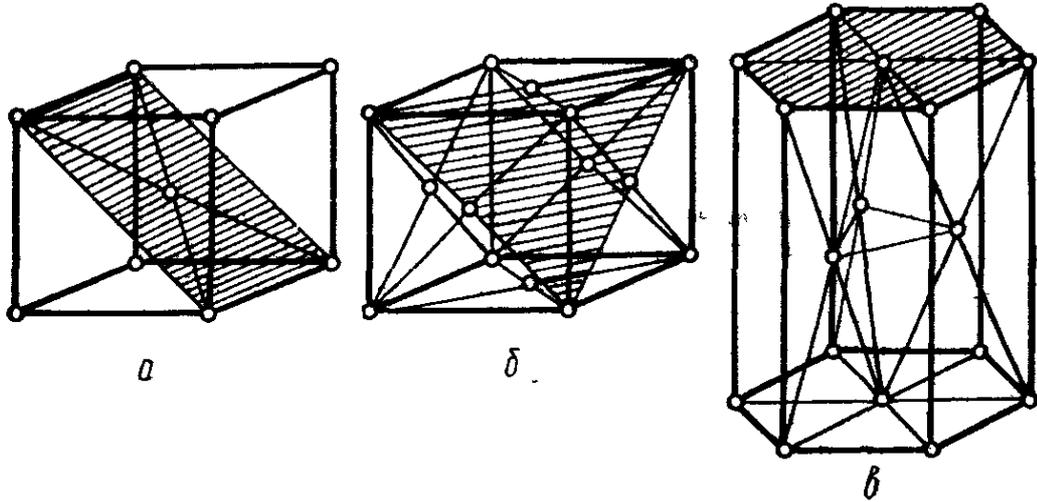


Рис. 82

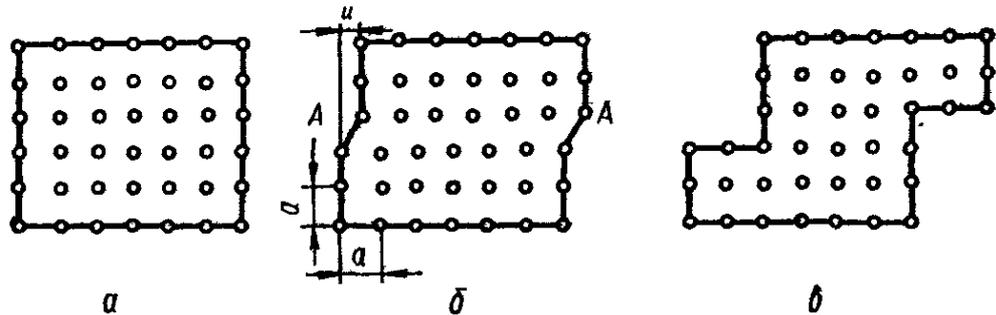


Рис. 83

атомы располагаются наиболее плотно. В каждой из кристаллических решеток, изображенных на рис. 82, одна такая плоскость заштрихована, а направления скольжений указаны стрелками. Важной характеристикой этих плоскостей и направлений является величина сдвигающего напряжения τ , вызывающего скольжение.

Рассмотрим механизм образования пластической деформации в пределах одного кристалла с совершенной кристаллической решеткой, упрощенная модель которой изображена на рис. 83, а.

Пусть в такой решетке верхний слой атомов смещается относительно нижнего по плоскости $A-A$. Если предположить, что в процессе сдвига кристаллическая решетка не искажается, т. е. в частях ее выше и ниже плоскости $A-A$ расстояния между атомами остаются неизменными, то можно прийти к выводу, что все атомы верхнего слоя смещаются относительно нижнего одновременно и на одну и ту же величину.

Пока взаимное смещение u (рис. 83, б), возрастая, остается меньше половины расстояния между атомами ($a/2$), силы взаимодействия последних препятствуют сдвигу. Как только это смещение превысит расстояние $a/2$, силы взаимодействия начинают способствовать смещению решетки в новое устойчивое положение равновесия. Пластическая деформация произойдет в результате смещения части решетки на расстояние, кратное a (рис. 83, в). Наименьшая пластическая деформация соответствует смещению на a . В результате таких смещений каждый предыдущий атом занимает место последующего, все атомы оказываются на местах, присущих данной кристаллической решетке. Кристалл сохраняет свои свойства, меняя лишь конфигурацию.

Точные теоретические расчеты, основанные на подобной картине деформации, позволяют определить максимальные касательные напряжения, которые должны возникнуть в кристалле, чтобы появилась пластическая деформация. В действительности она начинает образовываться при напряжениях, в сотни раз меньших, чем дает теория. Такое расхождение между теоретическим и действительным сопротивлением сдвигу в кристаллах объясняется тем, что переход атомов из одного положения в другое совершается не одновременно, а во времени, подобно волне, с местными искажениями решетки, называемыми *дислокациями*.

На рис. 84, а показана так называемая краевая дислокация. Верхняя часть решетки сдвинута относительно нижней на одно межатомное расстояние, причем зафиксировано положение, когда сдвиг охватил еще не всю плоскость скольжения. В результате появилось искажение решетки: одна вертикальная атомная плоскость верхней половины не имеет продолжения в нижней.

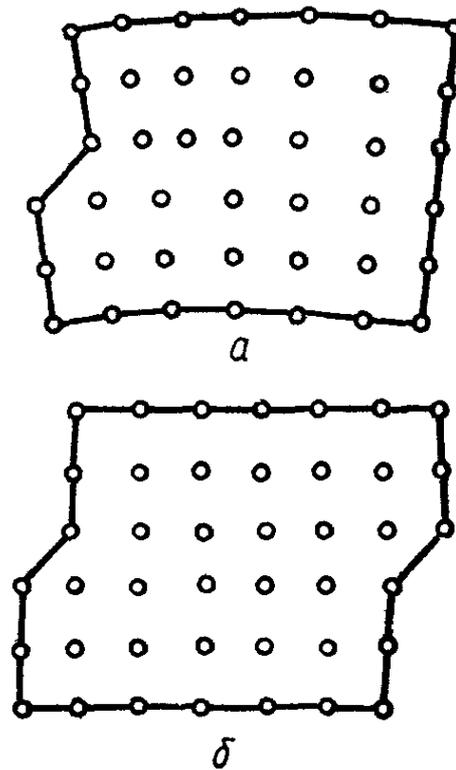


Рис. 84

Отметим, что реальные кристаллы либо с самого своего возникновения содержат дислокации, либо имеют какие-то иные несовершенства и в них дислокации образуются уже при низких напряжениях сдвига. Поэтому-то при низких напряжениях дислокации движутся через кристаллическую решетку, отчего и происходит пластическая деформация кристалла. После того как дислокация выйдет наружу кристалла, форма его изменится, но структура останется прежней (рис. 84, б). Возникают новые дислокации и движутся через кристалл. Суммарно результат этих скольжений в зернах проявляется в виде пластической деформации образца.

Перемещение дислокации через кристалл можно уподобить движению складки по ковра. Когда складка пройдет через весь ковер, он будет несколько сдвинут. Сила, необходимая для перемещения складки, существенно меньше той, которая нужна, чтобы сдвинуть весь ковер целиком.

Так теория дислокаций объясняет механизм образования пластических деформаций и расхождение между теоретической и действительной прочностью металлов.

При массовой пластической деформации дислокации, движущиеся в кристаллической решетке по пересекающимся плоскостям, образуют неподвижные пороги, поэтому перемещение дислокаций тормозится. Суммарно это проявляется в виде упрочнения металла после определенной пластической деформации.

Появление сдвигов в кристаллической решетке, приводящих к пластической деформации, не исключает искажений кристаллической решетки, соответствующих упругим деформациям. Это подтверждается тем, что при любой стадии деформации образца, вплоть до разрыва, полная деформация состоит из упругой и пластической.

Повышение сопротивления движению дислокаций приводит к увеличению прочности металла. Этого достигают введением в металлы специальных примесей, термической обработкой, наклепом и т. п. Уже сделаны первые шаги по созданию металлов, не имеющих дефектов кристаллической решетки. Получены бездислокационные и бездефектные металлические кристаллы («усы»), обладающие очень высокой прочностью, приближающейся к теоретической.

4.4. Концентрация напряжений

Концентрация напряжений — местное повышение напряжений в элементах конструкций, обусловленное резкими переходами в поперечных сечениях, связанными с наличием отверстий, выкружек, каверн, надрезов и т. п., называемых *концентраторами*. На рис. 85 по-

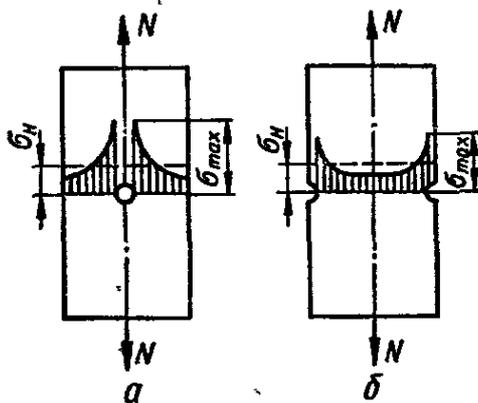


Рис. 85

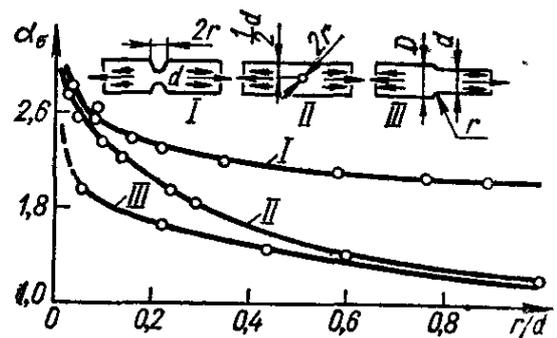


Рис. 86

казаны графики распределения напряжений в сечении растягиваемой полосы, ослабленной круглым отверстием (рис. 85, а) и полукруглыми выкружками (рис. 85, б).

Степень концентрации напряжений характеризуется так называемым *коэффициентом концентрации*

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \quad (4.16)$$

где σ_{\max} — максимальное напряжение в месте концентрации, σ_n — номинальное напряжение, определяемое по формуле

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\min}}. \quad (4.17)$$

Здесь N — нормальная сила в ослабленном сечении; F_{\min} — площадь ослабленного сечения, называемая *площадью нетто*.

Иногда номинальное напряжение определяют по формуле

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{бр}}, \quad (4.18)$$

где $F_{бр}$ — площадь сплошного сечения (без учета ослабления ее наличием концентратора), или *площадь брутто*.

При концентраторах, занимающих незначительную часть сечения (например, при малых отверстиях), номинальные напряжения, определяемые по формулам (4.17) и (4.18), практически будут одинаковыми.

При определении максимальных напряжений в зоне концентратора расчетным путем коэффициент концентрации, вычисленный по формуле (4.16), называется *теоретическим коэффициентом концентрации*. Например, в случае малого круглого отверстия (рис. 85, а) $\alpha = 3$, а в случае полукруглых вырезов (рис. 85, б) $\alpha \approx 2$. В действительности коэффициент концентрации реальных элементов конструкций, так называемый *эффективный коэффициент концентрации* k , определяемый экспериментально, оказывается меньше теоретического ($\alpha > k$). Обычно расчеты на прочность с учетом концентрации напряжений проводят на основании значений величин теоретических коэффициентов концентрации, значения которых для случая растяжения полосы и круглых стержней с различной формой концентраторов приведены на рис. 86 и ниже соответственно.

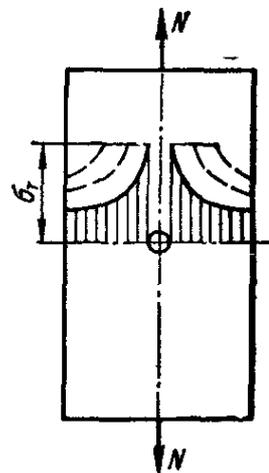


Рис. 87

Вид концентратора напряжений

α

Полукруглая выточка при отношении радиуса к диаметру стержня

0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1

Галтель, при отношении радиуса галтели к диаметру стержня

0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10

Переход под прямым углом

2,0

Острая V-образная выточка

3,0

Нарезка дюймовая

2,0

Нарезка метрическая

2,5

Отверстие, при отношении диаметра отверстия к диаметру стержня от 0,1 до 0,33

2,0

Риски от реза на поверхности изделия

1,2—1,4

Более полные данные о коэффициентах концентрации приведены в Приложении 2.

Высокая концентрация напряжений особенно опасна для элементов конструкций, изготовленных из хрупких материалов, так как при достижении в зоне концентрации напряжений, равных пределу прочности материала, материал начнет разрушаться. В случае пластичного материала концентрация напряжений менее опасна, поскольку

при достижении в зоне концентратора напряжения, равного пределу текучести от произойдет перераспределение напряжений по схеме, показанной штриховыми линиями на рис. 87.

4.5. Влияние различных факторов на механические свойства материалов

На свойства металлов и сплавов существенное влияние оказывают химический состав, технология их получения, термическая и механическая обработка, условия эксплуатации — температура, среда, характер нагрузки и др.

Ниже рассматривается влияние некоторых факторов на механические характеристики наиболее важных в машиностроении материалов — сталей, чугуна, алюминия, различных сплавов.

Влияние скорости деформации. При увеличении скорости деформации все материалы, находящиеся в пластическом состоянии, обнаруживают общую тенденцию к увеличению сопротивляемости деформированию. Чем выше скорость деформирования, тем выше предел текучести и временное сопротивление. Особенно сильно зависят от скорости нагружения механические свойства пластмасс и других органических материалов. У металлов влияние скорости нагружения заметно проявляется лишь при значительной разнице в скоростях.

Сравнение результатов статических и динамических испытаний малоуглеродистых сталей на растяжение при нормальной температуре (рис. 88) показывает следующее:

- 1) кривая 1 динамического растяжения лежит выше кривой 2 статического растяжения;
- 2) максимум диаграммы для динамической нагрузки смещается в сторону начала диаграммы;
- 3) временное сопротивление при динамической нагрузке повышается, но меньше, чем предел текучести.
- 4) модуль упругости при динамической нагрузке практически не изменяется.

Влияние технологических факторов. Механические свойства стали одного и того же состава весьма сильно изменяются в зависимости от способа ее получения и обработки.

При отливке заготовок возможно образование различных внутренних дефектов в виде пустот, раковин и включений, снижающих прочность изготовленных деталей. В связи с этим требуется тщательный контроль качества таких деталей рентгеновским, ультразвуковым или каким-либо другим способом.

Прокатка делает сталь анизотропной. Прокатанная сталь имеет характерную структуру, у которой зерна, вытянутые в направлении прокатки, образуют своего рода волокна. Механические свойства стали в направлении прокатки существенно отличаются от таковых в направлении, перпендикулярном к ней. Образцы, вырезанные таким образом, что их ось совпадает с направлением прокатки, оказываются более прочными.

Предварительная вытяжка в холодном состоянии за предел текучести (наклеп) очень сильно повышает предел текучести и прочности, но снижает остаточное удлинение после разрыва. Материал становится более упругим и прочным, но менее пластичным.

Волочение в холодном состоянии, представляющее собой вытяжку с обжатием, еще сильнее влияет на механические свойства стали. Стальная проволока и стальные ленты полученные волочением, весьма прочны.

Токарная обработка, обработка поверхности роликами, обдувка дробью, хромирование, никелирование, алитирование, азотирование и другие виды поверхностной обработки могут оказать существенное влияние на прочность деталей, особенно работающих при переменных напряжениях.

Влияние термической обработки. Закалка стали значительно повышает ее твердость, предел текучести и предел прочности, но сильно снижает пластичность. Модуль упругости стали закалка практически не меняет. Если нужна высокая поверхностная твердость с сохранением других свойств стали, используют поверхностную закалку токами высокой частоты. Для малоуглеродистых сталей с этой целью применяют цементацию — увеличение в поверхностном слое содержания углерода — с последующей закалкой. При этом закаливается только науглероженный поверхностный слой, а основная часть материала сохраняет свойства малоуглеродистой стали.

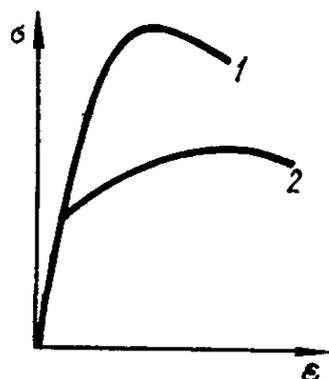


Рис. 88

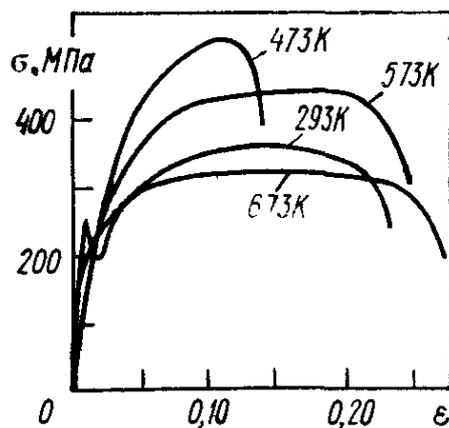


Рис. 89

Для устранения иаклепа используют отжиг. Чтобы выровнять и улучшить структуру, а также улучшить механические свойства стали, применяют нормализацию. Подробно эти виды термической обработки рассматриваются в металловедении.

Влияние температуры. Многие детали современных машин (например, паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и др.) работают при высоких температурах, достигающих 1073—1273 К. Испытания показали, что *все механические характеристики металлов существенно изменяются в зависимости от температуры.*

На рис. 89 приведены диаграммы напряжения углеродистой стали при различных температурах, а на рис. 90 — графики зависимости предела текучести, временного сопротивления и относительного удлинения при разрыве от температуры. В диапазоне температур 423—523 К временное сопротивление достигает наибольшего значения, а относительное удлинение после разрыва — наименьшего; сталь, как говорят, становится сипеломкой. При более высоких температурах прочность углеродистой стали быстро падает, поэтому выше 623—673 К такую сталь не применяют.

При повышении температуры также существенно уменьшается модуль упругости E (рис. 91), а коэффициент Пуассона несколько возрастает. Так, при повышении температуры от комнатной до 773 К коэффициент Пуассона увеличивается с 0,28 до 0,33.

Углеродистые стали при высоких температурах сильно окисляются, на их поверхности образуется окалина. В связи с этим применяют специальные жаростойкие и жаропрочные стали, содержащие различ-

ные легирующие добавки. *Жаростойкостью* называется свойство материала противостоять при высоких температурах химическому разрушению поверхности, а *жаропрочностью* — способность сохранять при высоких температурах механические свойства. Созданы специальные сплавы, а также металлокерамические материалы, надежно работающие при температурах до 1273 К. Механические характеристики для некоторых сталей и сплавов при высоких температурах приведены в табл. 15.

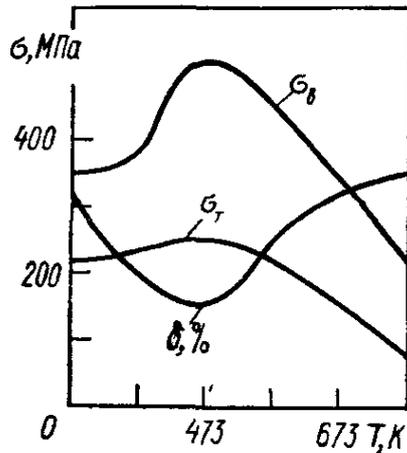


Рис. 90

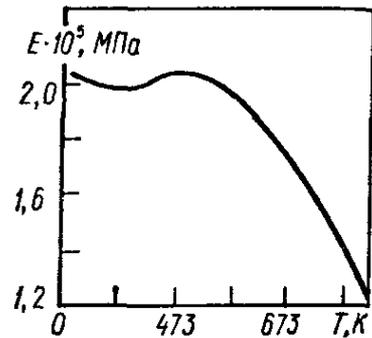


Рис. 91

Ползучесть. При высоких температурах существенное значение имеет явление *ползучести* материалов (крип), заключающееся в росте пластической деформации с течением времени при постоянном напряжении, не вызывающем пластических деформаций при кратковременном действии нагрузки.

Ползучесть обуславливает возможность непрерывного изменения с течением времени размеров нагруженных при высоких температурах деталей, что может нарушить работу машин.

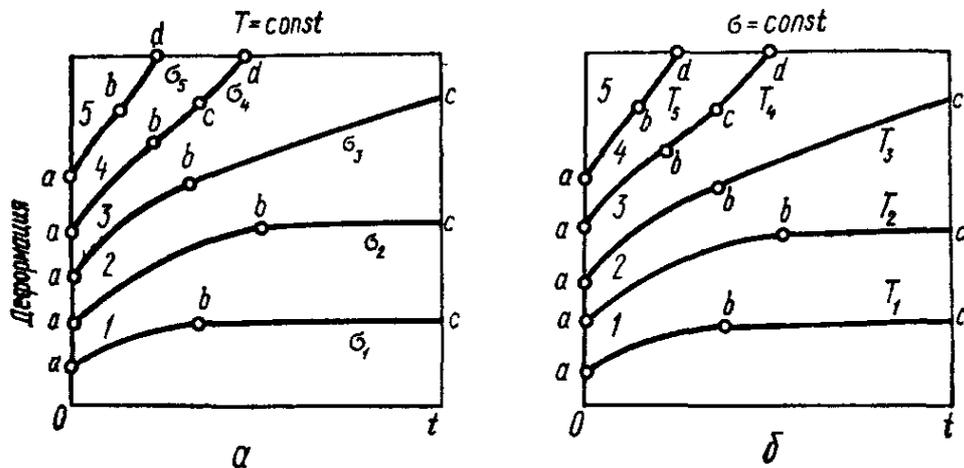


Рис. 92

В зависимости от величины напряжения и температуры деформация, происходящая в результате ползучести, может либо прекратиться, либо продолжаться до разрушения материала.

Зависимости суммарной (ϵ) или остаточной ($\epsilon_{ост}$) деформации от времени испытания при постоянном напряжении в температуре называют *кривыми ползучести*.

Вид кривых ползучести зависит от напряжения и температуры. Для сравнительно небольших температур (673—733 К) и напряжений (80—150 МПа) кривая ползучести для стали имеет характерный вид

(рис. 92). Остаточная деформация вначале быстро нарастает, но при постепенно уменьшающейся скорости ползучести $\dot{\epsilon}_{\text{ост}} = d\epsilon_{\text{ост}}/dt$ (первая стадия — стадия неустановившейся ползучести), затем скорость ползучести остается примерно постоянной и является минимальной (вторая стадия — стадия установившейся ползучести) и, наконец, перед разрушением образца (точка d) скорость ползучести быстро возрастает (третья стадия — стадия ускоренной ползучести). Для других материалов и других условий кривые ползучести могут отличаться от присутствием той или иной стадии.

Повышенные напряжения при постоянной температуре, как и возрастание температуры при постоянном напряжении, обуславливают увеличение скорости ползучести.

Наибольшее напряжение, при котором скорость или деформация ползучести при данной температуре за определенный промежуток времени не превышает установленной величины (например, скорости 0,0001 %/ч или деформации 1 % за 10 000 ч), называется пределом ползучести.

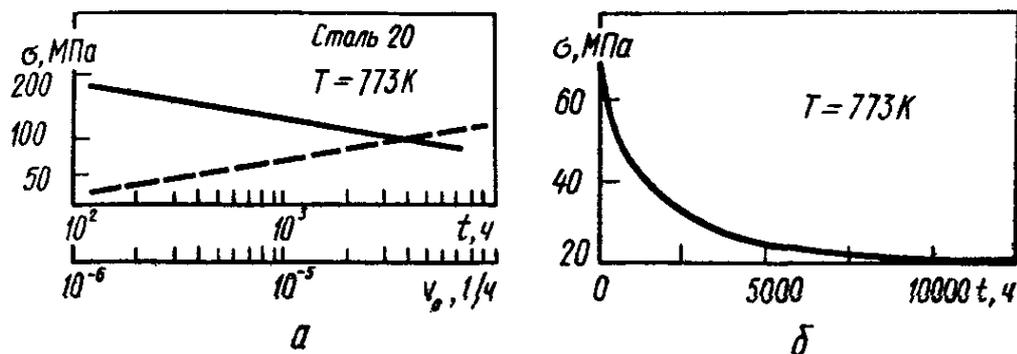


Рис. 93

Если предел ползучести определяют по величине деформации, то обозначают его буквой σ с тремя числовыми индексами: двумя нижними и одним верхним. Первый нижний индекс отражает заданное удлинение (суммарное или остаточное), %; второй нижний индекс — заданную продолжительность времени испытания, ч; верхний индекс — температуру, К. Например, запись $\sigma_{0,2/100}^{973}$ означает предел ползучести при допуске на деформацию 0,2 % за 100 ч испытания при температуре 973 К. При этом необходимо дополнительно указать, по суммарной или остаточной деформации определялся предел ползучести. Пределы ползучести для некоторых сталей и сплавов при высоких температурах приведены в табл. 15, а для ряда тугоплавких материалов — в табл. 16.

В случае определения предела ползучести по скорости ползучести его обозначают буквой σ с двумя числовыми индексами: одним верхним и одним нижним. Нижний индекс отражает заданную скорость ползучести, %/ч; верхний — температуру испытания, К. Например, $\sigma_{1 \cdot 10^{-5}}^{873}$ — это предел ползучести при скорости ее $1 \cdot 10^{-5}$ %/ч при температуре 873 К. При этом необходимо дополнительно указать время испытания, за которое была достигнута заданная скорость ползучести.

Детали, работающие при высоких температурах, рассчитывают на ползучесть специальными методами с использованием экспериментальных данных, характеризующих ползучесть материала. Целью таких расчетов является определение пределов ползучести.

По результатам экспериментального определения минимальной скорости ползучести $\dot{\epsilon}_{\text{ост min}}$ при растяжении образцов строят графики в логарифмических координатах $\lg \sigma - \lg \dot{\epsilon}_{\text{ост min}}$. Экспериментальные точки хорошо группируются около некоторой прямой (рис. 93, а).

Отметим, что у некоторых материалов (свинца, бетона, высокополимерных материалов и др.) ползучесть наблюдается и при нормальной температуре.

Длительная прочность. В случае высокой температуры и длительного воздействия нагрузки наблюдается разрушение материала при напряжении, величина которого меньше временного сопротивления материала при данной температуре. В связи с этим возникает необходимость определять длительную прочность материалов.

Пределом длительной прочности называется напряжение, вызывающее разрыв образца после заданного срока непрерывного действия этого напряжения при определенной температуре. Обозначается предел длительной прочности буквой σ с двумя числовыми индексами. Верхний индекс дает температуру испытания, К, нижний — заданную продолжительность испытания до разрушения, ч. Последнюю можно обозначить числом часов или цифрой 10 с показателем степени. Например,

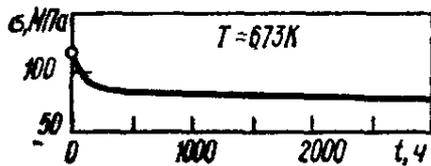


Рис. 94

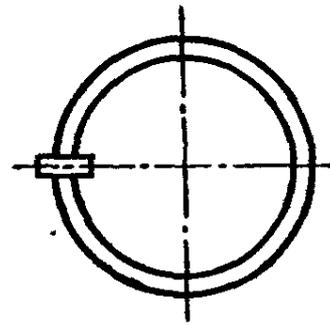


Рис. 95

σ_{10}^{973} или σ_{1000}^{973} — предел длительной прочности за 1000 ч испытания при температуре 973 К. Пределы длительной прочности для отдельных сталей и сплавов при высоких температурах приведены в табл. 15, а для ряда тугоплавких материалов — в табл. 16.

Испытания на длительную прочность заключаются в том, что образцы подвергают различным напряжениям при определенной температуре и определяют время до их разрыва. Результат представляют в виде графика (рис. 93, б). По кривой длительной прочности материала можно определить разрушающее напряжение по заданной продолжительности службы детали при данной температуре. Наоборот, по заданному напряжению можно определить время до разрушения. Например, деталь, изготовленная из материала, для которого кривая длительной прочности изображена на рис. 93, б, при напряжении 30 МПа и температуре 773 К разрушится через 2550 ч.

Результаты экспериментального определения длительной прочности удобно представлять в логарифмических координатах $\lg \sigma - \lg t$, где они достаточно хорошо аппроксимируются прямыми (рис. 93, а).

Отметим, что чем меньше разрушающее напряжение, а значит, больше время до разрыва, тем меньше относительное удлинение при разрыве, т. е. материал становится более хрупким. Это явление называется *охрупчиванием*. Для ряда материалов (например, для высокополимеров) указанный эффект проявляется и при комнатной температуре.

Релаксацией напряжений называется уменьшение их с течением времени вследствие ползучести в нагруженной детали при неизменной ее полной деформации. Это обусловлено тем, что увеличение с течением времени пластической деформации приводит к уменьшению

упругой деформации и падению напряжения. У большинства металлов релаксация заметна лишь при высоких температурах (рис. 94).

Это явление можно проиллюстрировать следующими примерами. Если между разведенными концами разрезанного стального кольца (рис. 95) вставить пластинку, то вследствие деформации кольца в нем возникнут напряжения и его концы, стремясь сблизиться, с большой силой сожмут пластинку. Если это соединение выдержать некоторое время при высокой температуре, то в кольце произойдет релаксация напряжений, сила зажатия пластинки уменьшится, и ее можно будет легко вынуть.

Известно, что начальная затяжка болтов, работающих при высоких температурах, с течением времени ослабевает и это вызывает необходимость их подтягивать.

Влияние низких температур. На механические свойства некоторых материалов существенно влияют низкие температуры. Проявляется это в том, что материалы, пластичные при нормальной температуре, становятся хрупкими при низких температурах. Такие материалы называют *хладноломкими*.

Хладноломкость характерна для металлов, имеющих кристаллическую решетку в виде объемно-центрированного куба или гексагональную. К числу их относится большинство черных металлов, в частности стали, а также цинковые сплавы. Проявляется хладноломкость при статическом действии нагрузки и в особенности при динамическом. В качестве примера на рис. 96 приведены графики изменения предела текучести, временного сопротивления, относительного удлинения и сужения при статических испытаниях углеродистой стали в области низких температур.

Металлы, кристаллизующиеся в системе куба с центрированными гранями (медь, алюминий, никель, серебро, золото и др.), не обнаруживают хладноломкости ни при каком понижении температуры. Например, алюминий при температуре жидкого азота (77 К) увеличивает прочность приблизительно в 2 раза, увеличивая одновременно относительное удлинение в 4 раза. Аналогично ведут себя медь и никель. Многие сплавы алюминия, меди, а также некоторые стали не обладают свойством хладноломкости.

В табл. 17 представлены основные механические характеристики некоторых конструкционных материалов при низких температурах.

4.6. Допускаемые напряжения

Определив механические свойства материала путем проведения соответствующих испытаний образцов, можно найти, какие напряжения являются безопасными для работы конструкции, т. е. установить *допускаемые напряжения*. Очевидно, допускаемое напряжение должно

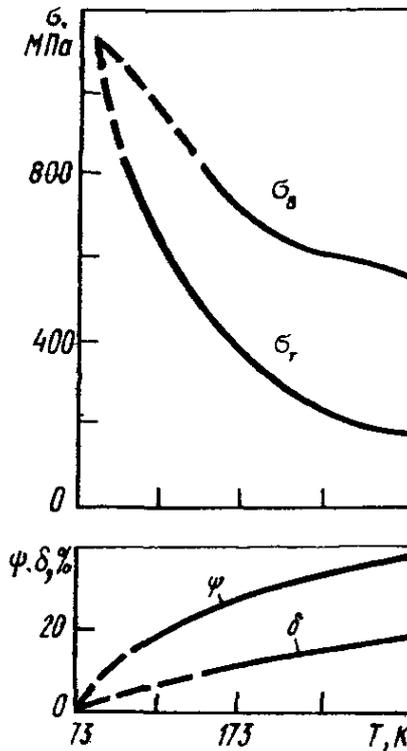


Рис. 96

быть меньше опасного для данного материала напряжения, составляя некоторую его часть. Примем

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (4.19)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение; σ_0 — опасное напряжение; n — коэффициент запаса прочности.

Для деталей, изготовленных из пластичных материалов, опасным напряжением следует считать предел текучести $\sigma_0 = \sigma_T$, из хрупких — временное сопротивление $\sigma_0 = \sigma_B$.

Выбор коэффициента запаса прочности n , показывающего во сколько раз допускаемое напряжение меньше опасного, зависит от состояния материала (хрупкое, пластичное), характера приложения нагрузки (статическая, динамическая, повторно-переменная), а также от таких общих факторов, как неоднородность материала, неточность в задании внешних нагрузок, приближенность расчетных схем и формул и т. п. Величина запаса прочности зависит также от того, какое напряжение считаем опасным (σ_T или σ_B). Для пластичных материалов

при статической нагрузке, когда $\sigma_0 = \sigma_T$; $n = n_T$, $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$, запасы прочности принимают равным $n_T = 1,4 - 1,6$. При статических нагрузках

в случае хрупких материалов, когда $\sigma_0 = \sigma_B$; $n = n_B$, $[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}$, запасы прочности принимают равным $n_B = 2,5 - 3,0$.

Иногда и для пластичных материалов допускаемые напряжения определяют по временному сопротивлению, величину которого практически определить проще. Тогда $[\sigma] = \sigma_B/n_B$. Учитывая, что $\sigma_T = (0,5 - 0,7) \sigma_B$, получаем $n_B = 2,4 - 2,6$.

Иногда допускаемые напряжения на растяжение обозначают $[\sigma_+]$, а на сжатие — $[\sigma_-]$. Хрупкие материалы сопротивляются сжатию лучше, чем растяжению, и для них $[\sigma_+] < [\sigma_-]$.

При статических нагрузках в случае однородных хрупких материалов следует учитывать концентрацию напряжений и расчет вести по наибольшим местным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_B \leq [\sigma],$$

где σ_B — номинальное напряжение, определяемое с учетом ослабления сечения, но без учета концентрации напряжений.

Ориентировочные значения допускаемых напряжений при статических нагрузках для различных материалов приведены в табл. 1. Данные о физико-механических свойствах основных конструктивных материалов* приведены в Приложении 1.

* Сведения, относящиеся к специфическим вопросам сопротивления композитных материалов, можно найти в книге: Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерным и композитным материалам. — Рига: Зинатне, 1980. — 572 с.

Таблица 10. Модули упругости (E и G) и коэффициент Пуассона (μ)

Материал	$E \cdot 10^{-4}$, МПа	$G \cdot 10^{-4}$, МПа	μ
Чугун серый, белый	1,13—1,57	4,4	0,23—0,27
Ковкий чугун	1,52	—	—
Углеродистые стали	1,96—2,06	7,85—7,94	0,24—0,28
Легированные стали	2,06—2,16	7,85—7,94	0,25—0,30
Вольфрам	4,12	16,3	0,26
Вольфрамолитбденовые сплавы			
W + 20,08 % Mo	3,97	15,5	0,28
W + 39,5 % Mo	3,28	15,0	0,27
W + 50,1 % Mo	3,72	14,5	0,28
W + 60,1 % Mo	3,57	14,2	0,26
W + 79,5 % Mo	3,46	12,8	0,35
Молибден	3,28	12,2	0,35
Медь прокатанная	1,08	3,92	0,31—0,34
Медь холоднотянутая	1,27	4,81	—
Медь литая	0,82	—	—
Бронза фосфористая катаная	1,13	4,12	0,32—0,35
Бронза марганцовистая катаная	1,08	3,92	0,35
Латунь холоднотянутая	0,89—0,97	3,43—3,63	0,32—0,42
Латунь карбелльная катаная	0,98	—	0,36
Алюминий катаный	0,68	2,55—2,65	0,32—0,36
Алюминиевая проволока тянутая	0,69	—	—
Алюминиевая бронза литая	1,03	4,12	—
Дюралюминий катаный	0,7	2,65	—
Цинк катаный	0,82	3,14	0,27
Свинец	0,17	0,69	0,42
Лед	0,1	0,27—0,29	—
Стекло	0,55	2,16	0,25
Гранит	0,48	—	—
Известняк	0,41	—	—
Мрамор	0,55	—	—
Песчанник	0,18	—	—
Кладка из			
гранита	0,09—0,1	—	—
известняка	0,6	—	—
кирпича	0,026—0,029	—	—
Бетон при пределе прочности	—	—	0,16—0,18
10 МПа	0,143—0,192	—	—
15 МПа	0,161—0,21	—	—
20 МПа	0,178—0,228	—	—
Дерево вдоль волокон	0,1—0,12	0,054	—

Материал	$E \cdot 10^{-4}$, МПа	$G \cdot 10^{-4}$, МПа	μ
Дерево поперек волокон	0,005—0,01	—	—
Каучук	0,00008	—	0,47
Текстолит	0,06—0,1	—	—
Гетинакс	0,1—0,17	—	—
Бакелит	0,02—0,03	—	0,36
Вискомлит (ИМ-44)	0,039—0,041	—	0,37
Целлулонд	0,014—0,027	—	0,33—0,38

Таблица 11. Модули упругости E и G (в скобках) ($\times 10^{-2}$ МПа) ряда конструкционных материалов при комнатной и пониженных температурах

Материал	Температура, К						
	293	273	233	193	153	113	77

Нержавеющие стали

ХВГ	2,22 (0,858)	2,232 (0,876)	2,258 (0,879)	2,280 (0,894)	2,302 (0,903)	2,320 (0,910)	2,328 (0,915)
1X17H2	2,210 (0,855)	2,225 (0,860)	2,250 (0,870)	2,266 (0,880)	2,285 (0,886)	2,300 (0,895)	2,320 (0,900)

Титановые сплавы

АТЗ, листы	1,205 (0,457)	1,226 (0,466)	1,250 (0,576)	1,280 (0,486)	1,302 (0,496)	1,320 (0,505)	1,330 (0,509)
ОТ4 листы	1,202 (0,462)	1,220 (0,469)	1,243 (0,480)	1,266 (0,490)	1,290 (0,500)	1,312 (0,508)	1,326 (0,514)

Продолжение табл 11

Материал	Температура, К						
	293	273	233	193	153	113	77
сварной шов	1,202 (0,466)	1,226 (0,471)	1,254 (0,481)	1,275 (0,492)	1,301 (0,502)	1,318 (0,511)	1,333 (0,517)
ВТ8, прутки	1,264 (0,464)	1,278 (0,469)	1,297 (0,476)	1,316 (0,482)	1,333 (0,489)	1,350 (0,495)	1,364 (0,504)
ВТЗ-1, прутки	1,328 (0,485)	1,338 (0,490)	1,356 (0,497)	1,375 (0,502)	1,391 (0,508)	1,406 (0,514)	1,418 (0,519)

Тугоплавкие металлы

Молибден	3,499	3,511	3,532	3,550	3,568	3,579	3,583
Сплав молибдена Mo + + 0,07 % C	3,372	3,385	3,405	3,42	3,443	3,445	3,450
Ниобий							
прутки	1,127	1,130	1,138	1,145	1,156	1,172	1,182
листы	1,078	1,080	1,086	1,095	1,104	1,112	1,113
Сплав ниобия Nb+0,1 %C+ + 1 % Zr	1,264	1,270	1,278	1,284	1,291	1,304	1,312

Таблица 12. Модули упругости и коэффициент Пуассона тугоплавких металлов при комнатной и высоких температурах

Модули упругости и коэффициент Пуассона	Температура, К								
	293	373	473	573	673	773	873	973	1073

Вольфрам

литой

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	4,12	4,08	4,04	4,01	3,97	3,93	3,89	3,85	3,82
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,63	1,62	1,60	1,58	1,57	1,55	1,53	1,51	1,49
μ	0,26	0,26	0,26	0,27	0,26	0,27	0,27	0,27	0,28

металлокерамический

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	3,95	3,93	3,88	3,84	3,80	3,75	3,70	3,66	3,61
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,48	1,46	1,44	1,42	1,40	1,38	1,36	1,35	1,34
μ	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,34

Молибден

литой

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	3,28	3,24	3,20	3,16	3,12	3,01	3,03	2,98	2,94
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,21	1,20	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1,10	1,08
μ	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,36	0,35	0,35	0,36

металлокерамический

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	3,28	3,22	3,17	3,12	3,06	3,00	2,95	2,88	2,82
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,24	1,22	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,09	1,07
μ	0,32	0,31	0,32	0,32	0,31	0,31	0,31	0,32	0,31

Тантал

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	1,79	1,73	1,74	1,72	1,70	1,68	1,67	1,65	1,64
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	0,72	0,71	0,70	0,70	0,69	0,68	0,67	0,67	0,66
μ	0,24	0,24	0,25	0,24	0,25	0,24	0,25	0,23	0,24

Модуль упругости и коэффициент Пуассона	Температура, К								
	1173	1273	1373	1473	1573	1673	1773	1873	1973

Вольфрам

лнтой

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	3,78	3,74	3,70	3,69	3,62	3,57	3,51	3,42	3,35
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,48	1,46	1,44	1,42	1,40	1,38	1,36	1,33	1,30
μ	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,29	0,28	0,28

металлокерамический

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	3,57	3,52	3,48	3,43	3,38	3,33	3,23	3,12	3,01
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,32	1,30	1,28	1,26	1,24	1,22	1,20	—	—
μ	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,36	0,34	—	—

Молибден

лнтой

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	2,90	2,86	2,81	2,74	2,68	2,60	2,52	2,43	2,36
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,07	1,05	1,03	1,01	0,98	0,96	0,93	0,91	0,88
μ	0,35	0,36	0,36	0,36	0,36	0,35	0,35	0,33	0,34

металлокерамический

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	2,76	2,71	2,64	2,59	2,53	2,47	2,27	2,12	1,97
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,05	1,03	1,00	0,98	0,96	0,94	—	—	—
μ	0,31	0,31	0,32	0,32	0,31	0,28	—	—	—

Тантал

$E \cdot 10^{-5}$, МПа	1,63	1,61	1,60	1,59	1,58	1,56	1,55	1,53	1,52
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	0,66	0,65	0,65	0,64	0,64	0,63	0,63	0,62	0,62
μ	0,24	0,24	0,23	0,24	0,24	0,24	0,23	0,23	0,23

Модули упругости и коэффициент Пуассона	Температура, К									
	2073	2173	2273	2373	2473	2573	2673	2773	2873	2973
Вольфрам										
литой										
$E \cdot 10^{-5}$, МПа	3,28	3,20	3,12	3,04	2,96	2,89	2,81	2,74	2,66	2,58
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	1,27	1,24	1,21	1,18	1,14	1,12	1,09	1,06	1,03	—
μ	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	—
металлокерамический										
$E \cdot 10^{-5}$, МПа	2,90	2,80	2,70	2,60	2,50	—	—	—	—	—
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
μ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Молибден										
литой										
$E \cdot 10^{-5}$, МПа	2,21	2,20	2,12	2,04	1,96	1,88	—	—	—	—
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	0,84	0,81	0,77	—	—	—	—	—	—	—
μ	0,35	0,36	0,38	—	—	—	—	—	—	—
металлокерамический										
$E \cdot 10^{-5}$, МПа	1,81	1,66	—	—	—	—	—	—	—	—
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
μ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Тантал										
$E \cdot 10^{-5}$, МПа	1,51	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$G \cdot 10^{-5}$, МПа	0,61	—	—	—	—	—	—	—	—	—
μ	0,23	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 13. Соотношения между числами твердости по Бринеллю (*НВ*), Роквеллу (*НRC*) и пределом прочности (σ_B) для сталей

Диаметр отпечатка, мм	<i>НВ</i> , МПа	<i>НRC</i>	σ_B (МПа) для сталей			
			углеродистой	хромистой	хромоникелевой	хромомолибденовой
2,34	6880	65	2480	—	2340	2270
2,37	6700	64	2410	—	2280	2210
2,39	6590	63	2370	—	2240	2180
2,42	6430	62	2310	—	2180	2120
2,45	6270	61	2260	2180	2130	2070
2,48	6110	60	2200	2130	2070	2020
2,51	5970	59	2140	2080	2020	1970
2,54	5820	58	2080	2030	1970	1920
2,57	5690	57	2050	2000	1940	1880
2,62	5470	55	1960	1910	1850	1800
2,71	5100	52	1830	1780	1730	1680
2,78	4850	50	1750	1700	1650	1600
2,85	4610	48	1650	1620	1560	1520
2,91	4410	46	1590	1540	1500	1450
2,98	4200	44	1510	1470	1430	1380
3,08	3930	42	1410	1370	1340	1300
3,14	3780	40	1360	1320	1280	1250
3,24	3540	38	1280	1240	1210	1170
3,34	3330	36	1200	1170	1130	1100
3,44	3130	34	1120	1090	1060	1030
3,52	2980	32	1070	1040	1020	980
3,62	2820	30	1020	980	960	930
3,70	2690	28	980	940	920	890
3,80	2550	26	920	890	860	840
3,90	2410	24	870	840	820	800
4,00	2290	22	820	800	780	760
4,10	2170	20	780	760	740	720
4,20	2070	18	740	720	700	680
4,26	2000	—	720	700	680	660
4,37	1900	—	680	670	650	630
4,48	1800	—	650	630	610	590
4,60	1700	—	610	590	580	560
4,74	1600	—	580	560	540	520
4,88	1500	—	540	520	510	500
5,05	1400	—	500	490	480	470
5,21	1300	—	470	450	440	430
5,42	1200	—	430	420	410	400
5,63	1100	—	400	390	380	370
5,83	1020	—	370	360	350	340

Таблица 14. Числа твердости (МПа) тугоплавких металлов и сплавов на их основе при комнатной и высоких температурах

Материал	Температура, К					
	293	473	673	873	1073	1273
Вольфрам						
отожженный	3500	1600	1200	950	820	700
наклепанный	4500	2400	1610	1500	1300	1200
Молибден						
отожженный	1600	800	700	700	600	600
наклепанный	2400	1600	1400	1400	1200	800
Сплавы ниобия						
Nb + 5 % Mo	1600	1350	1300	1150	1000	600
Nb + 12 % W	1900	1700	1610	1590	1200	800
Nb + 25 % Zr	2800	2800	2420	2400	1800	1000
Тантал	2400	2100	1300	1150	1000	600
Сплав тантала						
Ta + 10 % W	1400	1200	1300	900	720	400

Продолжение табл. 14

Материал	Температура, К					
	1473	1673	1873	2073	2273	2473
Вольфрам						
отожженный	600	500	400	200	160	100
наклепанный	1100	600	400	200	160	100
Молибден						
отожженный	300	300	300	200	160	100
наклепанный	600	400	300	200	160	100
Сплавы ниобия						
Nb + 5 % Mo	300	200	—	—	—	—
Nb + 12 % W	400	200	—	—	—	—
Nb + 25 % Zr	400	100	—	—	—	—
Тантал	500	400	—	—	—	—
Сплав тантала						
Ta + 10 % W	300	200	—	—	—	—

Таблица 15. Механические свойства (МПа) некоторых материалов при высоких температурах

Марка стали или сплава	Температура испытания, К	Предел прочности σ_B	Предел текучести $\sigma_{0,2}$	Предел длительной прочности $\sigma_{дл}$			Предел ползучести	
				за 100 ч	за 1000 ч	за 10 ⁵ ч	$\sigma_{0,2/100}$	$\sigma_{0,2/10^5}$
2X13	293	720	520	—	—	—	—	—
	573	560	430	—	—	—	—	—
	673	530	400	—	—	—	—	—
	723	490	380	400	—	—	—	—
	773	440	360	—	—	170	—	48
	823	350	280	—	—	—	—	30
12X18H9T	293	650	310	—	—	—	—	—
	673	440	220	—	—	—	—	—
	773	430	210	—	—	—	—	—
	873	360	180	250	—	150	—	80
	973	280	160	130	—	—	—	—
	1073	180	100	50	—	—	—	—
40X10C2M	293	960	680	—	—	—	—	—
	673	780	490	—	—	—	—	—
	773	680	460	350	—	162	200	128
	823	550	420	240	—	95	90	40
	873	440	370	—	—	—	50	22
XH35BT	293	840	440	—	—	—	—	—
	773	690	430	—	—	—	—	—
	873	660	420	—	320	230	—	—
	923	570	410	300	220	150	—	130
	973	480	400	—	140	65	—	80
37X12H8Г8МБФ	293	940	600	—	—	—	—	—
	723	720	500	—	—	—	—	—
	873	600	450	450	380	—	350	—
	923	560	430	350	280	—	300	—
	973	500	380	—	—	—	240	—
	1023	420	330	—	—	—	—	—
XH70MФТЮБ	293	1050	700	—	—	—	—	—
	873	980	630	—	—	—	—	—
	973	930	600	480	—	—	180	—
	1073	720	550	250	—	—	—	—
	1173	380	280	—	—	—	—	—
XH77ТЮР	293	1100	700	—	—	—	—	—
	773	960	640	—	—	—	—	—
	873	870	570	700	560	—	560	—
	973	830	560	440	330	—	400	—
	1073	550	440	220	110	—	170	—

Марка стали или сплава	Температура испытания, К	Предел прочности σ_B	Предел текучести $\sigma_{0,2}$	Предел длительной прочности $\sigma_{дл}$			Предел ползучести	
				за 100 ч	за 1000 ч	за 10 ⁵ ч	$\sigma_{0,2/100}$	$\sigma_{0,2/10^5}$
ХН70ВМЮТ	293	1140	750	—	—	—	—	—
	873	990	680	—	—	—	—	—
	973	900	650	500	360	—	400	—
	1073	750	580	280	180	—	230	—
	1173	490	380	120	100	—	100	—
ЖС6К	293	950	850	—	—	—	—	—
	1073	920	840	520	380	—	380	—
	1173	780	520	320	160	—	200	—
	1273	540	320	150	65	—	60	—
	1303	430	260	120	—	—	—	—
АЛ13	293	370	220	—	—	—	—	—
	448	270	200	185	—	—	130	—
	473	260	220	150	—	—	—	—
	523	170	100	115	—	—	—	—
	573	120	75	65	—	—	—	—
АК4-1	293	450	380	—	—	—	—	—
	423	400	360	290	—	—	280	—
	473	340	290	170	—	—	160	—
	523	280	200	100	—	—	80	—
	573	170	140	40	—	—	30	—
ВД-17	293	500	330	—	—	—	—	—
	473	380	—	190	—	—	160	—
	523	240	—	100	—	—	75	—
	573	180	—	55	—	—	32	—
ВТ3-1	293	1000	950	—	—	—	—	—
	673	760	630	650	550	—	—	—
	773	700	560	360	270	—	280	—
	873	530	250	—	—	—	—	—
ВТ9	293	1150	1030	—	—	—	—	—
	673	850	720	—	—	—	—	—
	773	800	660	650	—	—	280	—
	823	780	620	450	—	—	120	—
	873	720	550	230	—	—	—	—

Таблица 16. Длительная прочность и ползучесть тугоплавких металлов и сплавов на их основе при высоких температурах

Материал	Температура, К	Напряжение, МПа	Время до разрушения, ч	Скорость ползучести, %/ч
Молибден	1673	20,0	94,0	0,133
		25,0	32,5	0,475
		40,0	4,5	3,500
		50,0	0,5	18,400
Сплав молибдена ВМ-1	1873	11,2	133,0	0,006
		13,2	124,0	0,020
		18,4	54,0	0,067
		22,6	49,0	0,169
Сплавы ниобия Nb + 9 % Mo	1273	368,0	500,0	—
		383,5	200,0	—
		395,0	100,0	—
		478,0	1,0	—
	1373	168,0	500,0	—
		176,5	200,0	—
		184,0	100,0	—
		236,0	1,0	—
	1473	90,0	500,0	—
		90,0	200,0	—
		95,0	100,0	—
		133,0	1,0	—
	1573	49,0	500,0	—
		54,0	200,0	—
		57,0	100,0	—
		89,0	1,0	—
	1673	28,5	500,0	—
		32,6	200,0	—
		35,6	100,0	—
		66,0	1,0	—
Nb + 9,8 % Mo	1273	98,0	500,0	—
		105,0	137,0	0,125
		107,0	200,0	—
		113,0	100,0	—
		125,0	41,0	0,510
		149,0	65,0	2,780
		168,0	1,0	—
	1373	67,5	500,0	—
73,5		200,0	—	
78,5		100,0	—	
128,5		1,0	—	

Материал	Температура, К	Напряжение, МПа	Время до разрушения, ч	Скорость ползучести, %/ч
ВН-2	1473	41,0	500,0	—
		46,0	200,0	—
		51,0	117,0	0,152
		51,0	100,0	—
		55,0	110,0	0,190
		65,0	35,0	0,530
		79,0	5,5	4,100
		96,0	1,0	—
		1573	26,5	500,0
	30,6		200,0	—
	34,6		100,0	—
	81,0		1,0	—
	1673	15,0	583,0	0,058
		16,3	500,0	—
		20,2	200,0	—
		24,5	100,0	—
		25,0	63,0	0,286
		54,0	2,5	10,250
		69,5	1,0	—
	1273	116,0	500,0	—
		131,0	200,0	—
		138,0	—	0,110
		146,0	100,0	—
		180,0	—	0,500
		200,0	—	1,920
		282,0	1,0	—
	1373	65,0	500,0	—
		68,0	—	0,113
		75,5	200,0	—
		81,0	—	0,286
		84,0	100,0	—
		120,0	—	1,560
170,0		1,0	—	
1473	37,5	500,0	—	
	45,0	200,0	—	
	51,0	100,0	—	
	54,0	—	0,168	
	57,0	—	0,188	
	70,0	—	1,320	
	75,0	—	2,000	
	116,0	1,0	—	
1573	22,2	500,0	—	
	26,3	200,0	—	
	30,0	100,0	—	
	86,0	1,0	—	

Продолжение табл. 16

Материал	Температура, К	Напряжение, МПа	Время до разрушения, ч	Скорость ползучести, %/ч
ВН-3 отжиг при 1873 К, 10 мин	1673	10,2	500,0	—
		14,2	200,0	—
		17,2	100,0	—
		18,5	—	0,400
		24,0	—	1,060
		27,0	—	1,900
		63,0	1,0	—
	1327	60,0	—	0,100
		90,0	—	1,000
		130,0	—	10,000
		195,0	—	100,000
	1427	33,0	—	0,100
		52,0	—	1,000
80,0		—	10,000	
125,0		—	100,000	
1627	11,0	—	0,100	
	20,0	—	1,000	
	36,0	—	10,000	
	65,0	—	100,000	
1727	11,0	—	1,000	
	25,0	—	10,000	
	42,0	—	100,000	
отжиг при 1373 К, 3 ч	1373	74,0	200,0	—
		83,0	100,0	—
		170,0	1,0	—
1473	42,0	200,0	—	
	48,0	100,0	—	
	105,0	1,0	—	
1673	22,0	200,0	—	
	25,0	100,0	—	
	58,0	1,0	—	
Тантал	1073	110,0	239,0	0,030
		120,0	67,0	0,180
1173	80,0	99,0	0,190	
	85,0	37,0	0,525	
	95,0	4,0	4,800	
Сплав тантала Ta + 10 % W	1173	250,0	93,0	—
		280,0	14,5	—
	1573	70,0	244,0	0,055
		84,0	65,0	0,300
		101,0	14,0	1,350
	2073	23,0	46,0	0,860
		30,0	12,0	1,500
40,0		1,0	16,000	

Таблица 17. Механические характеристики некоторых конструкционных материалов при низких температурах*

Материал	Температура, К	Предел прочности, МПа	Предел пропорциональности, МПа	Предел текучести, МПа	Предел выносливости, МПа	Напряжение в момент разрыва, МПа	Относительное удлинение, %	Относительное сужение, %	Истинное относительное продольное удлинение, %
Стали									
Ст3	293	417	—	253	230	—	26,7	48,5	—
	193	519	—	461	—	—	25,0	50,5	—
	133	666	—	627	—	—	17,5	43,0	—
Сталь 20	293	468	—	308,7	—	—	28,7	50,0	—
	193	568	—	470	—	—	27,0	50,5	—
	133	691	—	657	—	—	21,0	47,5	—
15Г2АФД, листы	293	519	—	420	—	—	28,5	42,0	—
	253	519	—	421	—	—	29,5	44,5	—
	213	598	—	490	—	—	29,0	47,5	—
	173	637	—	519	—	—	26,0	56,0	—
	133	691	—	696	—	—	25,5	64,5	—
ЭП410 (З и ИС)	293	949	—	712	—	—	14,6	65,8	—
	77	1407	—	1145	—	—	14,3	70,6	—
	4,2	1447	—	1330	—	—	10,6	56,5	—

03X13AG19 листы (3)	293	805	—	335	380	—	51,5	64,0	—
	77	1364	—	682	580	—	32,0	22,2	—
	4,2	1366	—	862	—	—	30,0	60,3	—
03X12H10MT-ВД (З и От)	293	962	—	799	500	—	15,0	—	—
	77	1436	—	1156	790	—	16,7	—	—
	4,2	1578	—	1441	—	—	8,5	—	—
07X16H6 (3)	293	1332—1367	1000	1083—1105	—	2070	21,5	63,5	4,0
	200	1580	1080	1153	—	2610	19,3	62,0	—
	77	1862—1905	1210	1305—1332	—	3450	19,5	57,2	4,5
	4,2	2072—2115	1450	1524—1552	—	3500	13,0—13,2	40,2—40,5	4,7
12X18H10T	293	658—695	172	260—285	295	2090	52,2—63,0	68,7—78,0	10
	200	1074	250	370	—	2370	49,0	70,0	10,6
	77	1535—1680	300	420—646	410	2730	42,0—54,2	56,0—61,1	6,2
	4,2	1730—1793	430	503—773	—	3500	34,0—39,3	49,0—60,5	6,5
03X20H16AG6, листы (3)	293	726—742	325	380—408	265	1660	49,7—50,2	59,8—70,5	7,0
	200	910	465	480	—	1950	49,1	59,5	7,5
	77	1360—1459	750	800—908	540	2720	48,5—52,8	52,4—54,5	8,0
	4,2	1608—1744	1060	1140—1150	—	3230	29,2—42,9	39,7—50,5	6,7

179

* Значения характеристик получены при постоянной скорости деформирования 0,5 см/мин.

Материал	Температура, К	Предел прочности, МПа	Предел пропорциональности, МПа	Предел текучести, МПа	Предел выносливости, МПа	Напряжение в момент разрыва, МПа	Относительное удлинение, %	Относительное сужение, %	Истинное относительное продольное удлинение, %
Алюминиевые сплавы									
Д20, листы (З и ИС)	293	410—426	315	299—309	—	670	11,5—14,7	23,5—45,5	4,7
	200	443	335	324	—	715	15,2	41,2	4,8
	77	523—549	375	388—417	—	825	11,2—15,2	26,0—33,3	6,7
	4,2	653—675	400	427—440	—	1000	11,7—16,2	20,6—26,3	4,1
1201 (З)	293	402	—	283	—	—	14,7	45,5	—
	77	517	—	380	—	—	15,2	33,3	—
	4,2	662	—	418	—	—	16,2	26,3	—
АМг5, листы	293	283	—	118	—	—	28,8	33,6	—
	77	411	—	145	—	—	43,7	38,6	—
	4,2	540	—	170	—	—	41,6	28,3	—
АМг6, листы	293	314—323	145	132—160	96	490	28,2	33,0—46,0	1,1
	200	333	166	165	—	525	24,9	44,0	1,2
	77	441—471	185	129—185	160	730	38,8—41	36,1—36,6	1,2
	4,2	547—680	190	135—254	—	895	24,2—34,2	15,3—24,8	1,2
АМцС, листы	293	137	—	86	120	—	27,8	50,6	—
	77	300	—	123	200	—	39,4	42,1	—
	4,2	425	—	147	—	—	28,7	26,8	—

Титановые сплавы

BT1-0, листы (O)	293	397	—	273	—	—	27,4	69,0	—
	77	841	—	505	—	—	40,0	26,5	—
	4,2	970	—	619	—	—	25,7	23,5	—
BT5-ikt, листы (O)	293	764—835	765	706—770	—	877	13,2—14,0	26,4—41,0	3,7
	200	985	950	950	—	1027	8,9	23,7	3,2
	77	1275—1325	1210	1230—1235	—	1480	12,7—14,3	21,6—33,5	—
	4,2	1382—1460	1320	1365—1367	—	1608	3,4—7,0	5,0—16,1	2,6
BT6C, листы (O)	293	970	—	907	—	—	11,7	40,0	—
	77	1514	—	1441	—	—	11,7	15,0	—
	4,2	1558	—	1558	—	—	2,7	9,5	—
AT2-2, листы (O)	293	660—823	560	570—779	—	1350	13,3—20,3	53,5—62,2	2,2
	200	775	700	700	—	—	19,7	60,0	2,8
	77	1077—1254	870	940—1215	—	1580	12,7—23,2	24,5	7,5
	4,2	1272—1411	1150	1180—1411	—	1700	9,0—14,0	25,5—53,1	4,3
ПТЗВ, поковки	293	718	—	606	—	—	9,8	25,0	—
	77	1215	—	913	—	—	9,6	22,9	—
	4,2	1235	—	966	—	—	6,3	19,1	—

Материал	Температура, К	Предел прочности, МПа	Предел пропорциональности, МПа	Предел текучести, МПа	Предел выносливости, МПа	Напряжение в момент разрыва, МПа	Относительное удлинение, %	Относительное сужение, %	Истинное относительное продольное удлинение, %
Медь и ее сплавы									
М1	293	309	—	184	—	—	12,8	67,7	—
	77	448	—	238	—	—	21,0	72,1	—
	4,2	499	—	350	—	—	37,5	68,9	—
Бр. Х08 (О)	293	231	—	148	—	—	34,0	—	—
	77	380	—	156	—	—	44,0	—	—
	4,2	468	—	178	—	—	55,5	—	—

Состояние материала: З — закаленный; ИС — искусственно состаренный; О — отожженный; От — отпущенный.

Таблица 18. Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений на растяжение и сжатие

Материал	Допускаемые напряжения, МПа	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый (в отливках)	28—80	120—150
Сталь ОС и Ст2	140	140
Сталь Ст3	160	160
Сталь Ст3 (в мостах)	140	140
Сталь углеродистая конструкционная (в машиностроении)	60—250	60—250
Сталь легированная конструкционная (в машиностроении)	100—400 и выше	100—400 и выше
Медь	30—120	30—120
Латунь	70—140	70—140
Бронза	60—120	60—120
Алюминий	30—80	30—80
Алюминиевая бронза	80—120	80—120
Дюралюминий	80—150	80—150
Текстолит	30—40	30—40
Гетинакс	50—70	50—70
Бакелизованная фанера	40—50	40—50
Сосна вдоль волокон	7—10	10—12
Сосна поперек волокон	—	1,5—2
Дуб вдоль волокон	9—13	13—15
Дуб поперек волокон	—	2—3,5
Каменная кладка	до 0,3	0,4—4
Кирпичная кладка	до 0,2	0,6—2,5
Бетон	0,1—0,7	1—9

5.1. Напряжения в точке. Главные площадки и главные напряжения

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела, появляющегося при нагружении его внешними силами. Действию внешних сил, стремящихся изменить расположение частиц тела или вызвать их смещение, препятствуют возникающие при этом в теле напряжения.

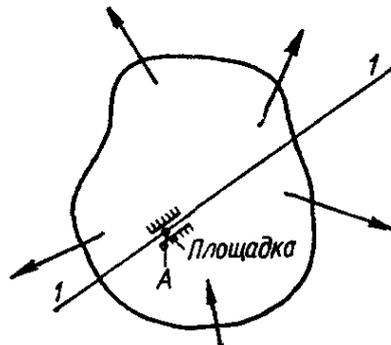


Рис. 97

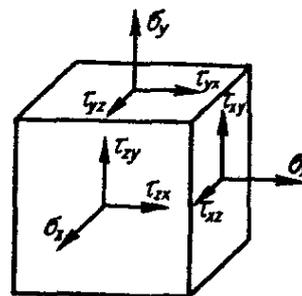


Рис. 98

Они ограничивают это смещение некоторой малой величиной. В одной и той же точке напряжения в разных направлениях, как правило, будут различными и только в отдельных случаях нагружения они могут быть одинаковыми.

Рассматривая напряжение в точке *A* нагруженного тела, отнесенной к малым площадкам (рис 97), принадлежащим двум разным частям тела, разделенного сечением 1—1, проведенным через эту точку, легко убедиться, что если под действием внешних нагрузок площадки стремятся отойти одна от другой или сблизиться, то между ними возникают соответственно растягивающие или сжимающие *нормальные напряжения* σ ; если площадки стремятся сдвинуться одна относительно другой, то в них возникают *касательные напряжения* τ ; если же одна площадка стремится отойти от другой, оставаясь ей параллельной в каком-нибудь произвольном направлении, то в такой площадке одновременно возникают и нормальные σ и касательные τ напряжения, а их результирующей является *полное напряжение* p , вектор которого совпадает с этим направлением. Перемещение площадки в этом случае может быть геометрически разложено на два перемещения. взаимное удаление и сдвиг.

В общем случае, выделим в окрестности рассматриваемой в нагруженном теле точки элементарный объем материала в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 98). На его гранях влияние удаленной части тела должно быть заменено соответствующими напряжениями или их составляющими (нормальными и касательными напряжениями), как показано на рисунке.

При изменении ориентации граней выделенного *элементарного* параллелепипеда напряжения на его гранях также будут изменяться. Всегда можно найти такую ориентацию элемента, при которой в его гранях касательные составляющие напряжений будут отсутствовать.

Те площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках — *главными напряжениями*. Можно доказать, что в каждой точке любым образом нагруженного тела всегда имеется по крайней мере три главные взаимно перпендикулярные площадки, т. е. площадки, в которых отсутствуют касательные напряжения. Направления, параллельные главным напряжениям, называются *главными направлениями* в данной точке. Главные напряжения принято обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом полагают, что между указанными напряжениями существует следующее соотношение (понимая его в алгебраическом смысле):

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

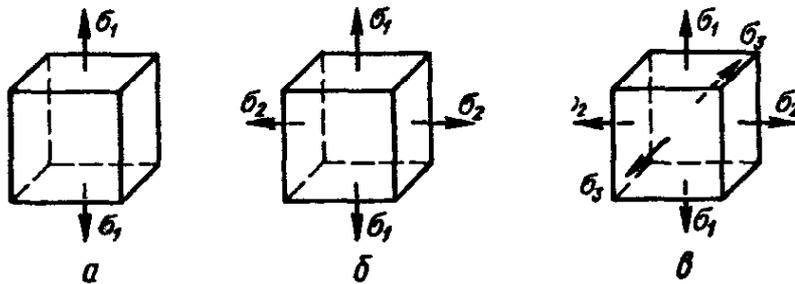


Рис. 99

Напряженное состояние, в котором только одно из главных напряжений (любое из трех) не равно нулю, а два других равны нулю, называется *одноосным* или *линейным* (рис. 99, а). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то такое напряженное состояние называется *двухосным* или *плоским* (рис. 99, б). Случай напряженного состояния, при котором все три главных напряжения отличны от нуля, называется *трехосным* или *объемным* (рис. 99, в)

Кроме того, различают *однородное* напряженное состояние тела, при котором в каждой точке какого-либо сечения и всех параллельных ему сечений напряжения одинаковы, и *неоднородное* напряженное состояние, при котором в разных точках любого сечения рассматриваемого тела или других параллельных ему сечений напряжения различны.

5.2. Линейное напряженное состояние

С *линейным* напряженным состоянием мы встречаемся, главным образом, в стержнях, испытывающих растяжение или сжатие, хотя некоторые элементы испытывают линейное напряжение и в стержнях, подвергающихся изгибу или сложному нагружению.

При растяжении стержня (рис. 100, а) нормальное напряжение в площадке F определяется формулой

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}.$$

Касательные напряжения в этой площадке равны нулю. В любой площадке F_α (рис. 100, б), внешняя нормаль к которой n_α образует с направлением σ угол α , полное напряжение

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha.$$

Нормальные и касательные напряжения в площадке F_α будут

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (5.1)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.2)$$

Нормальные напряжения σ_α положительны, если они растягивающие; касательные напряжения τ_α положительны, если они стремятся повернуть рассматриваемую часть элемента относительно любой точки, взятой внутри ее, по часовой стрелке (σ_α и τ_α на рис. 100, б положительны).

Согласно формулам (5.1) и (5.2) при $\alpha = 0$ (площадка I на рис. 100, а) $\tau_\alpha = 0$; $\sigma_\alpha = \sigma$, а при $\alpha = \pi/2$ (площадка II) $\tau_\alpha = \sigma_\alpha = 0$. Следовательно, площадки I и II являются главными; главные напряжения будут

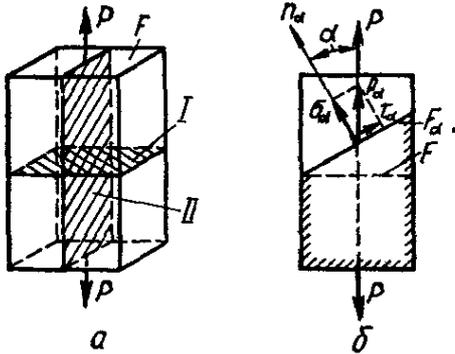


Рис. 100

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

При сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$.

Касательные напряжения согласно формуле (5.2) достигают своей наибольшей величины при $\alpha = \pm 45^\circ$ и определяются формулой

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma}{2}.$$

На основании формул (5.1) и (5.2) легко убедиться, что нормальные и касательные напряжения в площадке F_β , перпендикулярной к площадке F_α , т. е. в площадке, внешняя нормаль к которой образует угол $\beta = \alpha + 90^\circ$ с направлением напряжения σ , будут

$$\sigma_\beta = \sigma \cos^2 \beta = \sigma \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2 \alpha; \quad (5.3)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.4)$$

5.3. Плоское напряженное состояние

При плоском напряженном состоянии, когда на элемент по его двум взаимно перпендикулярным гралям действуют напряжения σ_1 и σ_2 (рис. 101), нормальные и касательные напряжения, действующие на площадке (α), внешняя нормаль к которой n_α образует с направлением напряжения σ_1 угол α , определяются соответственно по формулам

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (5.5)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.6)$$

Из этих формул могут быть получены выражения для определения нормальных и касательных напряжений в площадке (β), перпендикулярной к площадке (α), т. е. в площадке, внешняя нормаль к которой образует угол $\beta = -(90^\circ - \alpha)$ с направлением σ_1 :

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \quad (5.7)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.8)$$

Складывая левые и правые части уравнений (5.5) и (5.7), находим

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (5.9)$$

т. е. сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, инвариантна по отношению к наклону этих площадок и равна сумме главных напряжений.

Из формул (5.6) и (5.8) следует, что как и при одноосном напряженном состоянии, касательные напряжения достигают наибольшей величины при $\alpha = \pm 45^\circ$, т. е. по площадкам, наклоненным под углом 45° к главным площадкам, и определяются формулой

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (5.10)$$

Сравнивая формулы (5.6) и (5.8), находим

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (5.11)$$

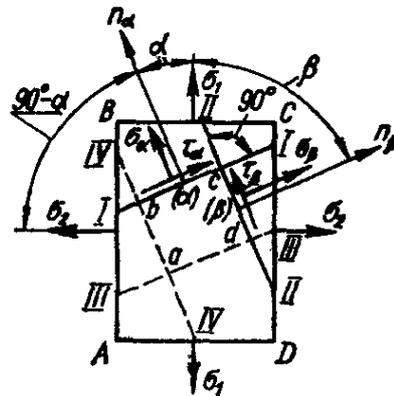


Рис. 101

Это равенство выражает закон парности касательных напряжений, который может быть сформулирован так: если по какой-либо площадке действует некоторое касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке непременно будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку.

Экстремальными значениями для нормальных напряжений являются величины главных напряжений.

На всех наклонных площадках нормальные напряжения имеют промежуточные между σ_1 и σ_2 значения.

Одно и то же напряженное состояние элемента может быть представлено главными напряжениями σ_1 и σ_2 (элемент ABCD, рис. 101 и 102, а) или напряжениями в наклонных площадках σ_α , τ_α , σ_β , τ_β (элементы abcd на рис. 101 и 102, б).

В теории напряженного состояния различают две основные задачи.

Прямая задача. По известным в точке главным площадкам и действующим в них главным напряжениям требуется определить нормальные и касательные напряжения по площадкам, наклоненным под заданным углом к главным площадкам, т. е. по напряжениям, действующим на гранях элемента ABCD (рис. 103), определить напряжения в гранях элемента abcd.

Обратная задача. По известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку, требуется найти главные

направления и главные напряжения. Иначе говоря, дан элемент $abcd$ (рис. 103) с действующими по его граням нормальным и касательным напряжениями; требуется определить положение элемента $ABCD$, т. е. угол α_0 , и найти главные напряжения.

Обе задачи могут решаться как аналитически, так и графически.

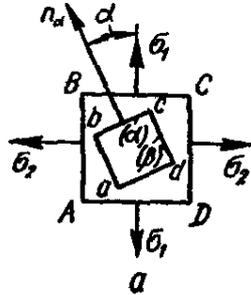


Рис. 102

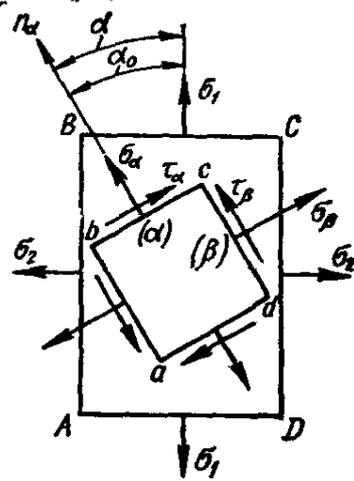
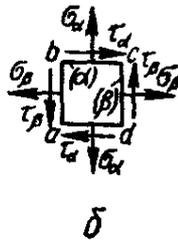


Рис. 103

5.4. Прямая задача при плоском напряженном состоянии. Круг напряжений

Аналитическое решение прямой задачи дается формулами (5.5) — (5.8).

Графически σ_α , τ_α , σ_β , τ_β можно определить по известным главным напряжениям σ_1 и σ_2 (рис. 104, а) с помощью так называемого

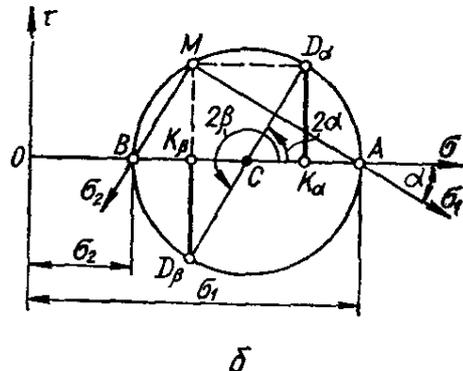
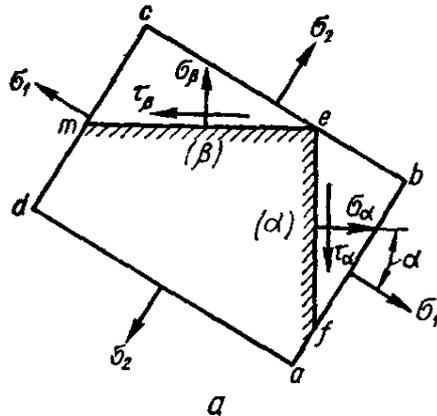


Рис. 104

круга напряжений (круга Мора), построенного в координатах σ , τ на отрезке AB как на диаметре, равном разности главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ (рис. 104, б). Действительно, проведя от центра круга напряжений (точки C) луч CD под углом 2α до пересечения с окружностью, получим точку D_α , координаты которой будут характеризовать соответственно напряжения σ_α и τ_α :

$$\begin{aligned} \overline{OK}_\alpha &= \overline{OC} + \overline{CD}_\alpha \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha; \end{aligned}$$

$$\overline{KD}_\alpha = \overline{CD}_\alpha \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha.$$

Легко показать, что точка D_β характеризует напряжения σ_β , τ_β в площадке (β), перпендикулярной к площадке (α),

$$\begin{aligned} \overline{OK}_\beta &= \overline{OC} - \overline{CK}_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_\beta; \\ \overline{D_\beta K_\beta} &= -\tau_\alpha = \tau_\beta. \end{aligned}$$

Точки D_α и D_β , характеризующие напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках (α) и (β), всегда лежат на концах одного диаметра.

Построенный круг Мора полностью описывает напряженное состояние элемента, изображенного на рис. 104, а. Если менять угол α в пределах от -90° до $+90^\circ$, то наклонные площадки (α) и (β) займут последовательно все возможные положения, а точки D_α и D_β опишут полный круг. В частности, при $\alpha = 0$, когда грани ef и em станут главными площадками и по ним будут действовать те же напряжения, что и в гранях элемента $abcd$, точка D_α совпадает с точкой A , а точка D_β — с точкой B .

Для определения положения полюса на круге напряжений, как и в случае круга инерции, проведем из точки D_α линию, параллельную σ_α (в нашем примере горизонталь, рис. 104, б), до пересечения с окружностью. Искомый полюс — точка M . Полюс M можно было бы найти, проведя из точки D_β линию, параллельную напряжению σ_β , т. е. проведя вертикаль. Можно доказать, что линия, соединяющая полюс M с любой точкой круга, параллельна направлению нормального напряжения на площадке, которой эта точка соответствует. Например, линия MA параллельна главному напряжению σ_1 , а линия MB — главному напряжению σ_2 .

5.5. Обратная задача при плоском напряженном состоянии

При практических расчетах часто приходится решать обратную задачу — определять σ_1 и σ_2 по известным σ_α , τ_α , σ_β , τ_β (рис. 105, а).

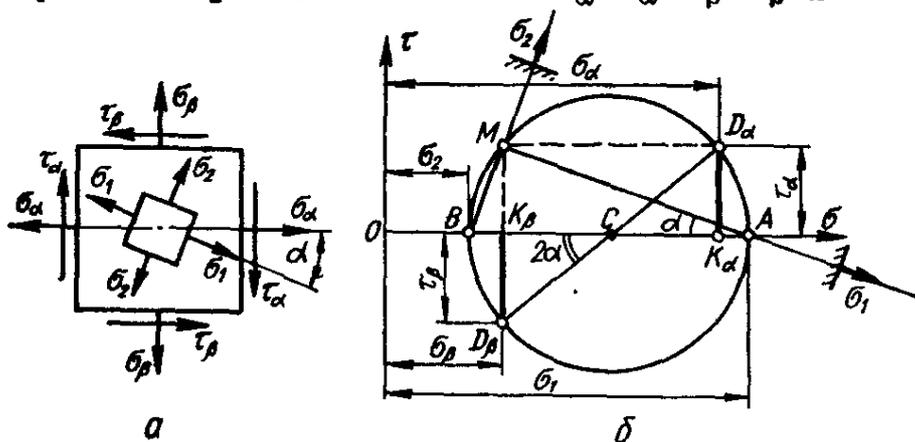


Рис. 105

Пусть $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$; $\tau_\alpha > 0$. Очевидно, круг напряжений в координатах σ , τ (рис. 105, б) легко построить, зная положение двух диаметрально противоположных точек круга D_α и D_β , координатами которых явля-

ются соответственно σ_α , τ_α и σ_β , τ_β . При этом абсциссы точек пересечения круга с осью σ — OA и OB — дадут соответствующие величины главных напряжений σ_1 и σ_2 .

Для определения положения главных площадок найдем полюс и воспользуемся его свойством. С этой целью из точки D_α проведем линию, параллельную линии действия σ_α , т. е. горизонталь. Точка M пересечения этой линии с окружностью и будет полюсом. Соединив точку M с точками A и B , получим направления главных напряжений σ_1 и σ_2 . Положение главных площадок, очевидно, будет перпендикулярно к направлениям главных напряжений. На рис. 105, а внутри исходного элемента выделен элемент, ограниченный главными площадками, на гранях которых показаны главные напряжения σ_1 и σ_2 . Из рассмотрения круга напряжений можно получить аналитические выражения главных напряжений σ_1 и σ_2 через σ_α , τ_α , σ_β , τ_β :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}], \quad (5.12)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}].$$

Из рис. 105, б следует также, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\overline{MK}_\beta}{\overline{AK}_\beta} = \frac{\overline{MK}_\beta}{\overline{OA} - \overline{OK}_\beta} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \quad (5.13)$$

Эта формула и определяет единственное значение угла α , на который нужно повернуть n_α , чтобы получить направление алгебраически большего главного напряжения. Заметим, что отрицательному значению α соответствуют углы, отложенные по часовой стрелке, и что если одно из главных напряжений, вычисленное по формулам (5.12), окажется отрицательным, то напряжения следует обозначать не σ_1 и σ_2 , а σ_1 и σ_3 ; если же оба главных напряжения окажутся отрицательными, то они должны быть обозначены σ_2 и σ_3 .

5.6. Объемное напряженное состояние

Объемное, или трехосное, напряженное состояние в сопротивлении материалов рассматривается редко. Поэтому здесь укажем лишь на некоторые основные моменты теории объемного напряженного состояния.

Рассмотрим случай объемного напряженного состояния (рис. 106), когда по граням выбранного кубика действуют все три главных напряжения

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0.$$

Очевидно, в площадке I, параллельной σ_1 , нормальные и касательные напряжения не будут зависеть от σ_1 , а только от σ_2 и σ_3 и во всех подобных площадках будут характеризоваться кругом напряжений L_I с диаметром $\sigma_2 - \sigma_3$ (рис. 107). В площадке II, параллельной σ_2 , нормальные и касательные напряжения будут характеризоваться кругом напряжений L_{II} с диаметром $\sigma_1 - \sigma_3$ и, наконец, в площадке III, параллельной σ_3 , нормальные и касательные напряжения будут характеризоваться кругом напряжений L_{III} с диаметром $\sigma_1 - \sigma_2$.

Во всех указанных площадках метод определения σ_α , τ_α и σ_β , τ_β не будет отличаться от рассмотренного выше метода решения прямой задачи для плоского напряженного состояния.

Можно доказать, что если провести площадку, не параллельную ни одному из главных напряжений, то нормальное σ_α и касательное τ_α напряжения в этой площадке могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы, которые образует нормаль к рассматриваемой площадке с направлениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

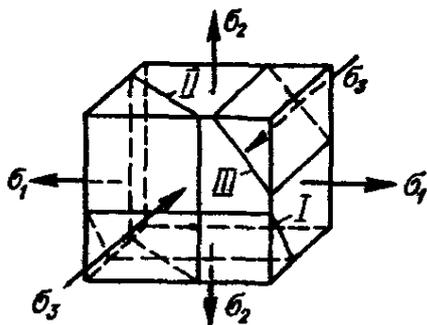


Рис. 106

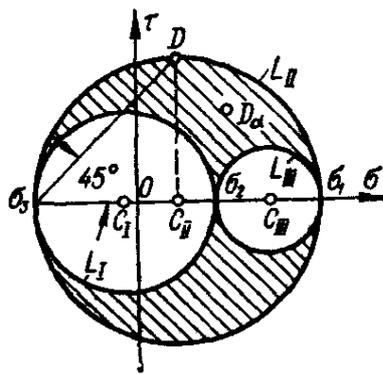


Рис. 107

Доказывается также, что точка $D_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, характеризующая напряженное состояние в произвольно наклоненной площадке, всегда будет лежать в заштрихованной области (рис. 107) или на границе ее, если площадка параллельна одному из главных напряжений.

Из рассмотрения кругов напряжений (рис. 107) видно, что τ_{\max} , характеризуемое точкой D на окружности L_{II} и действующее в площадке, параллельной главному напряжению σ_2 , наклоненной к напряжениям σ_1 и σ_3 под углом $\alpha = 45^\circ$, равно радиусу большого круга. Следовательно, при объемном напряженном состоянии

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5.15)$$

В случае площадки, внешняя нормаль к которой образует с направлениями σ_1, σ_2 и σ_3 одинаковые углы $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, называемой *октаэдрической площадкой* (поскольку она параллельна грани октаэдра, который может быть образован из куба), когда

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3},$$

формулы (5.14) принимают вид

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{\text{ср}}; \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\text{окт}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Касательное напряжение, определенное по формуле (5.17), называется *октаэдрическим*. Октаэдрическое нормальное напряжение представляет собой как бы среднее напряжение для данного трехосного напряженного состояния.

При оценке прочности материала в условиях сложного напряженного состояния часто используется некоторая фиктивная величина σ_l , называемая *интенсивностью напряжений* и связанная с $\tau_{\text{окт}}$ зависимостью

$$\sigma_l = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}.$$

5.7. Деформации при объемном напряженном состоянии. Обобщенный закон Гука

Базируясь на гипотезе о том, что материал следует закону Гука, а деформации малы, можно получить зависимости между напряжениями и деформациями в общем случае сложного напряженного состояния. При этом будем исходить из зависимостей (4.3) и (4.9), полученных ранее для линейного напряженного состояния. Рассмотрим деформацию

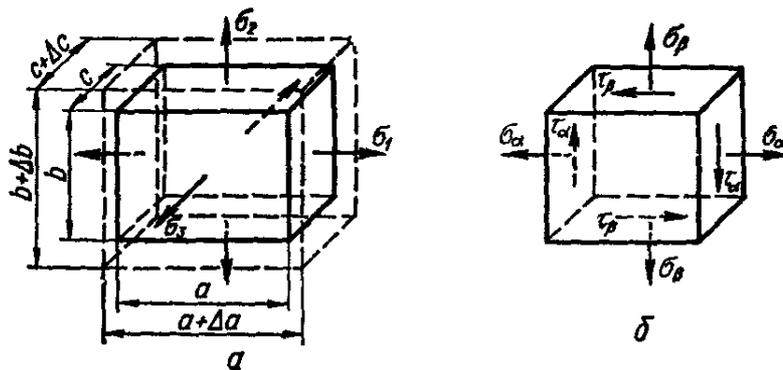


Рис. 108

прямоугольного параллелепипеда с размерами $a \times b \times c$ (рис. 108, а) под действием главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (полагаем, что все они положительны) по трем его граням, параллельным соответственно ребрам a, b, c .

Удлинения ребер соответственно будут $\Delta a, \Delta b, \Delta c$, а относительные деформации в главных направлениях

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}.\quad (5.18)$$

Каждое из этих относительных удлинений есть результат действия всех трех напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 . При этом, например,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',\quad (5.19)$$

где согласно (4.3) и (4.9)

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}. \quad (5.20)$$

Учитывая (5.20), можно записать (5.19) в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (5.21)$$

Аналогично могут быть записаны и выражения для ε_2 и ε_3 как $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. В результате обобщенный закон Гука для изотропного материала выразится следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Заметим, что сжимающие напряжения следует в формулы (5.22) подставлять со знаком «минус». Очевидно, в случае плоского напряженного состояния, в частности при $\sigma_2 = 0$, обобщенный закон Гука (5.22) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_3); \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3); \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu \sigma_1). \end{aligned}$$

Закон Гука справедлив не только для главных деформаций, но и для вычисления относительных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям, поскольку при малых деформациях влиянием сдвига на линейную деформацию из-за его малости можно пренебречь. Поэтому относительные удлинения в направлении действия напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ (рис. 108, б) определяются так:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu \sigma_\beta); \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu \sigma_\alpha).$$

Объемная деформация ε_v , представляющая собой относительное изменение объема $v_0 = abc$, после приложения к нему напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяется с точностью величины второго порядка малости формулой

$$\varepsilon_v = \frac{v - v_0}{v_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (5.23)$$

или через напряжения с учетом (5.22) формулой

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.24)$$

В частности, при равномерном всестороннем сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$,

$$\varepsilon_v = -\frac{p}{K}, \quad (5.25)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Величина K называется *модулем объемной деформации*. Из формулы (5.24) видно, что при деформации тела, материал которого имеет коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$ (например, резина), объем тела не изменяется.

5.8. Потенциальная энергия деформации

Потенциальной энергией деформации называется энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации. Когда под действием внешней статической нагрузки тело деформируется, точки приложения внешних сил перемещаются и потенциальная энергия нагрузки убывает на величину, которая численно равна работе, совершенной внешними силами. Энергия, потерянная внешними силами, не исчезает, а превращается, в основном, в *потенциальную энергию деформации тела* (незначительной частью энергии, рассеиваемой в процессе деформации главным образом в виде теплоты, при этом пренебрегают).



Приращение потенциальной энергии U деформируемого тела равно уменьшению потенциальной энергии нагрузки U_n и численно равно работе A_p , совершенной внешними силами, т. е.

$$U = A_p. \quad (5.26)$$

Рис. 109

Таким образом, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела.

В случае простого растяжения (рис. 109)

$$U = \frac{P\Delta l}{2}$$

удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{v} = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}, \quad (5.27)$$

где v — объем тела; F — площадь поперечного сечения.

Учитывая, что $\varepsilon = \sigma/E$, получаем

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (5.28)$$

В случае объемного напряженного состояния, когда потенциальная энергия деформации определяется суммарной работой главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на соответствующих перемещениях, равных от-

носительным деформациям $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (рис. 110), на основании (5.28) удельная потенциальная энергия выражается формулой

$$u = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2}.$$

Воспользовавшись обобщенным законом Гука, можем исключить деформации. Получим

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (5.29)$$

При деформации упругого тела (рис. 110) изменяется, вообще говоря, не только его объем, но и форма (например, кубик превращается в параллелепипед). Поэтому полную удельную потенциальную энергию деформации u можно представить в виде двух слагаемых:

$$u = u_v + u_\phi,$$

где u_v — удельная потенциальная энергия изменения объема; u_ϕ — удельная потенциальная энергия изменения формы.

Можно показать, что

$$u_v = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] = \\ &= \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

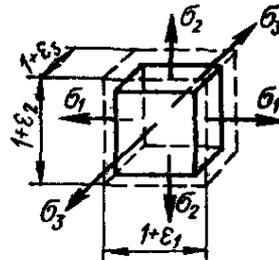


Рис. 110

6.1. Основные теории прочности

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию, т. е. по известным главным напряжениям в точках тела. Наиболее просто эта задача решается при простых видах деформации, в частности при одноосном напряженном состоянии, так как в этом случае значения предельных (опасных) напряжений легко установить экспериментально. Напомним, что опасным напряжением для пластичных материалов является предел текучести, а для хрупких — временное сопротивление.

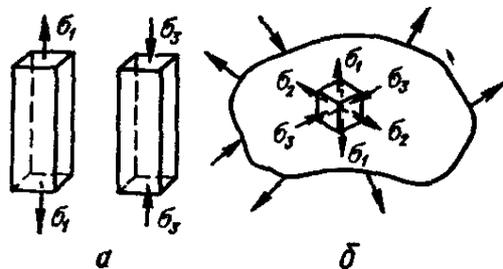


Рис. 111

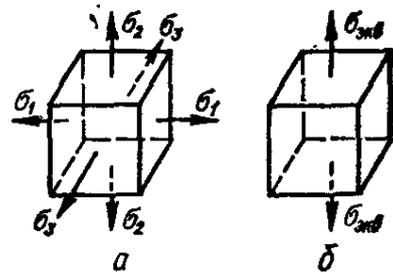


Рис. 112

Таким образом, условие прочности при одноосном напряженном состоянии (рис. 111, а) принимает вид

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+]; \sigma_2 \leq [\sigma_-], \tag{6.1}$$

где $[\sigma_+]$ и $[\sigma_-]$ — допускаемые напряжения соответственно при растяжении и сжатии.

В случае сложного напряженного состояния, когда два или все три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не равны нулю (рис. 111, б), предельное (опасное) состояние для одного и того же материала может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений в зависимости от соотношения между ними. Поэтому экспериментальная проверка опасного состояния из-за бесчисленного множества возможных соотношений между $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и трудности осуществления таких экспериментов практически исключается.

Другой путь решения поставленной задачи заключается в выборе критерия прочности (критерия предельного напряженно-деформированного состояния). Для этого вводится гипотеза о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора. При этом предусматривается возможность проверки выбранного критерия прочности сопоставлением данного сложного напряженного состояния с простым, например с одноосным растяжением (рис. 112, а, б), и установления такого эквивалентного напряжения, которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса прочности. Под последним

в общем случае напряженного состояния понимают число n , показывающее, во сколько раз нужно одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), чтобы оно стало предельным:

$$\sigma_1^0 = n\sigma_1; \sigma_2^0 = n\sigma_2; \sigma_3^0 = n\sigma_3.$$

Выбранные таким образом гипотезы называют *механическими теориями прочности*. Ниже рассмотрены основные критерии (теории прочности).

Критерий наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности). Предполагается, что опасное состояние тела, находящегося в условиях сложного напряженного состояния, определяется уровнем наибольшего нормального напряжения

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_+^0 \\ |\sigma_3| = \sigma_-^0 \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Условие прочности с коэффициентом запаса n имеет вид

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 \leq [\sigma_+] \\ |\sigma_3| \leq [\sigma_-] \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}.$$

Эта теория подтверждается на практике только для весьма хрупких и достаточно однородных материалов (стекло, гипс, некоторые виды керамики).

Критерий наибольших относительных линейных деформаций (вторая теория прочности). За критерий предельного состояния принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию, т. е. условие разрушения:

$$|\varepsilon_{\max}| = \varepsilon^0. \quad (6.4)$$

Условие прочности имеет вид

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon^0}{n}. \quad (6.5)$$

Учитывая, что $[\varepsilon] = [\sigma]/E$, а также, что

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

условие прочности (6.5) можно представить в виде

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (6.6)$$

Как видно из (6.6), с допусаемым напряжением нужно сравнивать не то или иное главное напряжение, а их комбинацию. Эквивалентное напряжение в этом случае будет

$$\sigma_{\text{эквII}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (6.7)$$

Эта теория имела довольно широкое распространение, однако ввиду малой достоверности в настоящее время в расчетной практике не рекомендуется.

Критерий наибольших касательных напряжений (третья теория прочности). Предполагается, что опасное состояние нагруженного тела определяется уровнем максимального касательного напряжения. Условия разрушения и прочности соответственно имеют вид

$$\tau_{\max} = \tau^0; \quad (6.8)$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau^0}{n}. \quad (6.9)$$

Так как

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau^0 = \frac{\sigma^0}{2}, \quad \text{а } [\tau] = \frac{[\sigma]}{2},$$

условие прочности (6.9) через главные напряжения запишется так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (6.10)$$

а эквивалентное напряжение по третьей теории прочности определится формулой

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (6.11)$$

Эта теория дает хорошие результаты для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Недостатком третьей теории является то, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения σ_2 , которое оказывает определенное, хотя в большинстве случаев и незначительное, влияние на прочность материала. Считая предельным состоянием для пластичных материалов предел текучести, условие (6.8) можно представить в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (6.12)$$

Это условие удовлетворительно описывает начало пластической деформации разупрочняющихся материалов, для которых характерна ее локализация.

Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности). Предполагается, что опасное (предельное) состояние нагруженного тела определяется предельной величиной накопленной удельной энергии формоизменения. Последнюю можно определить при простом растяжении в момент начала текучести

$$u_{\text{фmax}} = u_{\text{ф}}^0 = u_{\text{ф.т.}} \quad (6.13)$$

Условие прочности будет

$$u_{\text{фmax}} \leq [u_{\text{ф}}]. \quad (6.14)$$

Полагая, что материал следует закону Гука вплоть до наступления предельного состояния, на основании (5.31) при простом растяжении в момент начала текучести ($\sigma_1 = \sigma_T$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) получаем

$$u_{\text{ф.т.}} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_T^2.$$

Условие (6.13) после подстановки (5.31) и значения $u_{\text{ф.т.}}$ из последнего равенства принимает вид

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T, \\ \text{или} & \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Условие прочности (6.14) будет таким:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_T}{n} = [\sigma]. \quad (6.16)$$

Эквивалентное (расчетное) напряжение по четвертой теории прочности определится формулой

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (6.17)$$

Расчетное уравнение четвертой теории прочности можно получить исходя из критерия постоянства октаэдрических касательных напряжений

$$\tau_{\text{октmax}} \leq [\tau_{\text{окт}}].$$

Такая трактовка освобождает рассматриваемую теорию прочности от ограничений, связанных с областью применимости закона Гука, и дает возможность установить начало не только пластической деформации, но и разрушения. Четвертая теория прочности применима для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Критерий Кулона — Мора. Этот критерий основан на предположении, что прочность материала в общем случае напряженного состояния зависит главным образом от величины и знака наибольшего σ_1 и наименьшего σ_3 главных напряжений (погрешность, связанная с тем, что не учитывается σ_2 , обычно не превышает 12—15%). Исходя из этого предположения любое напряженное состояние можно представить одним кругом Мора, построенным на главных напряжениях σ_1 и σ_3 .

Если при данных σ_1 и σ_3 нарушается прочность материала, то круг, построенный на этих напряжениях, называется *предельным*. Изменяя соотношение между σ_1 и σ_3 , получаем для данного материала семейство предельных окружностей (рис. 113). Огибающую $ABCDE$ семейства предельных кругов можно с достаточной степенью точности заменить прямыми, касательными к кругам Мора, построенным для растяжения, с диаметром, равным временному сопротивлению при растяжении σ_B , и для сжатия — с диаметром, равным временному сопротивлению материала при сжатии $\sigma_{в.сж}$ (рис. 114).

Очевидно, рис. 114 может быть перестроен в масштабе допускаемых напряжений (рис. 115). Диаметр круга для растяжения равен $[\sigma_+] = \sigma_B/n$, а для сжатия — $[\sigma_-] = \sigma_{в.сж}/n$.

Из рассмотрения подобия треугольников O_1O_2a и O_1O_3b находим условие прочности

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+]. \quad (6.18)$$

Эквивалентное напряжение по рассмотренной теории Мора

$$\sigma_{\text{экв M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3. \quad (6.19)$$

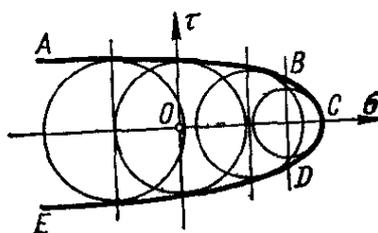


Рис. 113

Теория прочности Кулона — Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию (хрупких материалов), и имеет существенное преимущество перед первой и второй теориями.

Следует подчеркнуть, что хрупкое или пластичное состояние материала определяется не только его свойствами, но и видом напряженного состояния, температурой и скоростью нагружения. Как показывают опыты, пластичные материалы при определенных условиях нагружения и температуре ведут себя как хрупкие, а хрупкие материалы при определенных напряженных состояниях могут вести себя как пластичные.

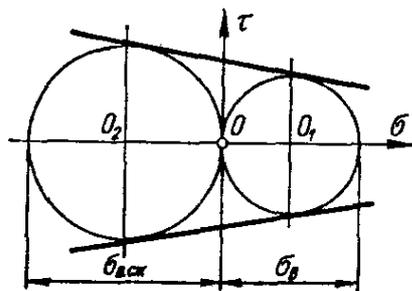


Рис. 114

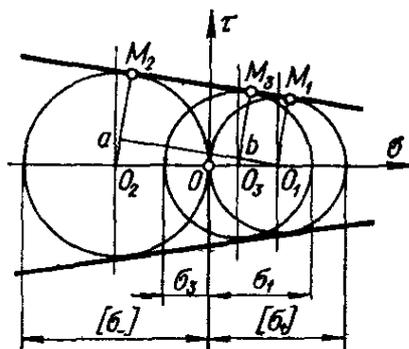


Рис. 115

6.2. Понятие о некоторых новых теориях прочности

Условие перехода материала в предельное состояние можно выразить в виде некоторого уравнения

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (6.20)$$

которое может быть представлено предельной поверхностью в трехмерном пространстве, где по осям декартовой системы координат откладываются главные напряжения.

Так, предельная поверхность, соответствующая условию появления массовых пластических деформаций, по теории удельной потенциальной энергии формоизменения (6.15) имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_T^2 = 0. \quad (6.21)$$

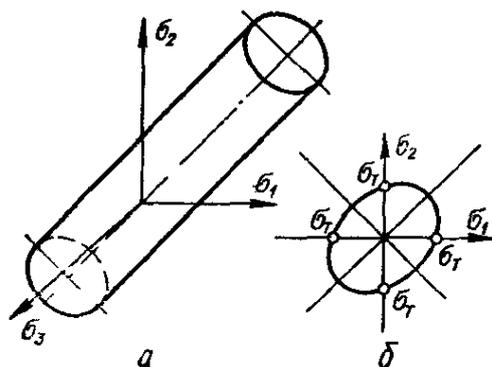


Рис. 116

Предельная поверхность (6.21) представляет собой круговой цилиндр с осью, равнонаклоненной к координатным осям (рис. 116, а), и радиусом $r = \sqrt{2/3}\sigma_T$.

Для плоского напряженного состояния, когда одно из главных напряжений равно нулю, условие (6.21) дает эллиптическую предельную кривую (рис. 116, б).

Критерию наибольших касательных напряжений соответствует предельная поверхность в виде правильной шестигранной призмы, вписанной в цилиндр. Критерию наибольших нормальных напряжений соответствует куб с ребрами, равными σ_T . Заметим, что все точки, распо-

ложенные внутри области, ограниченной предельной поверхностью, соответствуют напряженным состояниям с коэффициентом запаса прочности $n > 1$, а напряженные состояния, представленные точками, лежащими вне области, ограниченной предельной поверхностью, имеют коэффициент запаса прочности $n < 1$.

Новейшие теории и основываются на выборе различных вариантов формы предельной поверхности, при которой можно наиболее полно учесть особенности сопротивления данного класса материалов в условиях сложного и напряженного состояния.

Критерий прочности Ягна — Бужинского. Предельная поверхность (6.20) принимается в виде полинома второй степени, симметричного ко всем трем главным напряжениям:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (6.22)$$

где

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]}; \quad b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]}; \quad c = 6[\tau]^2.$$

При этом $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$, $[\tau]$ определяются из опыта для данного материала при испытании соответственно на одноосное растяжение, сжатие и чистый сдвиг.

Очевидно, теория прочности Ягна — Бужинского позволяет учесть не только различие в сопротивлении материала растяжению и сжатию, но также и сопротивление сдвигу.

Критерий прочности Писаренко — Лебедева. К числу новых теорий следует отнести теорию, предложенную Г. С. Писаренко и А. А. Лебедевым, которая основана на предположении о том, что наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление как касательным, так и нормальным напряжениям. Критерий прочности предлагается искать в виде инвариантных к напряженному состоянию функций касательных напряжений, например октаэдрических касательных напряжений, и максимального нормального напряжения.

При этом критерий прочности может быть записан в виде

$$\tau_{\text{окт}} + m_1 \sigma_1 \leq m_2. \quad (6.23)$$

Выражая константы m_1 и m_2 через предельные напряжения при одноосном растяжении σ_+^0 и сжатии σ_-^0 (в частности, через $\sigma_{\text{в}}$ и $\sigma_{\text{в(сж)}}$), условие (6.23) приводим к виду

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma_+^0$$

или, переходя к интенсивности напряжений,

$$\chi \sigma_t + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma_+^0, \quad (6.24)$$

где

$$\chi = \frac{\sigma_+^0}{\sigma_-^0}.$$

Для материала, находящегося в пластичном состоянии, когда $\sigma_+^0 = \sigma_-^0$; $\chi = 1$, выражение (6.24) преобразуется в критерий прочности, соответствующий теории формоизменения; для хрупких материалов, когда $\chi = 0$, выражение (6.24) преобразуется в первую теорию

прочности. При $0 < \chi \leq 1$, что соответствует большинству реальных конструкционных материалов, предельная поверхность по уравнению (6.24) будет представлять собой равнонаклоенную к главным осям фигуру, в которую вписана шестигранная пирамида, соответствующая теории Кулона — Мора, и выражаемая формулой (6.19).

Теория, представленная критерием (6.24), хорошо согласуется с данными эксперимента для широкого класса достаточно однородных конструкционных материалов.

Для материалов, обладающих существенной структурной неоднородностью (отдельные виды металлокерамики, графиты, пенопласты, каменное литье и т. п.), предложено условие

$$\chi \sigma_1 + (1 - \chi) \sigma_1 A^{1-J} = \sigma_+^0, \quad (6.25)$$

где $J = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1}$ — параметр напряженного состояния; A — параметр структуры материала, среднестатистическое значение которого для указанного класса материалов составляет 0,7 — 0,8.

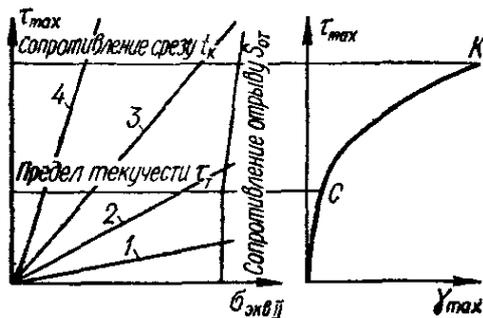


Рис. 117

Уточненное значение параметра A можно определить, используя данные испытания на кручение:

Уточненное значение параметра A можно определить, используя данные испытания на кручение:

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3} \chi}{1 - \chi},$$

где $\varphi = \sigma_+^0 / \tau_k$; τ_k — предельное напряжение при кручении.

Критерий прочности Давиденкова — Фридмана. Этот критерий базируется на рассмотрении диаграмм механического состояния, которые строят исходя из того, что в зависимости от типа напряженного состояния материалы могут разрушаться от растягивающих напряжений (путем отрыва) и касательных напряжений (путем среза). Соответственно этому различают две характеристики прочностей — сопротивление отрыву $S_{от}$, представляющее собой величину нормальных напряжений на поверхности разрушения, и сопротивление срезу t_k , представляющее собой величину касательных напряжений. Обе характеристики прочностей $S_{от}$ и t_k , а также кривые деформации не зависят от напряженного состояния.

Нарушение прочности путем отрыва описывается второй теорией прочности

$$\sigma_{экви} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = S_{от}, \quad (6.26)$$

а нарушение прочности иного вида — третьей теорией прочности

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = t_k. \quad (6.27)$$

Диаграмма механического состояния состоит из двух диаграмм (рис. 117) — диаграммы в координатах τ_{max} , $\sigma_{экви} = S_{от}$ и диаграммы τ_{max} , γ_{max} . На диаграмму наносят предельные линии, соответствующие пределу текучести при сдвиге τ_T , сопротивлению срезу t_k и со-

противлению отрыву $S_{от}$. Отклонение линии сопротивления отрыву вправо выше предела текучести соответствует возрастанию сопротивления отрыву с появлением остаточных деформаций.

Для характеристики типа напряженного состояния вводится коэффициент мягкости

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{экви}}} . \quad (6.28)$$

Различные напряженные состояния изображаются на диаграмме лучами, тангенсы углов наклона которых равны α .

При всестороннем растяжении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)

$$\tau_{\max} = 0; \alpha = 0,$$

и луч совпадает с осью абсцисс. При простом растяжении ($\sigma_1 = \sigma; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \sigma_{\text{экви}} = \sigma; \alpha = 0,5.$$

При простом сжатии ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\sigma$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \sigma_{\text{экви}} = \mu\sigma; \alpha = \frac{1}{2\mu} .$$

Принимая $\mu = 0,25$, находим $\alpha = 2$.

Рассматривая лучи, отвечающие различным типам напряженного состояния материала, можем приблизительно установить вид разрушения и выбрать, следовательно, подходящую теорию прочности.

Из рассмотрения на диаграмме луча 1 видим, что он раньше всего пересекает линию сопротивления отрыву. Следовательно, материал разрушится путем отрыва без предшествующей пластической деформации. Луч 2 пересекает сначала линию текучести, а затем линию сопротивления отрыву. Следовательно, при данном напряженном состоянии разрушению путем отрыва предшествует пластическая деформация. Для напряженного состояния, характеризуемого лучом 3, разрушение происходит после пластической деформации путем среза.

В случае, когда луч сначала пересекает линию сопротивления отрыву, следует пользоваться теорией Кулона — Мора, первой или второй теорией прочности. Если же сначала пересекается линия предела текучести, то расчет прочности должен производиться по третьей или четвертой теории прочности.

Таким образом, диаграммы механического состояния с известным приближением отражают тип разрушения в зависимости от вида напряженного состояния.

Заметим, что лучи, изображающие напряженное состояние, являются прямыми лишь до достижения предела текучести.

В заключении настоящей главы приведем в виде таблицы сводку рассмотренных и других теорий прочности, встречающихся в сопротивлении материалов (табл. 19).

Таблица 19. Критерии предельного состояния изотропных материалов (при статическом нагружении)

$\sigma_{\text{экр}}$ — эквивалентное напряжение; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные относительные деформации, определяемые по обобщенному закону Гука;

$\sigma_{\text{ср}}$ — среднее напряжение $\left(\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right)$;

σ_i — интенсивность напряжения $\left(\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}\right)$;

$\sigma_0^+, \sigma_0^-, \tau_0$ — предельные для данного материала напряжения соответственно при одноосном растяжении, одноосном сжатии и чистом сдвиге; $\chi = \frac{\sigma_0^+}{\sigma_0^-}$; $\varphi = \frac{\sigma_0^+}{\tau_0}$; $\psi = \frac{\sigma_0^-}{\tau_0}$.

Критерий	Выражение для эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{экр}}$	Геометрическая интерпретация критерия в пространстве напряжений	Примечания
Критерий наибольших нормальных напряжений (Галлея — Лейбница, называют также Клебша — Ренкина)	$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1$	Куб с центром, смещенным относительно начала координат в сторону гидростатического сжатия	Удовлетворительно описывает предельное состояние весьма хрупких достаточно однородных материалов, таких, как стекло, гипс, некоторые виды керамики
Критерий наибольших линейных деформаций (Мариотта — Грасгофа, называют также Сен-Венана)	$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$	Равносторонний косоугольный параллелепипед с осью симметрии, равнонаклоненной к координатным осям	Ввиду малой достоверности в расчетной практике в настоящее время почти не применяется

Критерий наибольших касательных и напряжений (Кулона)	$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$	Правильная шестигранная призма, равнонаклоненная к координатным осям	Удовлетворительно описывает предельное состояние пластичных малопрочных материалов (отпущенные стали), для которых характерна локализация пластических деформаций
Критерий октаэдрических касательных напряжений или удельной энергии формоизменения (Губера — Мизеса — Генки)	$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1$	Круговой цилиндр, описанный вокруг призмы, интерпретирующей критерий максимальных касательных напряжений	Хорошо описывает предельное состояние широкого класса пластичных материалов (медь, никель, алюминий, углеродистые и хромоникелевые стали и т. п.)
Критерий Кулона — Мора	$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \chi \sigma_3$	Шестигранная равнонаклоненная к координатным осям пирамида	Применяется для установления предельного состояния достаточно однородных материалов, по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию
Критерий Ягна — Бужинского	$\sigma_{\text{эКВ}} = 3(1 - \chi) \sigma_{\text{ср}} + \frac{1}{\sigma_0} [\sigma_1^2 (\varphi \psi - 3) (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]$	Равнонаклоненная к главным осям поверхность вращения. Однозначной геометрической интерпретации не имеет	Применяется в тех же случаях, что и критерий Кулона — Мора. При $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$ и $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ совпадает с критерием октаэдрических касательных напряжений
Критерий Баландина	$\sigma_{\text{эКВ}} = 3(1 - \chi) \sigma_{\text{ср}} + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0}$	Параболоид вращения, равнонаклоненный к координатным осям	Является частным случаем критерия Ягна — Бужинского (при $\tau_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0^+ \sigma_0^-}{3}}$)

Критерий	Выражение для эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{эkv}}$	Геометрическая интерпретация критерия в пространстве напряжений	Примечания
Критерий Боткина — Миролцובה	$\sigma_{\text{эkv}} = 3(1 - \chi) \sigma_{\text{ср}} + \frac{1}{2}(1 + \chi) \sigma_l$	Круговой конус, равнонаклоненный к координатным осям	Применяется в тех же случаях, что и критерий Кулона—Мора. При $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$ совпадает с критерием октаэдрических касательных напряжений
Критерий Друкера — Прагера	$\sigma_{\text{эkv}} = \left(\frac{1 + \chi}{1 + \sqrt{\chi}} \right)^2 \sigma_l + 6 \times \times \frac{\sqrt{\chi} - \chi}{1 + \sqrt{\chi}} \sigma_{\text{ср}} - 9 \times \times \left(\frac{1 - \sqrt{\chi}}{1 + \sqrt{\chi}} \right)^2 \frac{\sigma_{\text{ср}}^2}{\sigma_0^-}$	Двуполостный параболоид вращения, равнонаклоненный к координатным осям	Удовлетворительно описывает предельное состояние сравнительно пластичных материалов, для которых параметр $\chi > 0,3$
Критерий Волкова	$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{2}{\chi_s} \left[C \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \beta \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \right. \right.$	Предельная поверхность не исследована	Критерий получен на основе анализа модели микроскопически неоднородной среды в предположении, что критическое касательное напряжение в плоскости скольжения зависит от нормального напряжения в этой плоскости и от среднего напряжения. χ, λ, β, C — констан-

	$+ \lambda \sigma_{cp} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}]$		ты материала, определяемые из опытов при различных напряженных состояниях, например при одноосном растяжении, одноосном сжатии, чистом сдвиге и двухосном равномерном растяжении
Критерий Писаренко — Лебедева	$\sigma_{экр} = \chi \sigma_1 + (1 - \chi) \sigma_1$	Коническая поверхность, описанная вокруг пирамиды Кулона — Мора. В сечении октаэдрической плоскостью — равносторонний криволинейный треугольник	Хорошо описывает предельное состояние широкого класса достаточно однородных конструкционных материалов. При $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$ преобразуется в критерий октаэдрических касательных напряжений. В случае, когда $\sigma_0^+ \ll \sigma_0^-$ (весьма хрупкие материалы), результаты вычислений практически совпадают с данными расчета по критерию наибольших нормальных напряжений
Критерий Писаренко — Лебедева	$\sigma_{экр} = \chi \sigma_1 + (1 - \frac{3\sigma_{cp}}{\sigma_1} - \chi) \sigma_1 A$	Предельная поверхность равнонаклонена к координатным осям. В сечении октаэдрической плоскостью — равносторонний криволинейный треугольник	Хорошо описывает предельное состояние неоднородных материалов (хрупкие металлокерамические композиции, графит, хрупкие термореактивные пластмассы, различные горные породы, пенопласты и т. п.). Среднестатистическое значение параметра A для указанных материалов составляет 0,7—0,8

7.1. Расчет стержней на растяжение (сжатие) с учетом собственного веса

Напряжение в любом сечении стержня постоянного сечения под действием внешней растягивающей силы (рис. 118, а) с учетом собственного веса может быть определено на основе гипотезы плоских сечений по формуле

$$\sigma = \frac{N(z)}{F}. \quad (7.1)$$

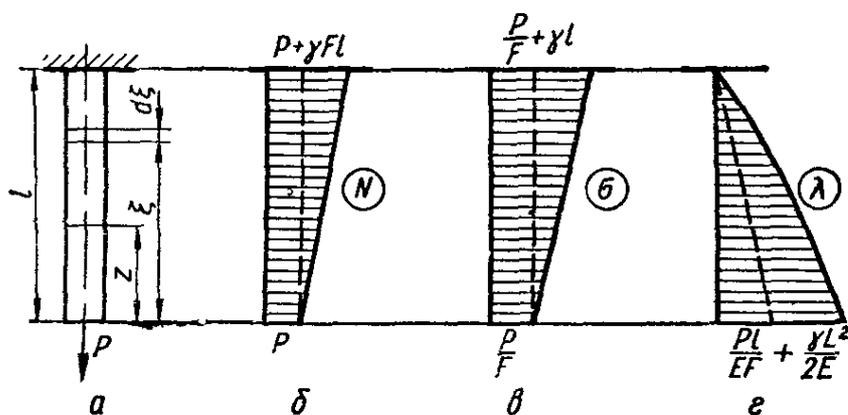


Рис. 118

Здесь

$$N(z) = P + \gamma Fz,$$

где F — площадь сечения; γ — удельный вес. Очевидно,

$$|N(z)|_{\max} = P + \gamma Fl;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|N(z)|_{\max}}{F} = \frac{P + \gamma Fl}{F} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

Условие прочности будет

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]$$

или

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (7.2)$$

При $P = 0$

$$\sigma_{\max} = \gamma l,$$

а условие прочности принимает вид

$$\gamma l \leq [\sigma].$$

Отсюда предельная длина, при которой стержень не должен разрушаться от действия собственного веса,

$$l_{\text{пр}} = \frac{[\sigma]}{\gamma},$$

а критическая длина, при которой стержень будет разрушаться от собственного веса,

$$l_{\text{кр}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\gamma}.$$

Перемещение любого сечения, находящегося на расстоянии z от свободного конца стержня, к которому приложена внешняя сила P (рис. 118, а), определяется по формуле

$$\lambda(z) = \int_z^l \frac{N(\xi)}{EF} d\xi = \int_z^l \frac{(P + \gamma F \xi)}{EF} d\xi = \frac{P(l-z)}{EF} + \frac{\gamma}{2E}(l^2 - z^2). \quad (7.3)$$

Перемещение нижнего конца стержня, очевидно, будет равно полному удлинению стержня и определится формулой

$$\lambda(z)_{z=0} = \Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Учитывая, что вес стержня $Q = \gamma l F$, получаем

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \quad (7.4)$$

Эпюры осевых сил, напряжений и перемещений показаны на рис. 118, б, в, г.

7.2. Стержень равного сопротивления растяжению (сжатию). Ступенчатый стержень

Стержнем равного сопротивления растяжению (сжатию) называется такой стержень, в каждом поперечном сечении которого напряжения одинаковы и равны допускаемому. Площадь поперечного сечения такого стержня (рис. 119) изменяется по закону

$$F(z) = F_0 e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}, \quad (7.5)$$

где $F_0 = P/[\sigma]$ — минимальное сечение стержня в месте приложения нагрузки; γ — удельный вес; z — текущая координата; e — основание натуральных логарифмов.

Наибольшая площадь сечения

$$F_{\text{max}} = F_0 e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}}. \quad (7.6)$$

Вес стержня Q определяется из условия $P + Q = [\sigma] F_{\text{max}}$, откуда

$$Q = [\sigma] F_{\text{max}} - P, \text{ или с учетом (7.6) } Q = P \left(e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right).$$

Относительное укорочение стержня равного сопротивления сжатии $\epsilon = [\sigma]/E$, а абсолютное укорочение

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l. \quad (7.7)$$

Стержень равного сопротивления действию осевых сил является оптимальным с точки зрения рационального использования материала, что существенно в случае большой длины стержня.

Ступенчатый стержень состоит из отдельных участков (ступеней) с постоянной площадью поперечного сечения в пределах каждого участка. Он занимает промежуточное положение между стержнем постоянного поперечного сечения и стержнем равного сопротивления.

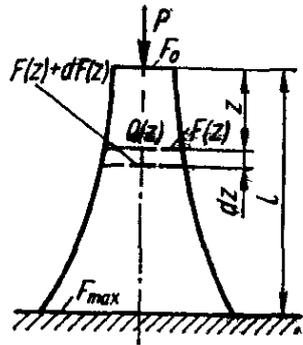


Рис. 119

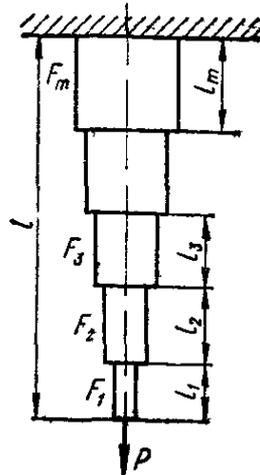


Рис. 120

Сечение любого n -го участка при длинах участков $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, \dots, l_m$ и сечениях соответственно $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots, F_m$ (рис. 120) может быть определено по формуле

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2) \dots ([\sigma] - \gamma l_n)}. \quad (7.8)$$

Если длины всех участков одинаковы:

$$l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = \dots = l_m = \frac{l}{m},$$

то

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma] - \gamma \frac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l}{[\sigma] m}\right)^n}, \quad (7.9)$$

где m — число ступеней в стержне; l — длина стержня.

7.3. Статически неопределимые конструкции

Статически неопределимыми называются конструкции, в элементах которых усилия не могут быть определены из уравнений статики. Кроме уравнений статики при решении статически неопределимых задач необходимо использовать также уравнения, учитывающие деформации элементов конструкций.

Все статически неопределимые конструкции имеют так называемые лишние связи в виде закреплений, стержней или других элементов. «Лишними» такие связи называются потому, что они не являются необходимыми для обеспечения равновесия конструкции и ее геометрической неизменяемости, а обуславливаются требованиями к прочности и жесткости конструкции. Число лишних неизвестных, или степень статической неопределимости системы, устанавливается разностью между числом неизвестных, подлежащих определению, и числом уравнений статики.

При одной лишней неизвестной система называется один раз или однажды статически неопределимой, при двух — дважды статически неопределимой и т. д. Конструкции, показанные на рис. 121, а, б, г, д, е, являются один раз статически неопределимыми, а конструкция, приведенная на рис. 121, в, — дважды статически неопределимой.

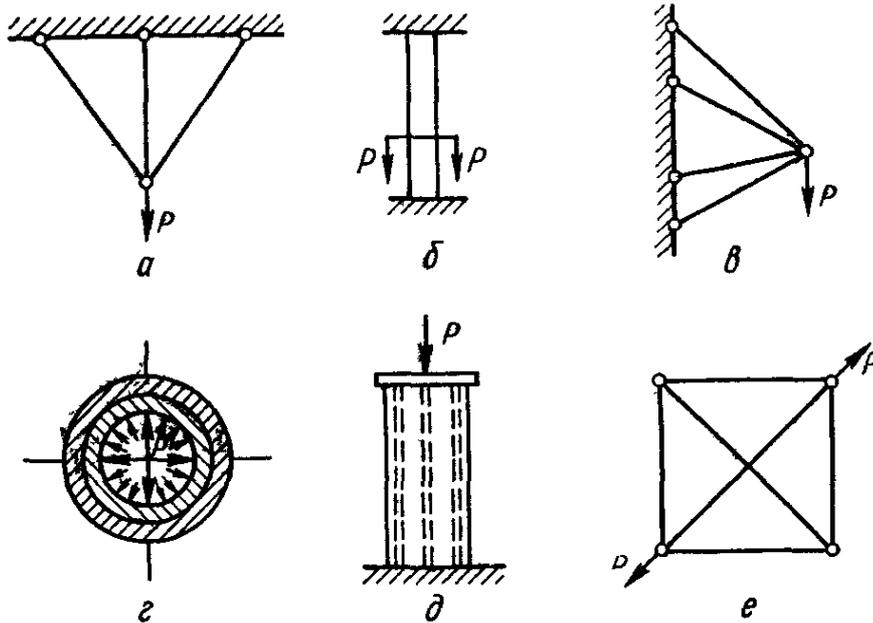


Рис. 121

Решение статически неопределимых задач проводят в четыре этапа.

1. **Статическая сторона задачи.** Составляют уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия.

2. **Геометрическая сторона задачи.** Устанавливают связь между деформациями отдельных элементов конструкции, исходя из условий совместности деформаций. Полученные уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*.

3. **Физическая сторона задачи.** В уравнениях совместности выражают деформации элементов конструкций на основании закона Гука через действующие в них неизвестные усилия.

4. **Синтез** Решают совместно полученные уравнения относительно искомых неизвестных усилий.

Ниже приведен пример расчета один раз статически неопределимой трехстержневой системы-подвески (рис. 122, а)

1. Статическая сторона задачи (рис. 122, б)

$$\Sigma X = N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0; \quad (7.10)$$

$$\Sigma Y = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0. \quad (7.11)$$

Из (7.10) находим

$$N_3 = N_2 l \quad (7.12)$$

из (7.11) находим

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \quad (7.13)$$

2. Геометрическая сторона задачи (рис. 122, а)

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha. \quad (7.14)$$

3. Физическая сторона задачи

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}. \quad (7.15)$$

4. Синтез. Подставляя (7.15) в (7.14), получаем

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} \cos \alpha. \quad (7.16)$$

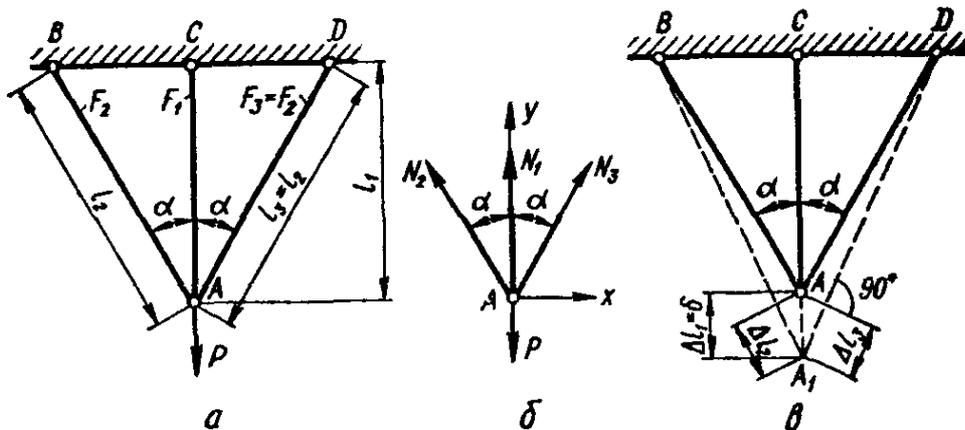


Рис. 122

Решая совместно уравнения (7.16) и (7.13), находим

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}; \\ N_2 &= \frac{P \frac{c_2}{c_1} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

где

$$c_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1}; \quad c_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2}.$$

Усилия N_1 и N_2 оказались зависящими от соотношения жесткостей стержней. Поэтому при проекторочном расчете вычислить их можно, только задавшись некоторым отношением жесткостей стержней. В этом одна из особенностей расчета статически неопределимых стержневых систем.

Расчетные формулы для определения усилий в некоторых простейших стержневых системах приведены в табл. 20.

Таблица 20. Усилия в простейших стержневых системах (E — модуль упругости материала стержня; F — площадь поперечного сечения стержня)

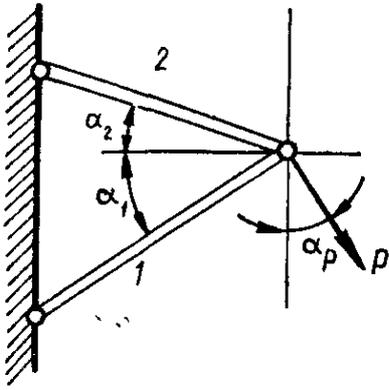
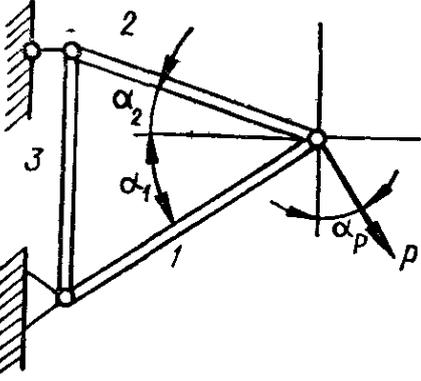
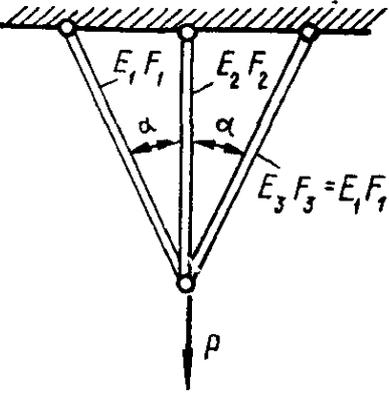
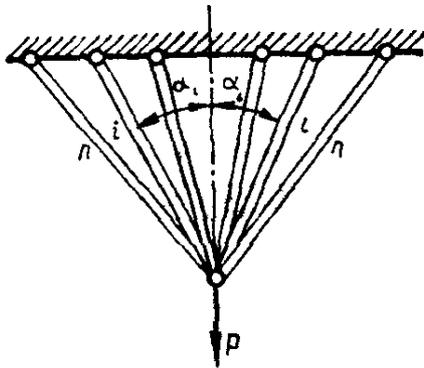
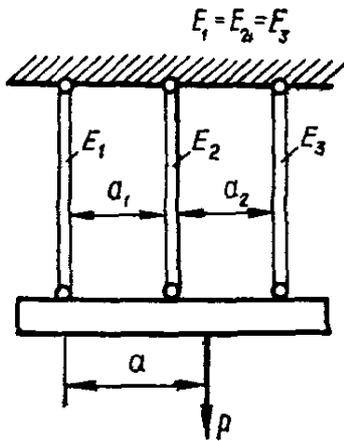
Схема стержневой системы	Формулы для расчета продольных усилий в стержне
	$N_1 = -P \frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$ $N_2 = P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$
	$N_1 = -P \frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$ $N_2 = P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$ $N_3 = -P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin \alpha_2$
	$N_1 = N_3 = \frac{P \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha};$ $N_2 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha}$

Схема стержневой системы

Формулы для расчета продольных усилий в стержне



$$N_i = P \frac{E_i F_i \cos^2 \alpha_i}{2 \sum_{i=1}^n E_i F_i \cos^3 \alpha_i}$$



$$N_1 = P \frac{2a_1 a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}\right) + a_2^2 - aa_2 - aa_1 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}\right)}{2a_1 a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}\right)}$$

$$N_2 = P \frac{a_1 a_2 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + a_2^2 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} - aa_2 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + aa_1 \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}}{2a_1 a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}\right)}$$

$$N_3 = P \frac{-a_1 a_2 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + aa_2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}\right) + aa_1}{2a_1 a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}\right)}$$

7.4. Расчет гибких нитей

Гибкой нитью называется стержень, способный сопротивляться только растяжению. Из шести компонентов внутренних сил для гибкой нити только осевая сила не равна нулю.

К гибким нитям относятся провода электрических и телеграфных сетей, цепи висячих мостов, тросы канатных дорог и т. п. Точки подвеса гибких нитей могут находиться как на одном, так и на разных уровнях (рис. 123, а, б).

Основной нагрузкой гибкой нити из материала с удельным весом γ и площадью поперечного сечения F является собственный вес провода с интенсивностью $q_n = \gamma F$.

Однако нагрузка в гибкой нити может создаваться не только собственным весом провода, но также некоторыми другими факторами, например давлением ветра, весом льда при обледенении проводов. Эти нагрузки также предполагаются равномерно распределенными по длине нити. Интенсивности этих нагрузок обозначим соответственно q_v и q_d .

Толщина корки льда в зависимости от климатического района принимается равной 0,5 — 2,5 см.

Интенсивность нагрузки от давления ветра в горизонтальной плоскости будет определяться формулой

$$q_v = \rho d$$

или

$$q_v = k\alpha q_{ск} d, \quad (7.18)$$

где ρ — давление ветра; d — диаметр провода с учетом его увеличения за счет обледенения; $k = 1,2$ — аэродинамический коэффициент; $\alpha = 0,85$ — коэффициент неравномерности ветра; $q_{ск}$ — скорость напора. Выражая последнюю через скорость ветра в метрах в секунду, а d в метрах, найдем интенсивность ветровой нагрузки:

$$q_v = 624 \cdot 10^{-3} v^2 d \text{ [Н/м]}. \quad (7.19)$$

Суммарная интенсивность нагрузки на гибкую нить может быть определена по формуле

$$q = \sqrt{(q_n + q_d)^2 + q_v^2}. \quad (7.20)$$

Плоскость действия суммарной нагрузки, совпадающая с плоскостью провисания нити, не будет вертикальной.

Гибкая нить относится к классу один раз статически неопределимых систем

Приведем основные формулы, применяемые при расчете гибкой нити в общем случае, когда точки подвеса нити находятся на разных уровнях (рис. 124, а).

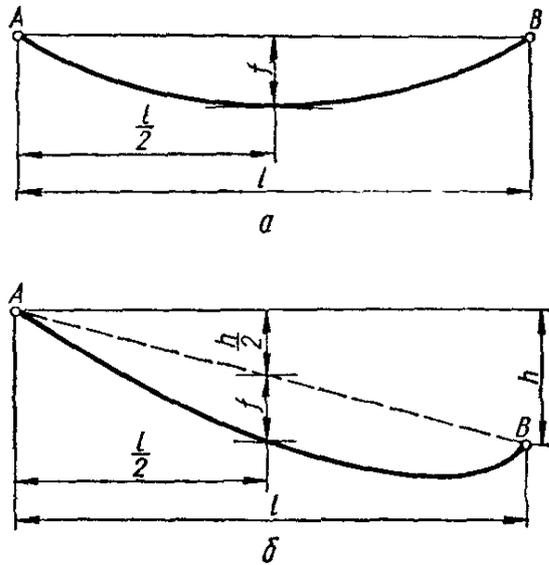


Рис. 123

Обычно распределенную нагрузку \tilde{q} , действующую на провод, заменяют статически эквивалентной нагрузкой q , распределенной вдоль пролета длиной l :

$$q = \frac{\tilde{q} l_1}{l} = \frac{\tilde{q}}{\cos \beta}.$$

Полагая нить идеально гибкой, можно считать растягивающие усилия в любом сечении нити касательными к кривой провисания нити. В точках закрепления A и B усилия, действующие в нити, равны реакциям опор T_A и T_B . Представляя реакции опор в виде горизонтальных (H) и вертикальных (R) составляющих, из рассмотрения статической стороны задачи получаем

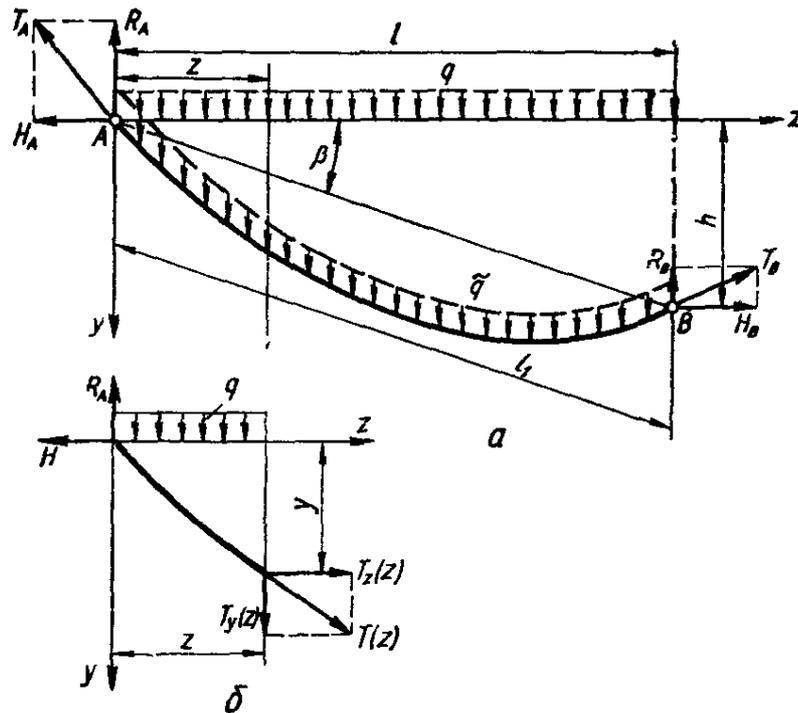


Рис. 124

$$\Sigma Z = -H_A + H_B = 0;$$

$$\Sigma Y = -R_A - R_B + ql = 0;$$

$$\Sigma M_B = -H_A h + R_A l - \frac{ql^2}{2} = 0,$$

откуда

$$H_A = H_B = H; \quad (7.21)$$

$$R_A = \frac{ql}{2} + H \frac{h}{l}; \quad (7.22)$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - H \frac{h}{l}. \quad (7.23)$$

Из рассмотрения равновесия части нити (рис. 124, б) находим

$$\Sigma Z = -H + T_z(z) = 0;$$

$$\Sigma Y = -R_A + qz + T_y(z) = 0,$$

откуда

$$T_z(z) = H; \quad (7.24)$$

$$T_y(z) = H \frac{h}{l} + q \left(\frac{l}{2} - z \right), \quad (7.25)$$

где H — горизонтальная составляющая усилия, одинаковая во всех сечениях, называется *натяжением нити*.

Суммарное растягивающее усилие в любом сечении нити

$$T(z) = \sqrt{T_z^2(z) + T_y^2(z)} = \sqrt{H^2 + \left[H \frac{h}{l} + q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right]^2} \quad (7.26)$$

и максимально при $z = 0$, т. е.

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H \frac{h}{l} \right)^2}. \quad (7.27)$$

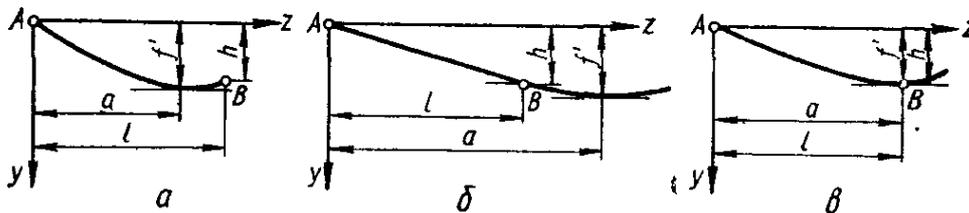


Рис. 125

Для пологих нитей (длина которых по кривой провисания мало, не более чем на 10 %, отличается от длины пролета) разница между T_{\max} и H невелика. Поэтому с достаточной для практики точностью расчет нити на прочность ведут по величине натяжения H .

Уравнение кривой провисания нити найдем, приравняв (на основании совершенной гибкости нити) изгибающий момент нулю:

$$M(z) = R_A z - Hy - \frac{qz^2}{2} = 0,$$

откуда с учетом (7.22) получим

$$y = \left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} \right) z - \frac{qz^2}{2H}, \quad (7.28)$$

т. е. кривая провисания нити имеет аналитическое выражение параболы.

Заметим, что если задачу решать точно, считая нагрузку распределенной равномерно по длине нити, а не по пролету, то кривая провисания будет *цепной линией*. Правая часть уравнения (7.28) является первым членом разложения уравнения цепной линии в ряд Маклорена по степеням z . Использование приближенной формулы (7.28) на практике дает вполне удовлетворительные результаты.

Положение нижней точки подвешенной нити, координаты которой обозначены $z = a$; $y = f'$ (рис. 125, а), определим, приравняв нулю производную от правой части уравнения (7.28):

$$\frac{dy}{dz} = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qz}{H} = 0,$$

откуда

$$z = a = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \quad (7.29)$$

Подставив (7.29) в (7.28), найдем наибольшее провисание нити

$$y_{\max} = f' = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}. \quad (7.30)$$

Различают три характерных случая расположения нижней точки кривой провисания нити.

1. Низшая точка кривой провисания находится в пределах пролета, т. е. $a < l$ (рис. 125, а). Согласно (7.29) это будет тогда, когда

$$H < \frac{ql^2}{2h}. \quad (7.31)$$

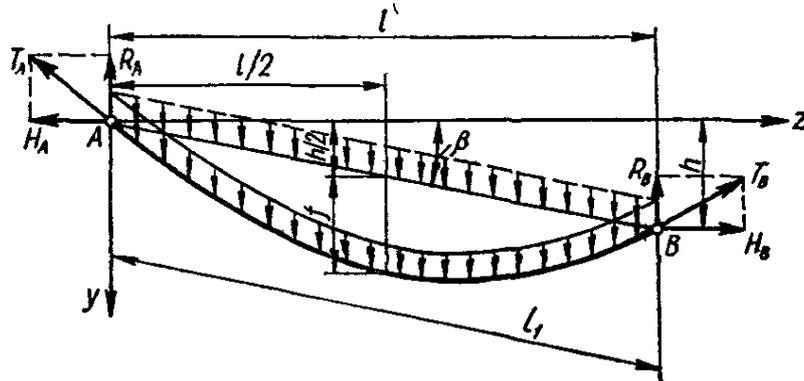


Рис. 126

2. Низшая точка кривой провисания находится вне пролета, т. е. $a > l$ (рис. 125, б). Это будет при условии

$$H > \frac{ql^2}{2h}. \quad (7.32)$$

3. Низшая точка кривой провисания совпадает с нижней точкой подвеса, т. е. $a = l$ (рис. 125, в). Для этого случая необходимо, чтобы

$$H = \frac{ql^2}{2h}. \quad (7.33)$$

Во всех трех случаях координаты a и f' нижней точки определяют по формулам (7.29) и (7.30).

Установим зависимость между натяжением H и стрелой провисания f . Подставляя в (7.28) $z = l/2$ и $y = \frac{h}{2} + f$ (рис. 126), находим

$$f = \frac{ql^2}{8H} \quad (7.34)$$

или

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (7.35)$$

Натяжение нити, выраженное через наибольшее провисание f' , найдем, решив квадратное уравнение (7.30) относительно H :

$$H = \frac{ql^2}{h^2} \left[f' - \frac{h}{2} \pm \sqrt{f'(f' - h)} \right].$$

Если низшая точка кривой провисания находится в пределах пролета, то перед корнем берется знак «минус», если вне пролета — знак «плюс».

Рассмотрев геометрическую сторону задачи, установим связь между длиной подвешенной нити S , пролетом l и величиной провисания f . Длину элемента нити, учитывая малое провисание, можно выразить следующей зависимостью:

$$dS = \sqrt{dz^2 + dy^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz \simeq \simeq \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (7.36)$$

Подставляя производную от выражения (7.28) dy/dz в (7.36) и интегрируя по всей длине, находим

$$S = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2} + \frac{h^2}{2l} \quad (7.37)$$

или, учитывая равенство (7.35), получаем

$$S = l + \frac{8 f^2}{3 l} + \frac{h^2}{2l}. \quad (7.38)$$

Удлинение подвешенной нити от растяжения

$$\Delta S = S - L = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2} + \frac{h^2}{2l} - L, \quad (7.39)$$

где L — длина неподвешенной нити.

Из рассмотрения физической стороны задачи устанавливаются зависимости изменения длины нити от растягивающего усилия и изменения температуры.

Принимая для пологих нитей за расчетное растягивающее усилие натяжение H и заменяя длину нити расстоянием между точками подвеса l_1 , находим удлинение нити

$$\Delta S_H = \frac{H l_1}{EF} = \frac{H l}{EF \cos \beta}. \quad (7.40)$$

Температурное удлинение нити определяется формулой

$$\Delta S_t = \alpha l_1 (t - t_0) = \frac{\alpha l}{\cos \beta} (t - t_0), \quad (7.41)$$

где α — коэффициент линейного расширения материала нити; t_0 — температура в момент подвешивания нити; t — температура, для которой проводится расчет нити.

Суммарное изменение исходной длины нити

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_t = \frac{H l}{EF \cos \beta} + \frac{\alpha l}{\cos \beta} (t - t_0). \quad (7.42)$$

Приравняв правые части (7.39) и (7.42), выражающие одну и ту же величину удлинения подвешенной нити, находим

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2} + \frac{h^2}{2l} - \frac{H l}{EF \cos \beta} - \frac{\alpha l}{\cos \beta} (t - t_0). \quad (7.43)$$

Совместное рассмотрение уравнений (7.35) и (7.43) позволяет определить натяжение нити H и стрелу ее провисания f . Определив H , по формуле (7.27) можно найти T_{\max} , а затем проверить прочность по формуле

$$\sigma = \frac{T_{\max}}{F} \approx \frac{H}{F} \ll [\sigma], \quad (7.44)$$

или с учетом (7.35)

$$\sigma = \frac{ql^2}{8fF} \ll [\sigma]. \quad (7.45)$$

Введя понятие удельной нагрузки

$$\tilde{\gamma} = q/F,$$

получим условие прочности (7.45) в виде

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma}l^2}{8f} \ll [\sigma]. \quad (7.46)$$

Заметим, что при расчете электрических проводов сечение провода F определяется из электрических соотношений, а затем выполняется проверочный расчет по формуле (7.46).

Большой практический интерес представляет частный случай расчета нити, когда точки подвеса находятся на одном уровне, т. е. при

$$\cos \beta = \cos 0 = 1; h = 0; R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Как и в общем случае, останутся в силе формулы (7.34) и (7.35), а уравнение совместности деформаций (7.43) примет вид

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2} - \frac{Hl}{EF} - \alpha l (t - t_0). \quad (7.47)$$

На практике часто приходится учитывать влияние на напряжение и стрелу провисания нити изменений температуры и нагрузки. Пусть требуется определить изменение напряжения и стрелы провисания в состоянии n , характеризуемом параметрами $t_n, q_n, f_n, H_n = q_n l^2 / 8 f_n$, по сравнению с первоначальным состоянием m в момент подвеса нити, характеризуемом параметрами $t_m, q_m, f_m, H_m = q_m l^2 / 8 f_m$.

Решение поставленной задачи можно получить, если выразить длину L нити для состояний m и n в соответствии с (7.47):

$$L = l + \frac{q_m^2 l^3}{24 H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l (t_m - t_0);$$

$$L = l + \frac{q_n^2 l^3}{24 H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l (t_n - t_0).$$

Приравняв правые части этих уравнений и введя замену

$$\frac{q_m}{F} = \gamma_m; \quad \frac{q_n}{F} = \gamma_n; \quad \sigma_m = \frac{H_m}{F}; \quad \sigma_n = \frac{H_n}{F},$$

Окончательно получим

$$\sigma_n - \frac{\gamma_n^2 l^2 E}{24 \sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\gamma_m^2 l^2 E}{24 \sigma_m^2} - \alpha E (t_m - t_n). \quad (7.48)$$

Зависимость (7.48) иногда называют *уравнением состояния нити*. Она может быть представлена в виде

$$\sigma_n^3 - \left[\sigma_m - \frac{\gamma_m^2 l^2 E}{24 \sigma_m^2} - \alpha (t_n - t_m) \right] \sigma_n^2 - \frac{\gamma_n^2 l^2 E}{24} = 0, \quad (7.49)$$

или учитывая, что

$$\sigma_m = \frac{\gamma_m l^2}{8 f_m}; \quad \sigma_n = \frac{\gamma_n l^2}{8 f_n},$$

в виде

$$f_n^3 - \left[f_m^2 - \frac{3}{8} \alpha l^2 (t_n - t_m) - \frac{3}{64} \frac{\gamma_m l^4}{E f_m} \right] f_n - \frac{3}{64} \frac{\gamma_n l^4}{E} = 0. \quad (7.50)$$

При различных уровнях точек подвеса уравнение состояния нити соответственно примет вид

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 \frac{t_n - t_m}{\cos \beta} - \frac{3}{64} \frac{\gamma_m l^4}{E f_m \cos \beta} \right] f_n - \frac{3}{64} \frac{\gamma_n l^4}{E \cos \beta} = 0. \quad (7.51)$$

Кубическое уравнение (7.50) или (7.51) относительно f_n удобно решать графически. Так, записав его в виде $f_n^3 - a f_n - b = 0$ или $f_n^3 = a f_n + b$, где a и b — известные числа, строят графики

$$y = f_n^3 \text{ и } y = a f_n + b.$$

Абсцисса точки пересечения получаемой при этом кубической параболы с прямой линией и дает значение искомого провисания f_n (рис. 127).

При расчете нити на прочность необходимо учитывать случаи наиболее неблагоприятных сочетаний ветра и обледенения, вызывающих максимальные напряжения в ней.

Из уравнения состояния (7.48) следует, что в случае малых пролетов при $l \rightarrow 0$

$$\sigma_n = \sigma_m + \alpha E (t_m - t_n),$$

т. е. изменение напряжений зависит главным образом от изменений температуры.

В случае больших пролетов при $l \rightarrow \infty$

$$\sigma_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \sigma_m,$$

т. е. напряжение в основном зависит от нагрузки.

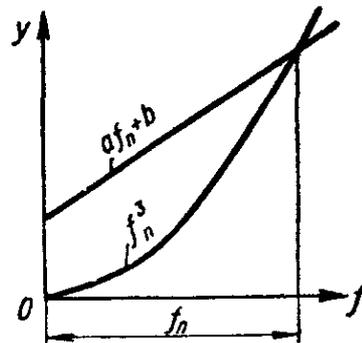


Рис. 127

Критической длиной нити $l_{кр}$ называется такая длина, при которой напряжение в нити одинаково в обоих опасных состояниях (как при наибольшей нагрузке — состоянии n , так и при наименьшей — температуре — состоянии m), т. е. когда

$$\sigma_n = \sigma_m = [\sigma]. \quad (7.52)$$

Полагая, что t_n соответствует температуре обледенения (обычно $t_{об} = 268$ K), при которой $\gamma_n = \gamma_{max}$, а t_m соответствует наименьшей температуре t_{min} , при которой на нить действует только собственный вес γ , т. е. $\gamma_m = \gamma_1$, находим критическую длину нити $l_{кр}$ из (7.49) с учетом (7.52):

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24 \alpha (t_{об} - t_{min})}{\gamma_{max}^2 - \gamma_1^2}}.$$

Сопоставляя расчетный пролет l с критическим $l_{кр}$, можно убедиться, что при $l < l_{кр}$ наибольшие напряжения будут при наиболее низкой температуре, а в случае $l > l_{кр}$ наибольшие напряжения в нити будут при наибольших нагрузках.

8.1. Сдвиг. Расчет на срез

Деформация сдвига характерна тем, что из шести составляющих главного вектора силы R и главного момента M отлична от нуля только одна поперечная сила Q_y (или Q_x), а все остальные равны нулю.

Примером сдвига или среза может служить деформация полосы при резке ее ножницами (рис. 128, а, б). Практически деформацию сдвига в чистом виде получить трудно, так как она обычно сопровождается другими деформациями, и чаще всего деформацией изгиба.

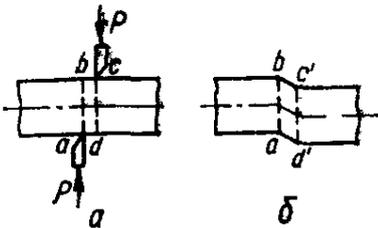


Рис. 128

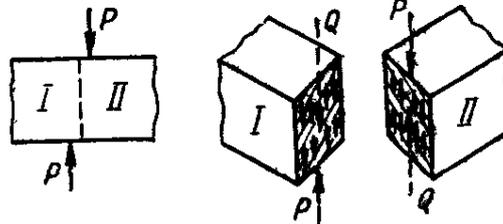


Рис. 129

При нагрузке по схеме, показанной на рисунке, на участке bc , очевидно, поперечная сила

$$Q = P, \tag{8.1}$$

а связь между касательными напряжениями τ и поперечной силой будет

$$\int_F \tau dF = Q. \tag{8.2}$$

Принимая касательные напряжения τ по площади поперечного сечения F распределенными равномерно (рис. 129), на основании (8.2) находим

$$\tau = \frac{Q}{F},$$

или, учитывая (8.1), получаем

$$\tau = \frac{P}{F}. \tag{8.3}$$

Допущение о равномерности распределения касательных напряжений по сечению является весьма условным, поскольку в силу закона парности касательные напряжения у верхней и нижней граней равны нулю. Однако принятое допущение широко используется на практике при расчете болтов, заклепочных и сварных соединений, шпонок и т. п.

8.2. Чистый сдвиг

Случай плоского напряженного состояния, когда по четырем граням выделенного элемента действуют только касательные напряжения (рис. 130), называется *чистым сдвигом*. Найдем величину главных напряжений применительно к схеме нагружения, приведенной на рис. 130, а. Для этого с учетом того, что в данном случае $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$; $\tau_\alpha = -\tau$; $\tau_\beta = \tau$, строим круг напряжений (рис. 130), из которого следует, что

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau. \quad (8.4)$$

Средние напряжения в главных площадках, совпадающих с фасадной гранью, $\sigma_2 = 0$. Главные площадки наклонены к граням элемента под углом 45° . Под действием касательных напряжений элемент $abcd$, имевший форму квадрата со стороной a , превратится в ромб

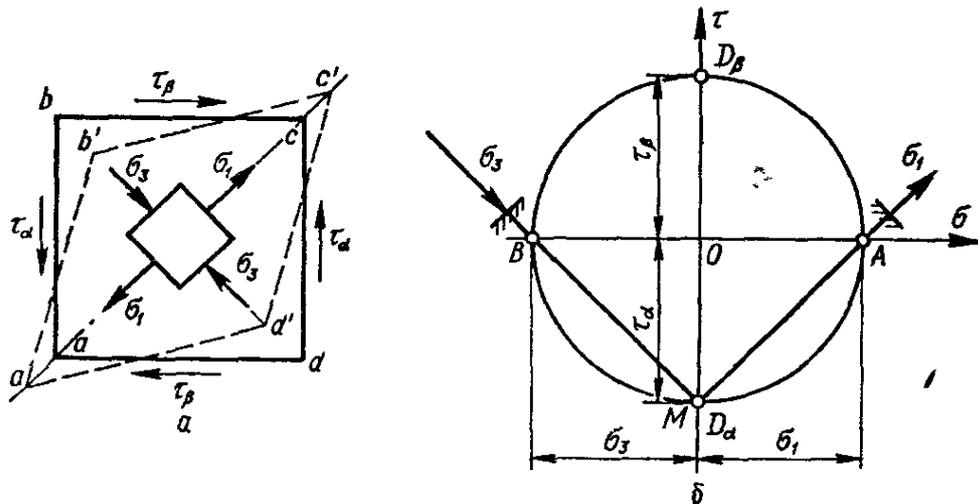


Рис. 130

$a'b'c'd'$. Деформация чистого сдвига заключается в изменении прямых углов. Представляя для наглядности элемент, находящийся в условиях чистого сдвига, закрепленным по одной из граней (рис. 131) находим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Учитывая малость угла, можем принять $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$, тогда относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \quad (8.5)$$

Зависимость между нагрузкой и деформацией при сдвиге видна на диаграмме сдвига (рис. 132), которая может быть получена подобно диаграмме напряжений при испытаниях на растяжение.

Очевидно, в пределах линейной зависимости между γ и τ справедливо соотношение

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{или} \quad \tau = G\gamma, \quad (8.6)$$

где G — коэффициент пропорциональности, который называется *модулем упругости при сдвиге* или *модулем упругости второго рода*. Он

имеет размерность Н/м^2 , кН/м^2 , МН/м^2 и измеряется соответственно в Па, кПа, МПа и т. д. Формулы (8.6) выражают закон Гука при сдвиге, записанный в относительных координатах. Из рис. 131 видно, что для диагонали $AC = l = a\sqrt{2}$ ее удлинение

$$\Delta l = CC_1 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}},$$

а относительное линейное удлинение (в направлении σ_1)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{2a} = \frac{\gamma}{2}$$

или с учетом соотношения (8.6)

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}. \quad (8.7)$$

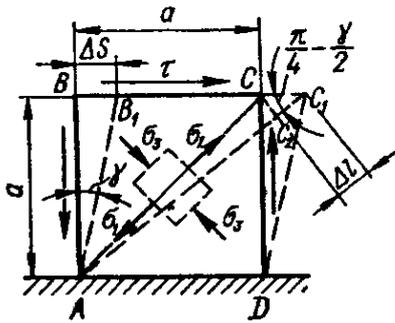


Рис. 131

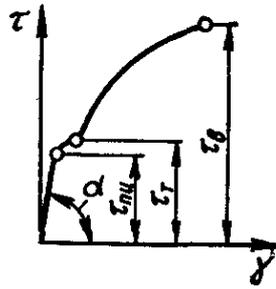


Рис. 132

Применяя обобщенный закон Гука к чистому сдвигу (рис. 131), находим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (8.8)$$

Из сопоставления правых частей равенств (8.7) и (8.8) получаем

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.9)$$

При $\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ $G = (0,375 - 0,4) E$.

Используя (8.5), выразим абсолютный сдвиг Δs через $Q = F\tau$:

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Qa}{GF},$$

т. е.

$$\Delta s = \frac{Qa}{GF}. \quad (8.10)$$

Формула (8.10) выражает закон Гука при сдвиге в абсолютных единицах. Потенциальная энергия при сдвиге определяется формулой

$$U = \frac{\Delta s Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации при сдвиге

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GFaF} = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (8.11)$$

где V — объем элемента.

Главные напряжения при чистом сдвиге (рис. 130, а) такие:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Условия прочности при чистом сдвиге запишутся:
по первой теории прочности

$$\sigma_1 = \tau < [\sigma]; \quad (8.12)$$

по второй теории прочности

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 < [\sigma].$$

Подставляя значения главных напряжений, находим

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu} = [\tau]. \quad (8.13)$$

Для металлов $\mu = 0,25 - 0,42$, поэтому $[\tau] = (0,7 - 0,8) [\sigma]$.
По третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma].$$

Отсюда

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau] \quad (8.14)$$

и допускаемое напряжение

$$[\tau] = 0,5 [\sigma].$$

По четвертой теории прочности при сдвиге

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma];$$

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 [\sigma].$$

Отметим, что при расчете деталей из пластичных материалов (болты, заклепки, шпонки и т. п.) наиболее подходящей является последняя формула.

8.3. Некоторые примеры расчета на срез

Болтовые и заклепочные соединения. При расчете болтов на срез (рис. 133, а) условно принимают распределение внешних сил, действующих на болт, и касательных напряжений в сечении среза соответствующим схеме, приведенной на рис. 133, б.

Условие прочности болта на срез может быть записано в виде

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{F} \leq [\tau]$$

или с учетом того, что $Q = P$ (рис. 133, в), а $F = \pi d^2/4$,

$$\tau_{\max} = \frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau].$$

Отсюда определим диаметр болта

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi [\tau]}}. \quad (8.15)$$

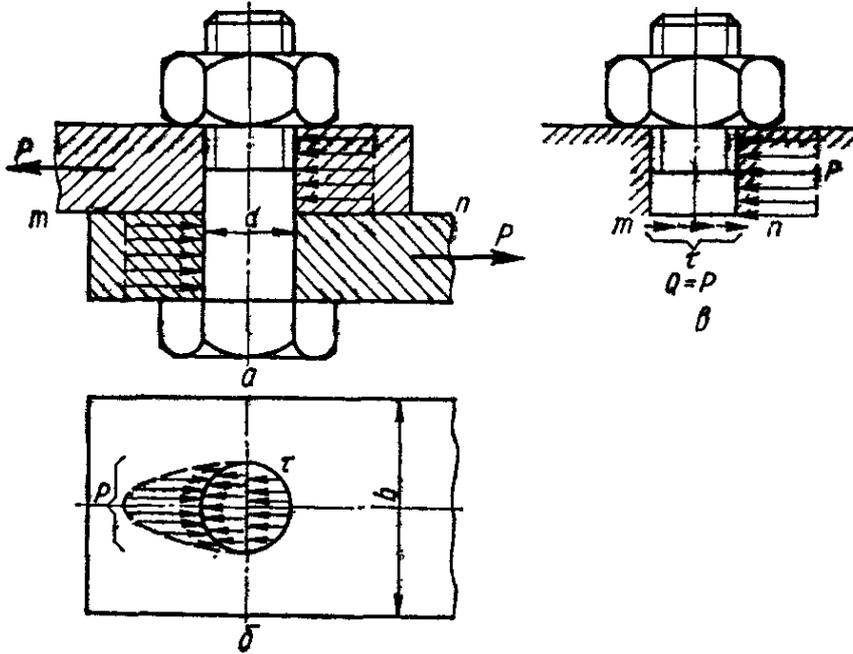


Рис. 133

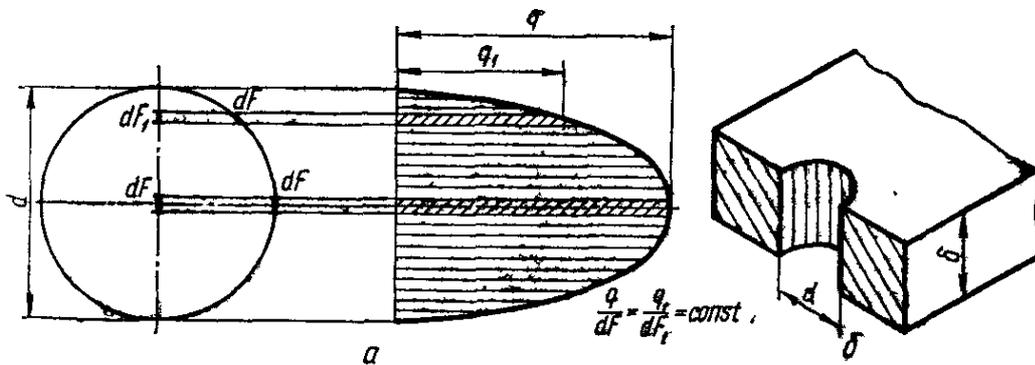


Рис. 134

При расчете болтовых или заклепочных соединений следует учитывать, что нагрузка, приложенная к элементам соединения, помимо среза вызывает *смятие* контактирующих поверхностей. Под смятием понимают пластическую деформацию, возникающую на поверхности контакта.

Расчет на смятие проводят приближенно, поскольку закон распределения давления по поверхности контакта точно не известен. Обычно принимают нелинейный закон распределения давления (рис. 134, а), считая, что давление пропорционально проекции dF_1 площадки dF цилиндрической поверхности на диаметральною плоскость:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}.$$

Максимальное напряжение смятия для цилиндрической поверхности равно

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{F_{\text{см}}} = \frac{P}{\delta d},$$

где $F_{\text{см}} = \delta d$ — площадь проекции поверхности контакта на диаметрально плоскость (рис. 134, б).

Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{\delta d} \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (8.16)$$

Допускаемые напряжения на смятие устанавливаются опытным путем и принимаются равными

$$[\sigma_{\text{см}}] = (2 - 2,5) [\sigma_-].$$

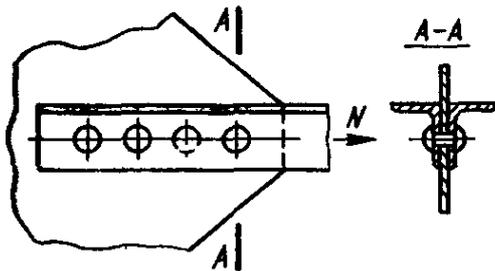


Рис. 135

На основании (8.16) можно определить необходимый диаметр болта

$$d \geq \frac{P}{\delta [\sigma_{\text{см}}]}. \quad (8.17)$$

Из двух значений диаметров, найденных по формулам (8.15) и (8.17), следует взять большее, округлив его до стандартного.

Так как болты и заклепки ослабляют соединяемые листы, последние проверяют на разрыв в наиболее ослабленных сечениях. В случае одного болта условие прочности принимает вид

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{min}}} = \frac{P}{\delta (b - d)} \leq [\sigma_+],$$

где b — ширина листа.

Рассмотрим заклепочное соединение, заклепки которого подвергаются двойному срезу (рис. 135).

Положив, что растягивающая сила N равномерно распределена между заклепками и задав диаметр заклепок d и толщину листа δ найдем число заклепок i из условия прочности на срез

$$\tau = \frac{N}{2i \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau];$$

$$i \geq \frac{2N}{\pi d^2 [\tau]},$$

или из условия прочности на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{N}{i \delta d} \leq [\sigma_{\text{см}}];$$

$$i \geq \frac{N}{\delta d [\sigma_{\text{см}}]}.$$

Сварные соединения. На срез принято (также условно) рассчитывать и некоторые сварные соединения. Наиболее распространены сое

динения встык и соединения с помощью угловых или валиковых швов. Соединения встык применяются, когда соединяемые листы находятся в одной плоскости. Кромки листов при толщине $\delta \leq 8$ мм не обрабатываются (рис. 136, а); при $\delta = 8 - 20$ мм скашиваются, сварка производится с одной стороны и получается V-образный шов (рис. 136, б), при $\delta \geq 20$ мм кромки скашиваются с двух сторон, получается X-образный шов (рис. 136, в). Расчет таких швов осуществляется на разрыв. Расчетную толщину шва принимают равной δ (наплавы не учитываются).

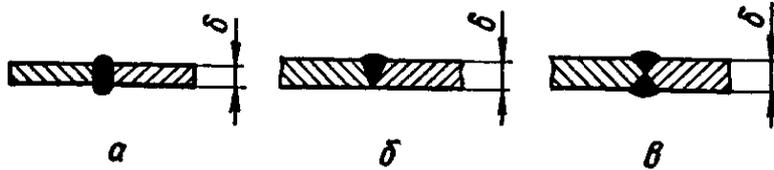


Рис. 136



Рис. 137

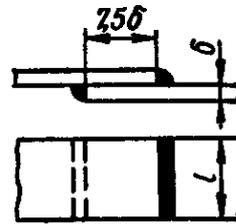


Рис. 138

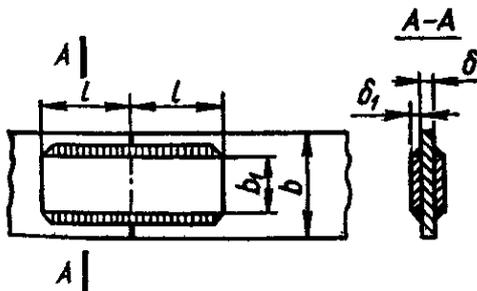


Рис. 139

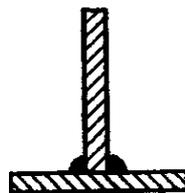


Рис. 140

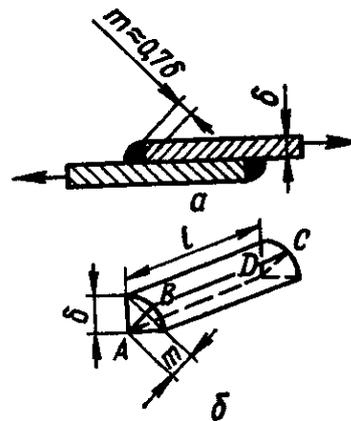


Рис. 141

Соединения с помощью угловых швов применяют в случаях, когда соединяемые листы параллельны или перпендикулярны. К ним относятся соединения внахлестку, с накладками и тавровые. Если направление шва перпендикулярно к действующему усилию, то шов называется лобовым. Швы, параллельные усилию, называются фланговыми или боковыми. Применяются также косые швы (рис. 137), направленные под некоторым углом к действующей силе. На рис. 138 показано соединение листов внахлестку лбовыми швами, на рис. 139 — соединение с накладками, приваренными фланговыми швами, на рис. 140 — тавровое соединение.

Обычно при расчетах сварных швов наплавы не учитывают, а считают, что в разрезе угловой шов имеет форму прямоугольного равно-

бедренного треугольника (рис. 141, а, б). Разрушение шва будет происходить по его минимальному сечению, высота которого

$$m = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta.$$

Расчетная площадь сечения шва длиной l составит

$$F = ml = 0,7\delta l.$$

Расчет швов, как и заклепок, условно ведется в предположении равномерного распределения напряжений по сечению шва. Некоторые значения допускаемых напряжений при расчете сварных соединений конструкций, изготовленных из Ст3, приведены в табл. 21.

Лобовой шов. Учитывая, что сопротивление стали срезу ниже, чем растяжению, составляющей нормальных напряжений в лобовом шве пренебрегают и расчет швов производят условно на срез, предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по площади

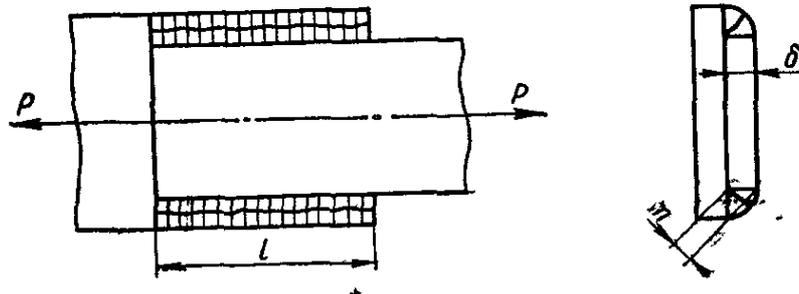


Рис. 142

сечения $ABCD$ (рис. 141). При расчете лобовых швов соединения внахлестку учитывают оба шва — верхний и нижний. Их общая площадь

$$F = 2ml = 2 \cdot 0,7\delta l = 1,4\delta l.$$

Условие прочности запишется в виде

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1,4\delta l} \leq [\tau_s].$$

Расчетная длина торцевого шва l_p определится формулой

$$l_p = \frac{P}{1,4\delta [\tau_s]}.$$

Расчетная длина шва l_p в связи с непроваром в начале и в конце шва обычно принимается на 10 мм меньше действительной l :

$$l_p = l - 10 \text{ мм.}$$

Фланговые швы. Фланговые швы наиболее распространены на практике. Они менее жестки, чем лобовые, из-за большей протяженности металла в направлении действия силы. Фланговые швы всегда ставят парами. Они работают на срез в биссекторных сечениях (рис. 142). Площадь среза двух швов

$$F = 2 \cdot 0,7\delta (l - 10 \text{ мм}) = 1,4\delta (l - 10 \text{ мм}).$$

условие прочности на срез:

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1,4\delta (l - 10 \text{ мм})} \leq [\tau_s].$$

Длина шва определяется формулой

$$l = \frac{P}{1,4\delta [\tau_s]} + 10 \text{ мм.}$$

Врубki. К числу соединений, прочность которых определяется в основном из условия среза, относятся врубки, используемые для соединения деревянных элементов конструкций (рис. 143). Древесина является анизотропным материалом, ее механические свойства зависят от направления силовых воздействий относительно ориентации волокон.

Так, для сосны предел прочности вдоль волокон равен 40 МПа, поперек волокон — 5 МПа; для дуба соответственно 50 МПа и 15 МПа.

Вследствие различной сопротивляемости древесины вдоль и поперек волокон приходится принимать разные допускаемые напряжения для различных направлений действия силы.

Некоторые данные о допускаемых напряжениях для сосны и дуба приведены в табл. 22.

В качестве примера рассмотрим расчет соединения стропильной ноги со стропильной затяжкой (рис. 143). Угол между осями стропильной ноги и затяжки обозначим α , а силу, действующую вдоль стропильной ноги, — N . Сечение стропильной ноги $F = hb$. Конец затяжки испытывает скалывание вдоль волокон под действием горизонтальной проекции силы N :

$$N_1 = N \cos \alpha.$$

Длину части затяжки x , выступающей за врубку, определим из условия

$$\tau_{\max} = \frac{N_1}{F_{\text{ск}}} = \frac{N_1}{bx} \leq [\tau],$$

откуда

$$F_{\text{ск}} = bx \geq \frac{N_1}{[\tau]},$$

а

$$x \geq \frac{N_1}{b[\tau]} = \frac{N \cos \alpha}{b[\tau]}.$$

Необходимая площадь смятия врубки

$$F_{\text{см}} = by \geq \frac{N_1}{[\sigma_{\text{см}}]}.$$

Глубина врубки

$$y \geq \frac{N_1}{b[\sigma_{\text{см}}]} = \frac{N \cos \alpha}{b[\sigma_{\text{см}}]}.$$

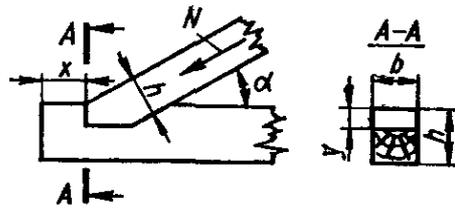


Рис. 143

Т а б л и ц а 21. Допускаемые напряжения (МПа) для сварных соединений

Вид деформации	Обозначение	Ручная сварка (электроды с тонкой обмазкой)	Автоматическая сварка и ручная сварка (электроды с толстой обмазкой)
Растяжение	$[\sigma_9^+]$	100	130
Сжатие	$[\sigma_9^-]$	110	145
Срез	$[\tau_9]$	80	110

Т а б л и ц а 22. Допускаемые напряжения (МПа) для древесины

Вид деформации	Обозначение	Сосна	Дуб
Растяжение	$[\sigma_+]$	10	13
Сжатие вдоль волокон и смятие торца	$[\sigma_-]$	12	15
Смятие во врубках вдоль иолокон	$[\sigma_{см}]$	8	11
Смятие перпендикулярно к волокнам (на длине более 10 см)	$[\sigma_{см}]_{\pi/2}$	2,4	4,8
Скалывание во врубках вдоль волокон	$[\tau]$	0,5—1	0,8—1,4
Скалывание во врубках поперек волокон	$[\tau]_{\pi/2}$	0,6	0,8
Изгиб	$[\sigma_H]$	12	15
Скалывание при изгибе	$[\tau_H]$	2	2,8

Примечание. При смятии (или скалывании) под углом α к направлению волокон допускаемое напряжение имеет промежуточное значение между $[\sigma_{см}]$, $[\sigma_{см}]_{\pi/2}$ или $[\tau]$ и $[\tau]_{\pi/2}$ и может быть определено по условной формуле

$$[\sigma]_{\alpha} = \frac{[\sigma_{см}]}{1 + \left\{ \frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma_{см}]_{\pi/2}} - 1 \right\} \sin^2 \alpha}$$

9.1. Напряжения и деформации при кручении

Кручение характеризуется наличием в стержне единственного внутреннего силового фактора — крутящего момента $M_z = M_{кр}$ (рис. 144), т. е. момента, действующего в плоскости поперечного сечения стержня (остальные компоненты внутренних сил равны нулю):

$$Q_x = Q_y = N = 0; M_x = M_y = 0.$$

Распространенным стержневым элементом конструкций машин, работающим на кручение, является вал. Экспериментально установлено, что при действии на вал двух противоположно направленных

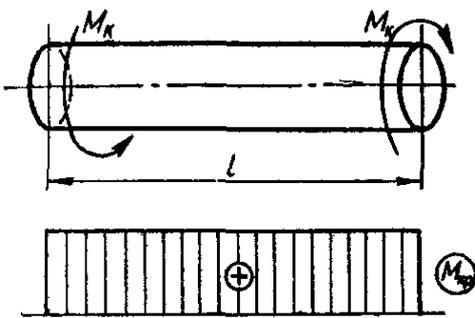


Рис. 144

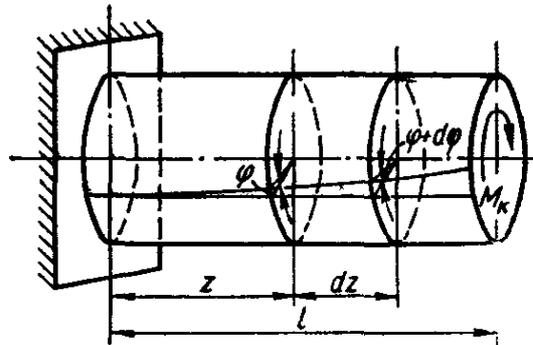


Рис. 145

крутящих моментов M_k , приложенных по его концам, вал будет закручиваться, т. е. один сечения вала будут поворачиваться относительно других, в то время как длина вала остается неизменной.

Рассматривая кручение вала, нагруженного по схеме, приведенной на рис. 145, легко заметить, что угол поворота φ сечения, находящегося на расстоянии z от места заделки вала, будет тем больше, чем больше z и крутящий момент M_k . Если закручивать вал вплоть до его разрушения и представить зависимость $\varphi = f(M_k)$ графически, то получим *диаграмму кручения*, вид которой для пластичного материала приведен на рис. 146. На этой диаграмме, как и на диаграмме растяжения, можно заметить ряд характерных участков и точек (1, 2, 3): $M_{пц}$ — величина крутящего момента, при которой сохраняется линейная зависимость между φ и M_k ; M_T — момент, соответствующий началу текучести; M_B — величина крутящего момента, вызывающего разрушение. Обычно интересуются значениями моментов и деформациями, соответствующими линейному участку диаграммы кручения, для которого справедлив закон Гука. Крутящий момент в некотором сечении вала, являющийся равнодействующим моментом касательных напря-

женный τ_ρ , действующих в элементарных площадках dF , расположенных на расстоянии ρ от центра сечения, можно выразить уравнением

$$M_{кр} = \int_F \rho \tau_\rho dF. \quad (9.1)$$

Характер распределения касательных напряжений τ_ρ по сечению устанавливается из геометрической картины деформации вала при кручении, представленной на рис. 147. Опыт показывает, что расстояния между сечениями скручиваемого вала не изменяются, а продольные линии предварительно нанесенной сетки принимают винтовую форму. При этом прямые углы сетки искажаются, как и в случае чистого сдвига. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что выделенный элементарный объем любого слоя материала вала находится в условиях чистого сдвига. Вследствие того, что радиусы, проведенные в торце сечения, остаются прямыми, иже-

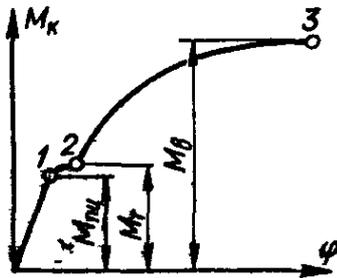


Рис. 146

лающие слои по мере приближения к центру испытывают меньшую деформацию сдвига. Согласно экспериментальным данным, сечения плоские до деформации вала, остаются плоскими и после деформации, поворачиваясь одно относительно другого на некоторый угол φ . В этом смысле гипотезы плоских сечений, на основании которой строится элементарная теория кручения стержней.

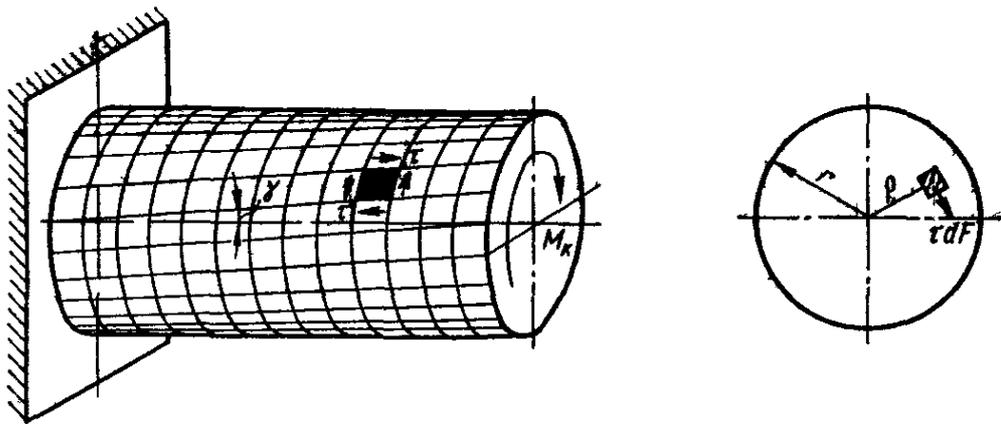


Рис. 147

Для наружного слоя выделенного элементарного участка вала длиной dz (рис. 148) будут справедливы соотношения, полученные ранее применительно к чистому сдвигу, т. е.

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{b'b}{ab'} = \frac{rd\varphi}{dz}.$$

Величина $d\varphi/dz$ — относительный угол закручивания — имеет размерность см^{-1} и обозначается обычно θ .

Связь между относительным сдвигом и относительным углом закручивания примет вид

$$\gamma = \theta r. \quad (9.2)$$

Выразив сдвиг γ в наружных волокнах вала через напряжения в соответствии с законом Гука при сдвиге найдем связь между кас-

тельными напряжениями в крайних волокнах τ_r и относительным углом закручивания θ :

$$\tau_r = G\theta r. \quad (9.3)$$

Учитывая, что радиусы сечений остаются прямыми, можно по аналогии с (9.3) установить связь между касательными напряжениями в сечении стержня на расстоянии ρ от центра и относительным углом закручивания:

$$\tau_\rho = G\theta \rho. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.4) в (9.1), находим

$$M_{кр} = G\theta \int_F \rho^2 dF = G\theta J_\rho.$$

Отсюда получаем формулу для определения относительного угла закручивания вала

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{GJ_\rho}, \quad (9.5)$$

где GJ_ρ — жесткость поперечного сечения стержня при кручении — имеет размерность $H \cdot \text{см}^2$ или $H \cdot \text{м}^2$.

Полный угол закручивания вала длиной l равен

$$\varphi = \int_0^l \frac{M'_{кр}}{GJ_\rho} dz = \theta l = \frac{M_{кр} l}{GJ_\rho}, \quad (9.6)$$

где GJ_ρ/l — жесткость вала при кручении — имеет размерность $H \cdot \text{см}$ или $H \cdot \text{м}$ (размерности момента).

Подставив значение θ из (9.5) в (9.4), определим касательное напряжение τ_ρ в любой точке сечения стержня:

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр} \rho}{J_\rho}. \quad (9.7)$$

Максимальное касательное напряжение, очевидно, будет

$$\tau_{\max} = \tau_r = \frac{M_{кр} r}{J_\rho},$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}. \quad (9.8)$$

Здесь $W_\rho = J_\rho/r$ — полярный момент сопротивления (см. (2.38)).

Для сплошного круглого вала диаметром d полярный момент сопротивления определяется формулой (2.38) и

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_{кр}}{\pi d^3}. \quad (9.9)$$

Для трубчатого круглого вала W_ρ определяется по (2.39) и

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_{кр}}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}, \quad (9.10)$$

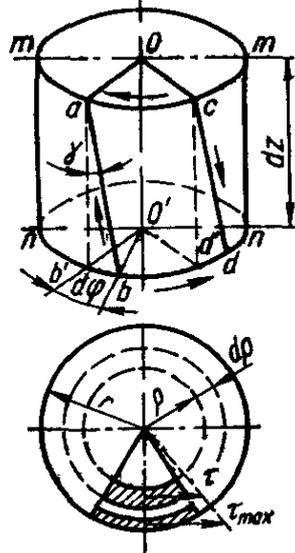


Рис. 148

где $\alpha = d/D$ — отношение внутреннего диаметра вала к наружному.
Условие прочности при кручении вала записывается в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} < [\tau] \quad (9.11)$$

Отсюда момент сопротивления вала при кручении должен быть

$$W_p \geq \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}. \quad (9.12)$$

На основании (9.9) диаметр круглого сплошного вала определим из условия

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi [\tau]}}, \quad (9.13)$$

а на основании (9.10) наружный диаметр трубчатого вала при заданном α — из условия

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi (1 - \alpha^4) [\tau]}}. \quad (9.14)$$

Если крутящий момент выразить через мощность N (л. с.) и число оборотов в минуту n , то получим

$$M_{\text{кр}} = 52,68 \frac{N}{n}, \text{ МВт} \cdot \text{с} = 702352 \frac{N}{n}, \text{ Н} \cdot \text{см}, \quad (9.15)$$

и формула (9.13) примет вид

$$d \geq 152,8 \sqrt[3]{\frac{N}{n [\tau]}}, \quad (9.16)$$

а формула (9.14) запишется так:

$$D \geq 152,8 \sqrt[3]{\frac{N}{n [\tau] (1 - \alpha^4)}}. \quad (9.17)$$

Если мощность K задана в киловаттах (1 л. с. = 0,736 кВт), то крутящий момент может быть выражен формулой

$$M_{\text{кр}} = \frac{702352 K}{0,736 n} = 940694 \frac{K}{n} \text{ Н} \cdot \text{см}. \quad (9.18)$$

Помимо расчета на прочность валы рассчитывают также и на жесткость, ограничивая относительные углы закручивания некоторой допускаемой величиной $[\theta]$ (условие жесткости при кручении):

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_p} < [\theta], \quad (9.19)$$

откуда полярный момент инерции, обеспечивающий допускаемую жесткость, определится формулой

$$J_p \geq \frac{M_{\text{кр}}}{G [\theta]}. \quad (9.20)$$

Отсюда диаметр сплошного круглого вала должен быть

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр}}{\pi G [\theta]}} \quad (9.21)$$

а наружный диаметр D трубчатого вала при заданном α

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр}}{\pi (1 - \alpha^4) G [\theta]}} \quad (9.22)$$

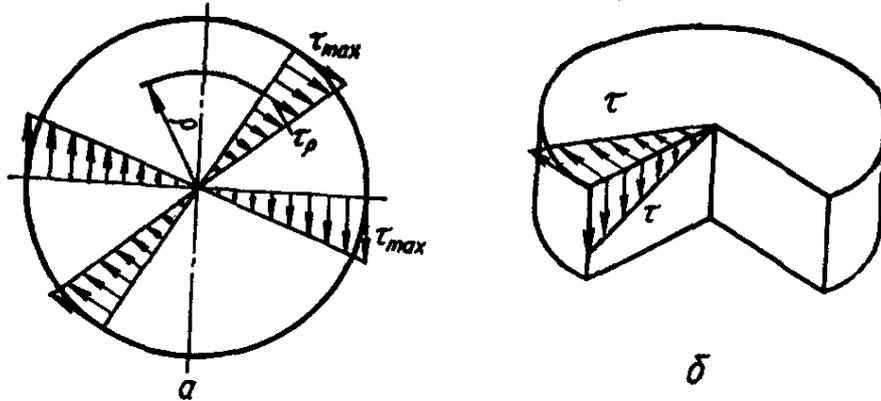


Рис. 149

Поскольку в поперечных сечениях вала действуют касательные напряжения, распределенные согласно (9.7) по линейному закону (рис. 149, а), то в силу закона парности касательных напряжений и в диаметральных сечениях вала должны возникать касательные напряжения, равные по величине, но противоположные по знаку (рис. 149, б).

По площадкам, расположенным под углом 45° к сечениям, в которых действуют максимальные касательные напряжения, действуют главные нормальные напряжения, равные по величине

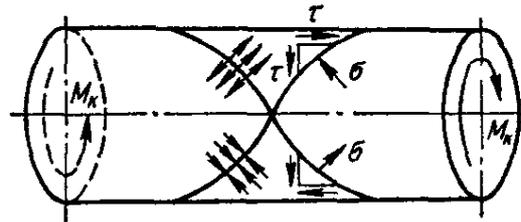


Рис. 150

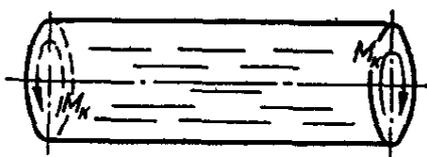


Рис. 151

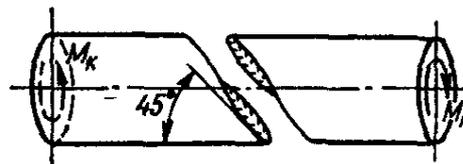


Рис. 152

касательным напряжениям в данной точке сечения, как показано на рис. 150. В связи с этим характер разрушения (сдвиг или отрыв) вала при кручении будет зависеть от способности материала сопротивляться действию касательных или нормальных напряжений. Так, при кручении деревянных валов с продольным расположением волокон последние будут разрушаться от касательных напряжений, действующих вдоль волокон (трещины продольные) (рис. 151). При кручении чугунных валов разрушение наступит под действием нормальных растягивающих напряжений, максимальное значение которых имеет место в сечениях, идущих по винтовой линии и пересекающих образующие под углом 45° , как показано на рис. 152.

9.2. Кручение стержней некруглого сечения

При кручении стержней некруглого сечения (прямоугольных, треугольных, эллиптических и др.) гипотеза плоских сечений неприменима. Точные расчеты на кручение таких стержней могут быть получены методами теории упругости. Окончательные формулы для определения максимальных касательных напряжений τ_{\max} , относительного угла закручивания θ и полного угла закручивания φ стержня длиной l имеют вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}; \quad (9.23)$$

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{к}}}; \quad (9.24)$$

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\text{к}}}. \quad (9.25)$$

В этих формулах $J_{\text{к}}$ и $W_{\text{к}}$ — некоторые геометрические характеристики, которые условно называются моментом инерции и моментом сопротивления при кручении и размерность которых соответственно см^4 и см^3 (см. табл. 1).

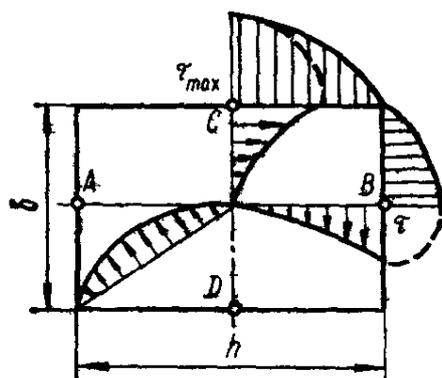


Рис. 153

Распределение касательных напряжений по прямоугольному сечению стержня приведено на рис. 153. Наибольшие напряжения возникают в наружных слоях посредине длинной стороны сечения (точки C и D). Определяются они по формуле (9.23), где

$$W_{\text{к}} = \alpha h b^2 \quad (9.26)$$

(h , b — длинная и короткая стороны прямоугольного сечения).

Напряжения посредине короткой стороны (в точках A и B) могут быть выражены через τ_{\max} :

$$\tau = \gamma^* \tau_{\max}. \quad (9.27)$$

Относительный угол закручивания определится по формуле (9.24), где выражение для момента инерции при кручении $J_{\text{к}}$ будет

$$J_{\text{к}} = \beta h b^3. \quad (9.28)$$

Коэффициенты α , β и γ^* , зависящие от отношения h/b , приведены ниже.

h/b	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263
γ^*	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753
h/b	4,0	6,0	8,0	10,0	∞	
α	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333	
β	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333	
γ^*	0,745	0,743	0,742	0,742	0,743	

Условия прочности и жесткости при расчете на кручение стержня прямоугольного сечения соответственно имеют вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2} \leq [\tau], \quad (9.29)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\beta h b^3 G} \leq [\theta]. \quad (9.30)$$

При кручении стержней, сечения которых представляют собой *равнобедренную трапецию*, приближенные значения τ_{\max} и θ могут быть получены путем определения указанных величин для стержня с сечением эквивалентного прямоугольника, который строится по схеме, приведенной на рис. 154.

При кручении стержня *сложного замкнутого сечения*, состоящего из *прямоугольных элементов* (рис. 155), момент инерции

$$J_{\text{к}} = J_{\text{к}_1} + J_{\text{к}_2} + J_{\text{к}_3} + \dots = \sum J_{\text{к}_n}, \quad (9.31)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — номера составных простых частей рассматриваемого сечения.

Так как угол закручивания для всего сечения и для каждой его части один и тот же:

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{к}}} = \frac{M_{\text{кр}_1}}{GJ_{\text{к}_1}} = \frac{M_{\text{кр}_2}}{GJ_{\text{к}_2}} = \dots = \frac{M_{\text{кр}_n}}{GJ_{\text{к}_n}},$$

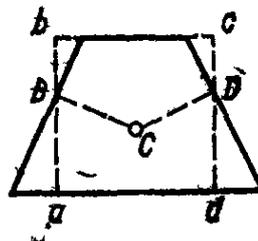


Рис. 154

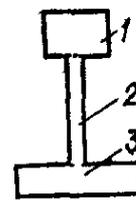


Рис. 155

то крутящие моменты, воспринимаемые каждой частью сечения, пропорциональны их жесткости:

$$M_{\text{кр}_1} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_1} G}{J_{\text{к}} G} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_1}}{J_{\text{к}}}; \quad M_{\text{кр}_2} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_2}}{J_{\text{к}}}; \quad \dots; \quad M_{\text{кр}_n} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}_n}}{J_{\text{к}}}.$$

Соответственно наибольшее касательное напряжение в каждом n -м элементе сечения будет

$$\tau_{\text{к}_n} = \frac{M_{\text{кр}_n}}{W_{\text{к}_n}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}_n}} \left(\frac{J_{\text{к}_n}}{J_{\text{к}}} \right) = \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\text{к}}} \left(\frac{J_{\text{к}_n}}{W_{\text{к}_n}} \right).$$

Очевидно,

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\text{к}}} \left(\frac{J_{\text{к}_n}}{W_{\text{к}_n}} \right)_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}, \quad (9.32)$$

где

$$W_{\text{к}} = \frac{J_{\text{к}}}{\left(\frac{J_{\text{к}_n}}{W_{\text{к}_n}} \right)_{\max}}. \quad (9.33)$$

Для стержня эллиптического сечения (рис. 156)

$$W_{\text{к}} = \frac{\pi b^3 h}{16}, \quad (9.34)$$

где b и h — малая и большая оси эллипса.

Наибольшие касательные напряжения τ_{\max} возникают в наружных точках сечения, лежащих на малых полуосях, и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}} = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi b^2 h}. \quad (9.35)$$

Напряжения в наружных точках, лежащих на больших полуосях, равны

$$\tau' = \frac{\tau_{\max}}{m},$$

где $m = h/b$.

Условный момент инерции эллипса при кручении

$$J_{\text{к}} = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2). \quad (9.36)$$

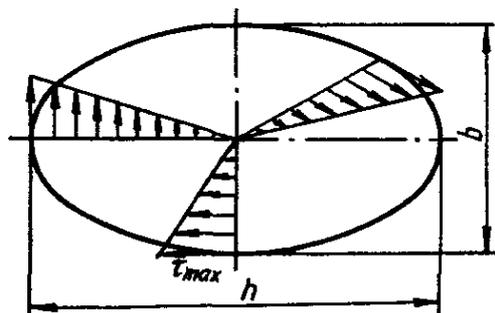


Рис. 156

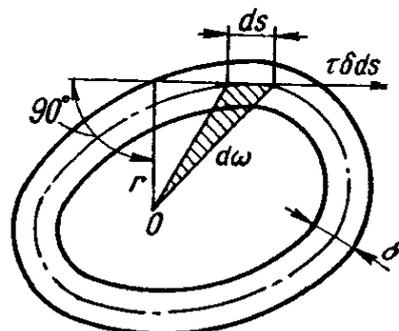


Рис. 157

В табл. 23 приведены приближенные расчетные формулы для определения максимального касательного напряжения τ_{\max} через относительный угол закручивания θ ряда профилей.

При кручении *важнутых тонкостенных профилей* (рис. 157), в которых стенка настолько тонка, что касательные напряжения по ее толщине можно считать одинаковыми, равными напряжениям по средней толщине стенки и направленными по касательной к средней линии стенки, касательные напряжения можно определять по формуле *Бредта*

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{2\omega\delta}, \quad (9.37)$$

где ω — площадь, охватываемая средней линией тонкостенного сечения; δ — толщина стенки.

Если толщина профиля по контуру неодинакова, то максимальное касательное напряжение в тонкостенном замкнутом стержне определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\omega\delta_{\min}}. \quad (9.38)$$

Относительный угол закручивания тонкостенного стержня с неодинаковой толщиной стенки определяется так:

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}, \quad (9.39)$$

где s — длина замкнутого контура.

Полный угол закручивания стержня длиной l будет

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (9.40)$$

Формула (9.39) может быть записана в виде

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_k},$$

где

$$J_k = \frac{4\omega^4}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

При постоянной толщине стенки по контуру формула (9.39) принимает вид

$$\theta = \frac{M_{кр} s}{4G\omega^2 \delta}. \quad (9.41)$$

В частности, для круглой тонкостенной трубы с радиусом средней линии R при $\delta = \text{const}$

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

Согласно (9.37) и (9.41)

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \delta};$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{2\pi R^3 \delta G}.$$

При кручении тонкостенных стержней открытого профиля (швеллера, двутавра, уголка) (рис. 158) можно воспользоваться теорией расчета на кручение стержней прямоугольного сечения. В этом случае профиль разбивают на прямоугольные элементы, толщина h которых значительно меньше их длины b . Согласно данным, приведенным на стр. 238, $h/b > 10$, $\alpha = \beta = 1/3$.

Тогда для составного профиля на основании (9.31)

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum b_n^3 h_n, \quad (9.42)$$

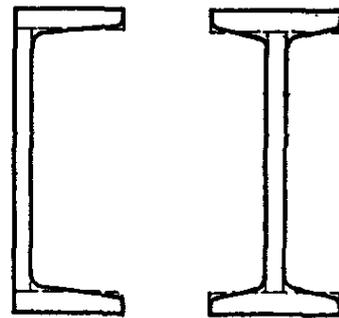


Рис. 158

где η — некоторый поправочный коэффициент, учитывающий схематизацию, связанную с заменой реального профиля прямоугольниками. Ниже приведены значения коэффициента η для типичных профилей.

Сечение	η
уголковое	1,00
двутавровое	1,20
тавровое	1,15
швеллерное	1,12

В тонкостенных открытых профилях длину контура принято обозначать через s , а толщину — через δ . Тогда формула (9.42) принимает вид

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum_n \delta_n^3 s_n. \quad (9.43)$$

Максимальные касательные напряжения в незамкнутом профиле определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \delta_{\max}}{J_k}, \quad (9.44)$$

где

$$\delta_{\max} = \left(\frac{J_{\text{кп}}}{W_{\text{кп}}} \right)_{\max}.$$

9.3. Расчет винтовых пружин

Цилиндрические винтовые пружины. Приблизженные формулы для определения напряжений, возникающих в винтовой пружине с малым шагом при ее растяжении или сжатии (рис. 159), могут быть получены из рассмотрения внутренних усилий, действующих в сечении витка (рис. 160), заменяющих влияние мысленно отброшенной нижней части растягиваемой пружины. Под действием поперечной силы $Q = P$ и крутящего момента, равного произведению растягивающего усилия на средний радиус R пружины ($M_{\text{кр}} = PR$), в сечении витка возникают две группы касательных напряжений: напряжения от среза, которые условно примем распределенными равномерно и равными

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2},$$

и напряжения от кручения, максимальное значение которых

$$\tau''_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3},$$

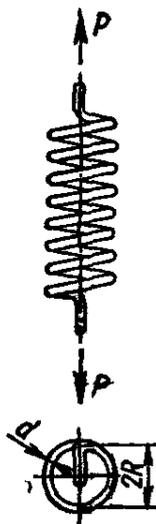


Рис. 159

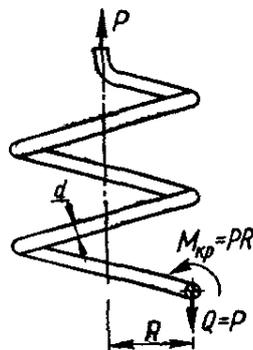


Рис. 160

где d — диаметр поперечного сечения проволоки пружины.

Характер распределения напряжений τ' и τ'' , действующих в сечении витка, показан соответственно на рис. 161, а и 161, б. Из картины распределения напряжений следует, что в наружных волокнах витка, расположенных со стороны оси пружины (точка А), напряжения τ' и τ'' совпадают по направлению. Поэтому максимальные напряжения в пружине будут

$$\tau_{\max} = \tau' + \tau''_{\max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3},$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (9.45)$$

При расчете пружины большого среднего радиуса R из тонкой проволоки, когда $\frac{d}{4R} \ll 1$, максимальное напряжение с достаточной степенью точности можно определить по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.46)$$

На практике при расчете пружины в формулу (9.46) вводят поправочный коэффициент k , учитывающий как влияние перерезывающей силы, так и некоторые другие факторы (изгиб стержня пружины, продольные деформации и т. п.). В этом случае формула (9.46) принимает вид

$$\tau_{\max} = k \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = k \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.47)$$

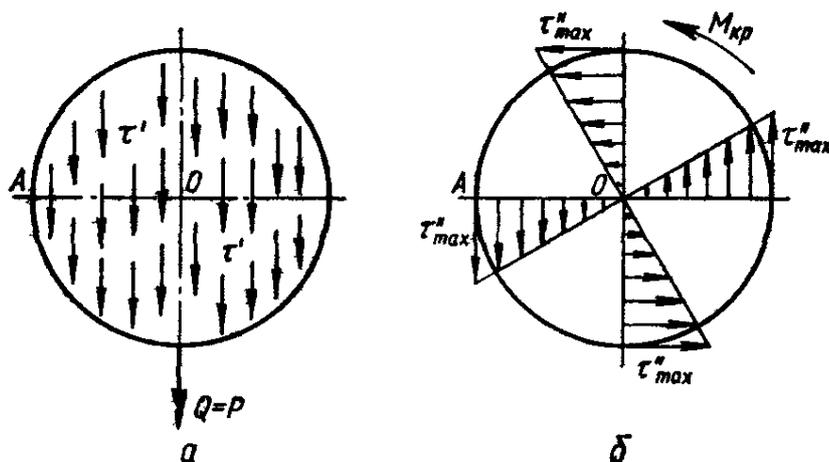


Рис 16.

Значение поправочного коэффициента k зависит от отношения радиуса пружины R к радиусу витка r и определяется по формуле

$$k = \frac{4m - 1}{4m - 4} + \frac{0,615}{m}, \quad (9.48)$$

где $m = R/r$.

Значения коэффициента k для различных отношений R/r приведены ниже:

R/r	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Удлинение (или осадка при сжатии) пружины определяется так:

$$\lambda = \frac{64 PR^3 n}{Gd^4}, \quad (9.49)$$

где n — число витков пружины.

При расчете пружин на прочность в случае статической нагрузки допускаемые напряжения на срез следует выбирать в зависимости от диаметра проволоки, из которой изготавливается пружина. Для закаленной пружинной стали $[\tau] = 500$ МПа при диаметре проволоки $d = 6$ мм, $[\tau] = 400$ МПа при $d = 10$ мм, $[\tau] = 350$ МПа при $d = 12$ мм; для хромоникелевой стали $[\tau] = 700$ МПа при $d = 12$ —

— 16 мм; для фосфористой бронзы с $G = 4,4 \cdot 10^4$ МПа $[\tau] = 130$ МПа при $d = 16$ мм.

В случае изменяющихся нагрузок указанные значения $[\tau]$ должны быть уменьшены примерно на 30 %, а при непрерывной работе пружины в условиях переменных нагрузок — на 60 %.

Часто при расчете амортизационных пружин (пружины для смягчения резких толчков) за основу берут кинетическую энергию T , которую должна поглощать пружина (рессора) при эксплуатации.

При таком (энергетическом) подходе объем пружины при заданном допуске напряжении $[\tau]$ определяется по формуле

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}.$$

Конструируя пружину по найденному объему, следует выбирать ее размеры R , a и n с таким расчетом, чтобы при проверке осадки пружины λ не было закрытия зазоров между витками.

Конические винтовые пружины
На практике приходится встречаться с коническими пружинами (в виде усеченного конуса). Если R_1 и R_2 — соответственно минимальный и максимальный радиусы концевых витков пружины, то максимальное касательное напряжение может быть определено по формуле (9.45) или (9.46) после замены радиуса R величиной большего радиуса R_2 :

$$\tau_{\max} = \frac{16 PR_2}{\pi d^3}.$$

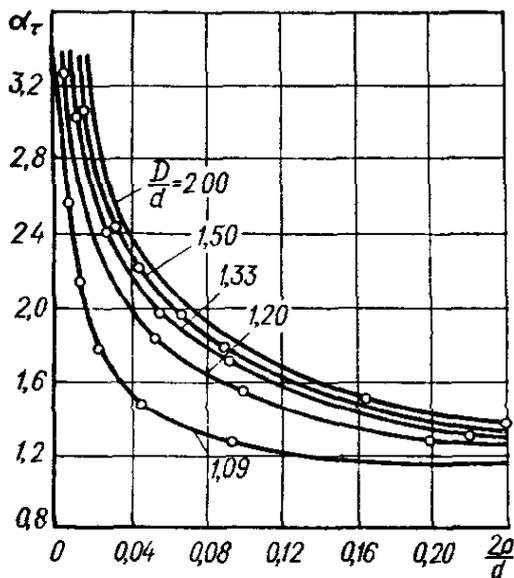


Рис. 162

Осадка конической пружины определяется по формуле

$$\lambda = \frac{16 Pn}{d^4 G} (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2).$$

9.4. Концентрация напряжений при кручении

Максимальное напряжение в зоне концентраторов (надрезов, выточек, отверстий, резьбы и т. п.) при кручении можно найти по формуле

$$\tau_{\max} = \alpha_\tau \tau_n,$$

где τ_n — номинальное напряжение, вычисляемое методами сопротивления материалов, в частности, для круглого вала радиусом r по формуле

$$\tau_n = \frac{M_{кр}}{J_\rho} r;$$

α_τ — коэффициент, показывающий, во сколько раз в месте концентратора возрастает номинальное напряжение. Коэффициент α_τ определяется методами теории упругости или экспериментально на упругих моделях и обычно называется теоретическим коэффициентом концентрации.

На рис. 162 приведены графнки зависимости $\alpha_\tau = f(2\rho/d)$ для различных отношений D/d (рис. 163).

Для случая кручения трубчатых тонкостенных валов с малыми поперечными отверстиями (рис. 164, а) коэффициент концентрации около отверстия равен четырем.

Действительно, выделив вокруг отверстия главными площадками, по краям которых будут действовать нормальные напряжения $\sigma = \tau$

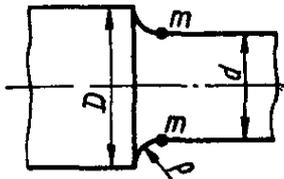


Рис. 163

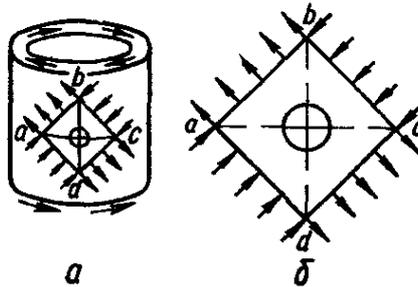


Рис. 164

(по площадкам ab и ca — растягивающие, а по площадкам aa и bc — сжимающие), и некоторый элемент (рис. 164, б) и представив картину напряжений у отверстия от растягивающих напряжений (рис. 165, а) и от сжимающих напряжений (рис. 165, б), отдельно находим в точках m (см. раздел 4.4)

$$\sigma_{\max} = 3\sigma + \sigma = 4\sigma;$$

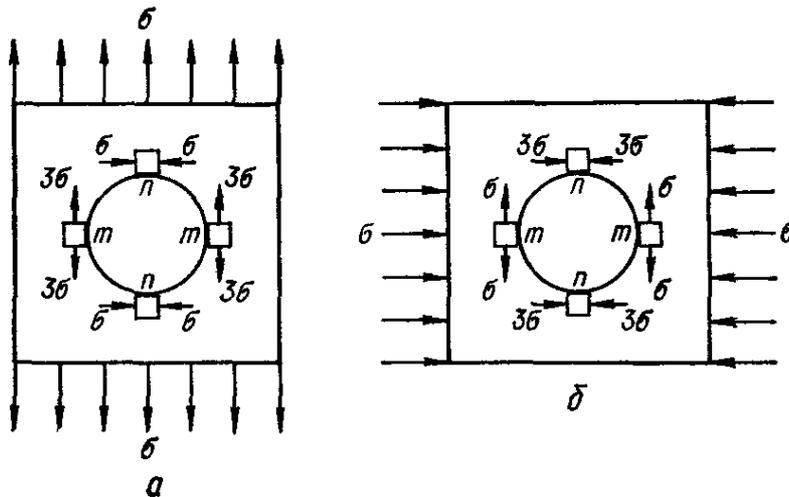


Рис. 165

в точках n

$$\sigma_{\min} = -\sigma - 3\sigma = -4\sigma.$$

Поскольку

$$\sigma_n = \sigma = \tau = \frac{M_{кр}}{W_p},$$

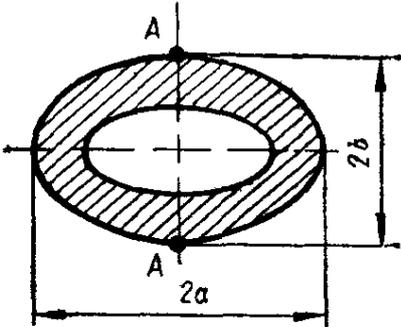
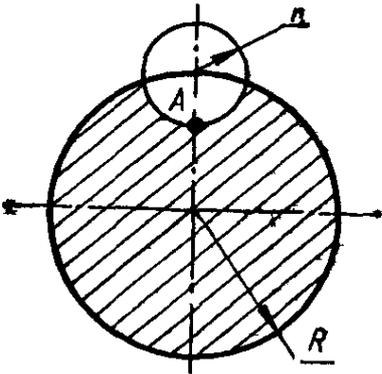
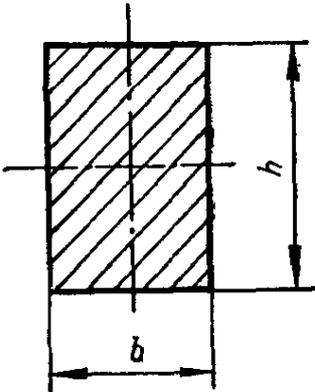
то

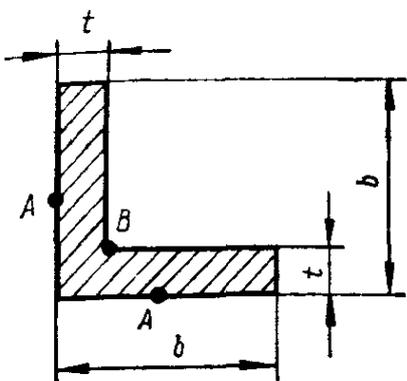
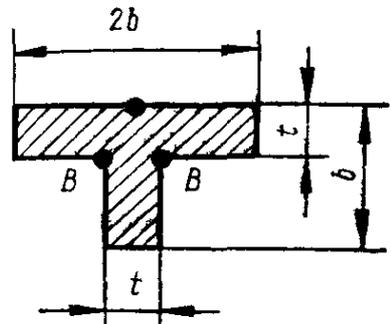
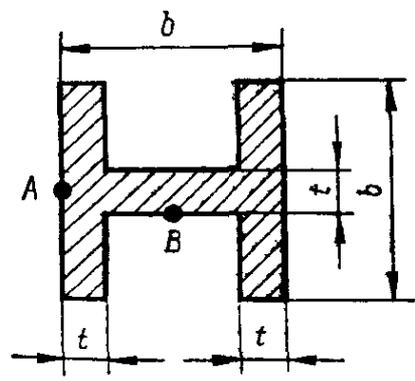
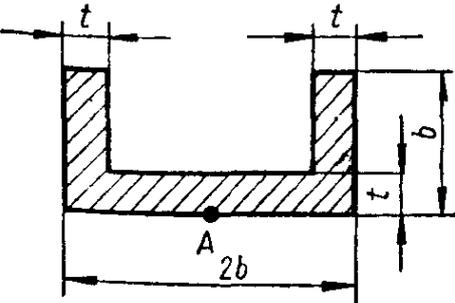
$$\sigma_{\max} = 4\sigma_n = 4 \frac{M_{кр}}{W_p}.$$

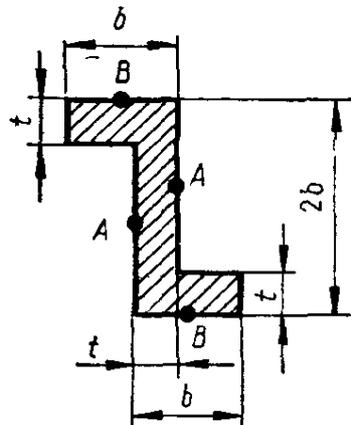
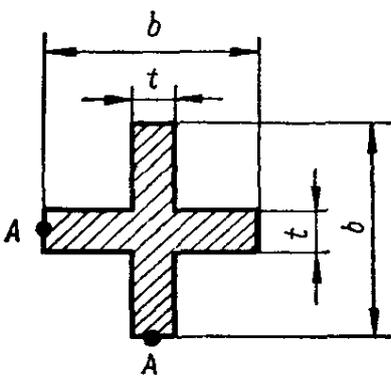
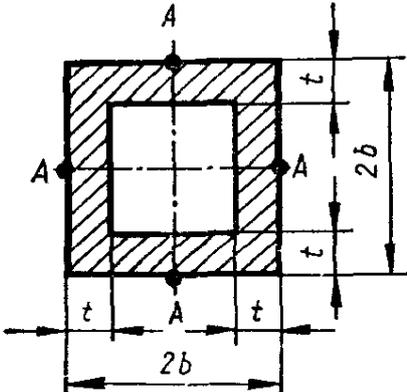
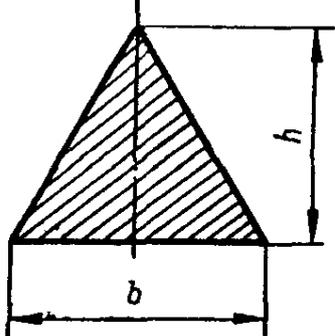
Таким образом, в рассматриваемом случае коэффициент концентрации $\alpha_\tau = 4$.

Более полные данные о коэффициентах концентрации при кручении приведены в Приложении 2.

Таблица 23. Приближенные расчетные формулы для определения максимального касательного напряжения τ_{\max} через относительный угол закручивания θ в стержнях некруглого сечения

Форма поперечного сечения стержня	τ_{\max} (в МПа) и точка, в которой оно имеет место																														
	$2G\theta \frac{a^2b}{a^2 + b^2} \text{ в точках } A$																														
	$G\theta (2R - r) \text{ в точке } A$																														
	<p>$G\theta bk$ в середине длинных сторон</p> <table border="1" data-bbox="842 1536 1445 1906"> <tbody> <tr> <td>h/b</td> <td>1,0</td> <td>1,2</td> <td>1,5</td> <td>1,8</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>0,6753</td> <td>0,7587</td> <td>0,8477</td> <td>0,9044</td> </tr> <tr> <td>h/b</td> <td>2,0</td> <td>2,5</td> <td>3,0</td> <td>4,0</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>0,9301</td> <td>0,9681</td> <td>0,9855</td> <td>0,9970</td> </tr> <tr> <td>h/b</td> <td>6,0</td> <td>10</td> <td>∞</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>0,9999</td> <td>1,0</td> <td>1,0</td> <td>1,0</td> </tr> </tbody> </table>	h/b	1,0	1,2	1,5	1,8	k	0,6753	0,7587	0,8477	0,9044	h/b	2,0	2,5	3,0	4,0	k	0,9301	0,9681	0,9855	0,9970	h/b	6,0	10	∞		k	0,9999	1,0	1,0	1,0
h/b	1,0	1,2	1,5	1,8																											
k	0,6753	0,7587	0,8477	0,9044																											
h/b	2,0	2,5	3,0	4,0																											
k	0,9301	0,9681	0,9855	0,9970																											
h/b	6,0	10	∞																												
k	0,9999	1,0	1,0	1,0																											

Форма поперечного сечения стержня	τ_{\max} (в МПа) и точка, в которой оно имеет место
	<p>$1,18G\theta t$ приблизительно в середине длинных сторон в точках А. В угловой выемке в точке В — концентрация напряжений</p>
	<p>$\sim 1,13G\theta t$ в середине длинной стороны, в точке А В угловых выемках в точках В — концентрация напряжений</p>
	<p>$\sim 0,267G\theta t$ в точках А; $\sim 0,26G\theta t$ в точках В. В угловых выемках — концентрация напряжений</p>
	<p>$\sim 1,015 G\theta t$ в точке А В угловых выемках — концентрация напряжений</p>

Форма поперечного сечения стержня	τ_{\max} (в МПа) и точка, в которой оно имеет место																								
	<p> $\sim 1,04 G\theta t$ в точках A; $\sim 1,0 G\theta t$ в точках B. В угловых выемках — концентрация напряжений </p>																								
	<p> $\sim 0,782 G\theta t$ для $b/t \geq 3$ и $\sim 0,934 G\theta t$ для $1,5 < b/t < 3$ в точках A. В угловых выемках — концентрация напряжений </p>																								
	<p> $(\gamma + 1) G\theta t$ в точках A. Во внутренних углах — концентрация напряжений </p> <table border="1" data-bbox="829 1332 1428 1568"> <tr> <td>b/t</td> <td>1,5</td> <td>2,0</td> <td>2,5</td> <td>3,0</td> <td>3,5</td> </tr> <tr> <td>γ</td> <td>1,154</td> <td>1,681</td> <td>2,194</td> <td>2,701</td> <td>3,20</td> </tr> <tr> <td>b/t</td> <td>4,0</td> <td>5,0</td> <td>10,0</td> <td>20,0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>γ</td> <td>3,709</td> <td>4,713</td> <td>9,720</td> <td>19,723</td> <td></td> </tr> </table>	b/t	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	γ	1,154	1,681	2,194	2,701	3,20	b/t	4,0	5,0	10,0	20,0		γ	3,709	4,713	9,720	19,723	
b/t	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5																				
γ	1,154	1,681	2,194	2,701	3,20																				
b/t	4,0	5,0	10,0	20,0																					
γ	3,709	4,713	9,720	19,723																					
	<p> $\frac{1}{2} G\theta t$ в серединах сторон </p>																								

10.1. Нормальные напряжения при плоском изгибе

Расчетные формулы для определения нормальных напряжений при изгибе обычно выводят из рассмотрения плоского чистого изгиба (рис. 166, а).

Чистый изгиб характерен тем, что из шести компонентов внутренних усилий только M_x не равен нулю, а

$$N = Q_x = Q_y = 0; M_y = M_z = 0.$$

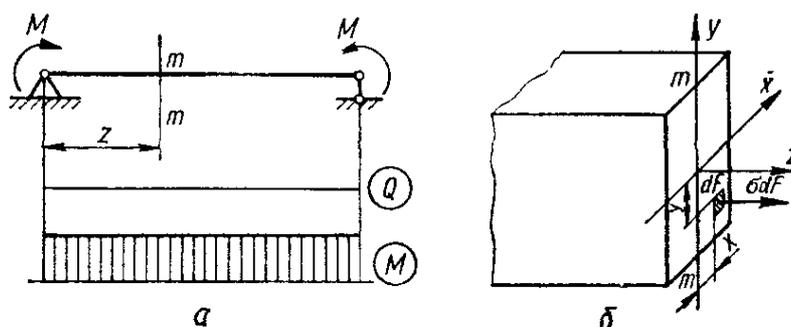


Рис. 166

Условие равновесия, связывающее напряжения и внутренние усилия в поперечном сечении балки (рис. 166, б) (опускаем индекс x у момента), имеет вид

$$\int_F \sigma y dF = M. \quad (10.1)$$

Геометрическая сторона задачи вытекает из рассмотрения картины деформации той же балки (рис. 167).

Наблюдая за деформацией сетки, предварительно нанесенной на балку (рис. 167, а), легко заметить (рис. 167, б), что продольные линии при чистом изгибе искривляются по дуге окружности, контуры поперечных сечений остаются плоскими кривыми, пересекая продольные линии под прямыми углами. Это свидетельствует о том, что при чистом изгибе поперечные сечения остаются плоскими и, поворачиваясь, становятся нормальными к изогнутой оси балки.

В сжатой области (сверху) волокна укорачиваются, а в зоне растяжения удлиняются. Зона растяжения и зона сжатия в сечении балки разделяются *нейтральным слоем* с радиусом кривизны ρ . Длина нейтрального слоя при изгибе остается неизменной.

Относительное удлинение некоторого волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 168, а), при чистом изгибе

найдем из рассмотрения деформации участка балки длиной dz (рис. 168, б):

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) d\theta - dz}{dz} = \frac{(\rho + y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \quad (10.2)$$

Подставив (10.2) в физическое уравнение (закон Гука)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (10.3)$$

выразим нормальное напряжение σ через кривизну $1/\rho$:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (10.4)$$

Далее, подставив (10.4) в (10.1) получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x} \quad (10.5)$$

(закон Гука при изгибе), а подставив (10.5) в (10.4), найдем формулу для определения нормального напряжения в любом слое сечения балки на расстоянии y от оси x :

$$\sigma = \frac{My}{J_x}. \quad (10.6)$$

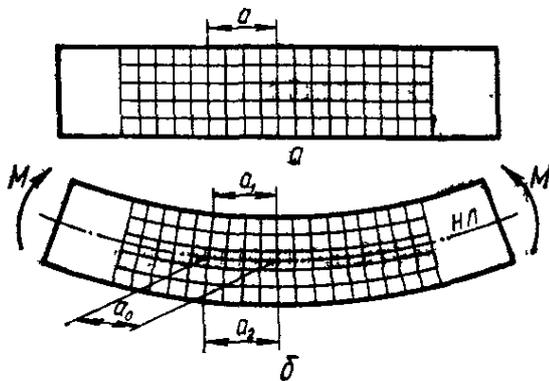


Рис. 167

ного напряжения в любом слое сечения балки на расстоянии y от оси x :

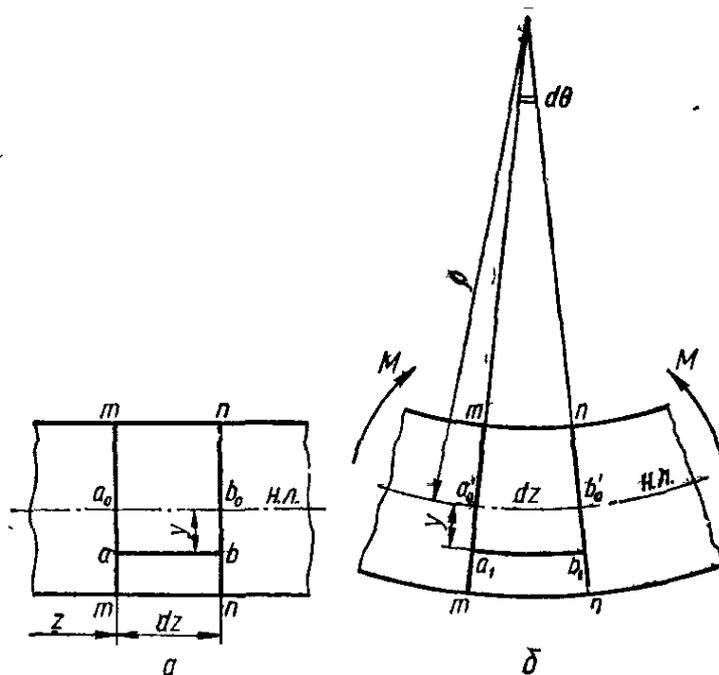


Рис. 168

Из анализа формулы (10.6), называемой формулой Навье, следует, что изменение напряжений по высоте сечения подчиняется линейному закону; напряжения максимальны в слоях с координатой y_{\max} , а минимальны (равны нулю) при $y = 0$, т. е. в нейтральном слое.

Подставляя σ из (10.6) в условие $N = \int_F \sigma dF$, находим $\int_F y dF = S_x = 0$. Отсюда следует, что нейтральная линия сечения (ось x) проходит через центр тяжести сечения.

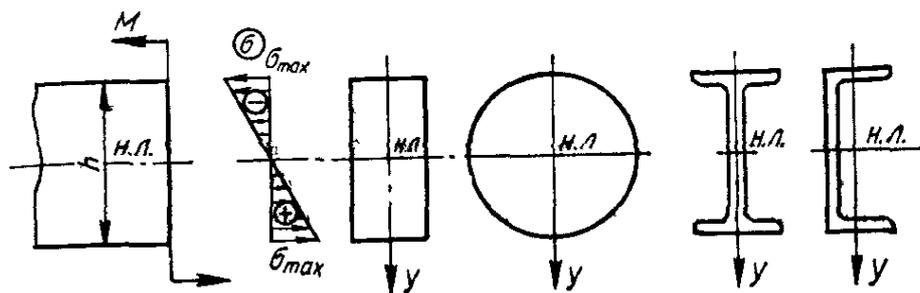


Рис. 169

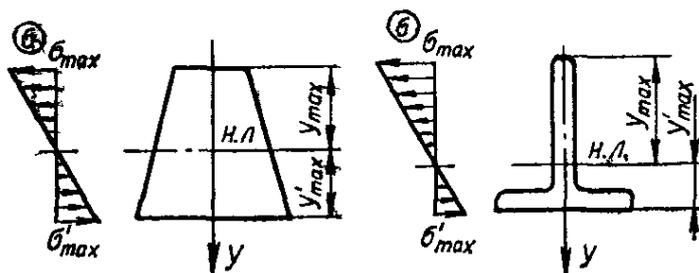


Рис. 170

В случае прямоугольного сечения балки высотой h

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{J_x} = \frac{M \frac{h}{2}}{J_x} = \frac{M}{W_x}, \quad (10.7)$$

где $W_x = J_x/y_{\max} = J_x/h/2$ и называется моментом сопротивления сечения при изгибе (см. раздел 2.8).

Очевидно, для любого сечения, имеющего горизонтальную ось симметрии (рис. 169), возможен единственный момент сопротивления при изгибе в плоскости yz , определяемый по формуле

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}.$$

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии (рис. 170), следует различать два момента сопротивления

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \quad \text{и} \quad W'_x = \frac{J_x}{y'_{\max}}.$$

Эпюра нормальных напряжений σ в последнем случае не будет симметричной, как для сечений с горизонтальной осью симметрии, а будет иметь вид, показанный на рис. 170 и 171.

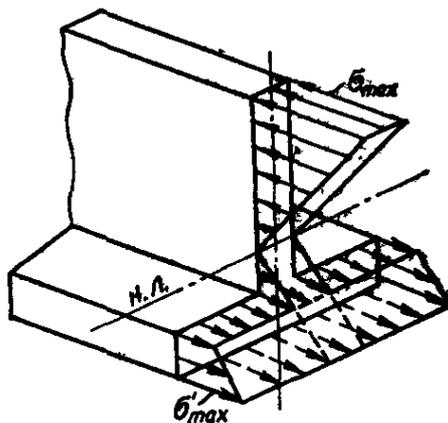


Рис. 171

Формулы для определения нормальных напряжений, полученные из рассмотрения чистого изгиба, оказываются с достаточной степенью точности пригодными для определения нормальных напряжений в общем случае изгиба, когда Q не равно нулю.

10.2. Касательные напряжения при изгибе

В общем случае поперечного изгиба (рис. 172, а), когда в сечении стержня, кроме изгибающего момента M , действует также поперечная сила Q , в сечении балки возникают не только нормальные σ , но и касательные напряжения τ , равнодействующая которых равна Q .

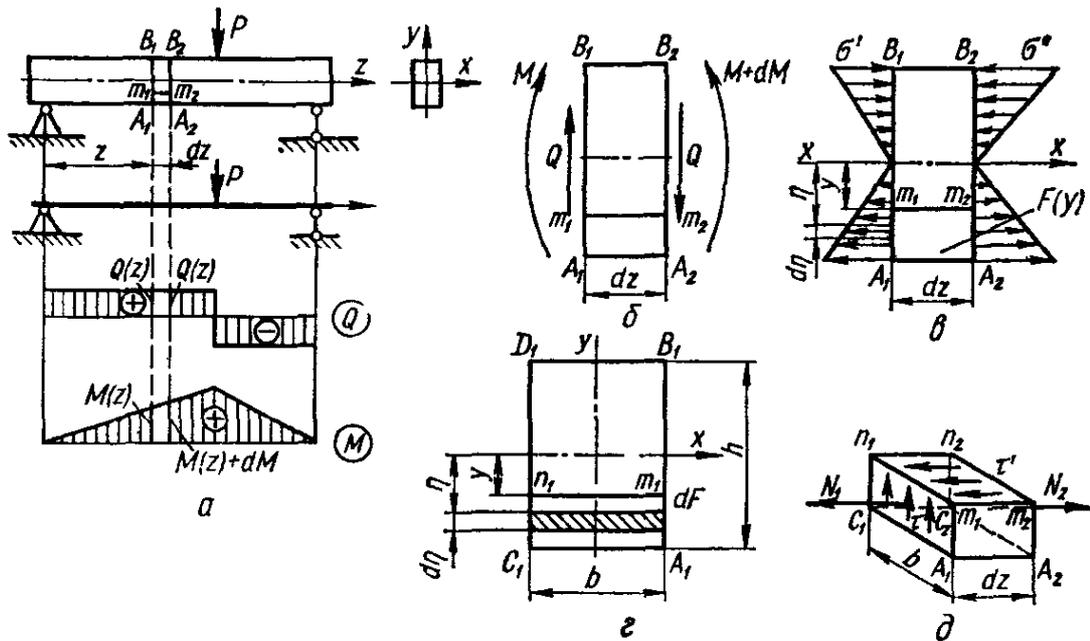


Рис. 172

Вывод формулы для определения касательных напряжений в сечении основан на методе сечений, дифференциальной зависимости между моментом и поперечной силой и законе парности касательных напряжений.

Рассматривая условия равновесия элемента $A_1m_1m_2A_2$ (рис. 172, а, б, в, д), выделенного сечениями A_1B_1 , A_2B_2 и m_1 , m_2 из балки нагруженной сосредоточенной силой P (рис. 172, а), находим

$$N_1 + T = N_2, \quad (10.8)$$

где

$$T = \tau' b dz; \quad (10.9)$$

$$N_1 = \int_F \sigma' dF = \int_F \frac{M \eta}{J_x} dF = \frac{M}{J_x} S_x(y); \quad (10.10)$$

$$N_2 = \int_F \sigma'' dF = \int_F \frac{(M + dM) \eta}{J_x} dF = \frac{M + dM}{J_x} S_x(y). \quad (10.11)$$

Подставляя (10.9) — (10.11) в (10.8) и учитывая закон парности касательных напряжений, получим формулу Журавского для опреде

ления касательных напряжений при поперечном изгибе балки произвольного сечения

$$\tau' = \tau = \frac{QS_x(y)}{b(y)J_x}, \quad (10.12)$$

где $S_x(y)$ — статический момент относительно нейтральной линии той части площади $F(y)$, которая расположена ниже или выше рассматриваемого слоя материала на расстоянии y от нейтрального слоя балки; $b(y)$ — ширина сечения в рассматриваемом слое материала. Характер изменения касательных напряжений по высоте балки в общем случае зависит от формы сечения балки.

Поскольку в рассматриваемом сечении Q и J_x постоянны (а в случае прямоугольного сечения и ширина b постоянна), то, как видно из формулы (10.12), закон изменения касательных напряжений в сечении

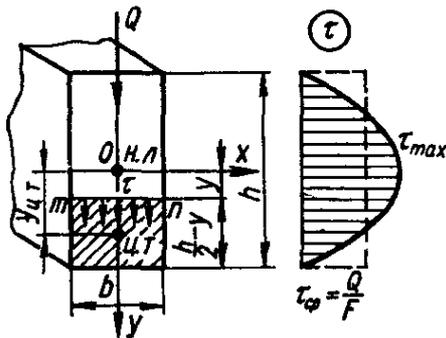


Рис. 173

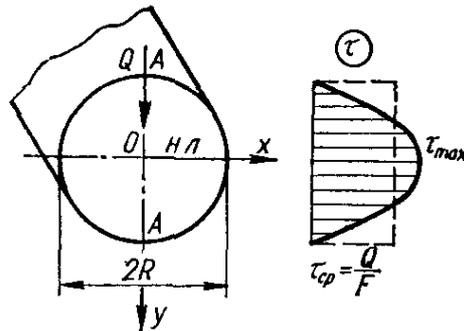


Рис. 174

будет определяться законом изменения статического момента $S_x(y)$. В частности, рассматривая статический момент площади $C_1 n_1 m_1 A_1$ (рис. 172, з), находим

$$S(y) = F(y) y_{ц.т} = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \quad (10.13)$$

т. е. статический момент по высоте сечения изменяется по параболическому закону. Очевидно, по такому же закону по высоте балки изменяются и касательные напряжения, достигая максимума при

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bJ_x} = \frac{Q \frac{bh^2}{8}}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2F}, \quad (10.14)$$

где $F = bh$ — площадь сечения балки. В наиболее удаленных от нейтральной линии точках в наружных волокнах $y = \pm h/2$ и $\tau = 0$.

Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения балки, построенная на основании формулы (10.12) с учетом (10.13), приведена на рис. 173. При этом

$$\tau = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (10.15)$$

Из формулы (10.15) видно, что максимальные касательные напряжения в стержне прямоугольного сечения, действующие в нейтральной

ном слое, отличаются от средних напряжений, которые могли бы получены по формуле $\tau_{\text{ср}} = Q/F$, в полтора раза, т. е.

$$\tau_{\text{max}} = 1,5 \tau_{\text{ср}} \quad (10.16)$$

Для круглого сечения (рис. 174) формула Журавского для вертикальной составляющей полного касательного напряжения может быть записана в виде

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \quad (10.17)$$

Закон изменения τ по высоте и в данном случае оказывается параболическим. В наиболее удаленных от нейтральной линии точках А (при $y = \pm R$) $\tau = 0$. Наибольшее касательное напряжение будет в точках нейтральной линии (при $y = 0$):

$$\tau_{\text{max}} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = 1,33 \frac{Q}{F}.$$

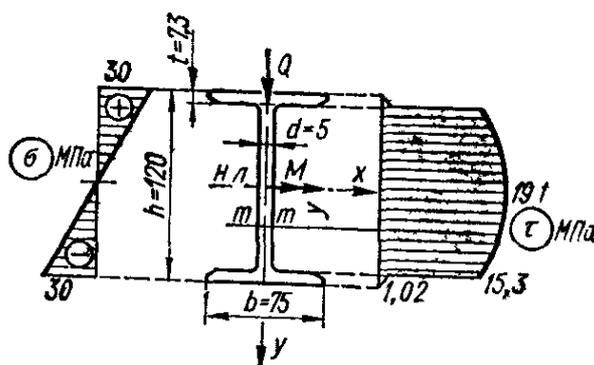


Рис. 175

Эпюра τ для круглого поперечного сечения, построенная на основании формулы (10.17), приведена на рис. 174.

Формулу для максимальных касательных напряжений применительно к поперечному сечению любой формы по аналогии с (10.17) можно в общем виде представить так:

$$\tau_{\text{max}} = k \frac{Q}{F}, \quad (10.18)$$

где k — коэффициент, зависящий от формы сечения. Например, для прямоугольника $k = 1,5$, для круга $k = 1,33$.

Эпюры нормальных и касательных напряжений, построенные соответственно на основании формул Навье и Журавского для двутавровой балки № 12 ($J_x = 403 \text{ см}^4$; $S_{\text{max}} = 38,5 \text{ см}^3$) при $M = 1961 \text{ Н}$ и $Q = 9810 \text{ Н}$, приведены на рис. 175. Наблюдаемые на эпюре τ перепады объясняются резким изменением ширины балки при переходе полки к стенке.

10.3. Расчет на прочность при изгибе

При изгибе балки в общем случае, когда $M \neq 0$; $Q \neq 0$ (рис. 176, а), из-за неравномерности распределения нормальных и касательных напряжений отдельные элементы материала находятся в условиях

различного напряженного состояния (рис. 176, б). При этом только наружные волокна (элементы 1, 2, 12, 13, 14) находятся в условиях линейного напряженного состояния (растяжения или сжатия), все остальные выделенные по высоте балки элементы (3—11) находятся в условиях плоского напряженного состояния, причем элементы (6, 7, 8) нейтрального слоя находятся в условиях чистого сдвига. Характерно, что при деформации изгиба максимальные значения нормальных и касательных напряжений оказываются в разных точках сечения. В точках, где σ максимально (наружные волокна балки), $\tau = 0$, и, наоборот, там, где τ максимально (нейтральный слой), $\sigma = 0$.

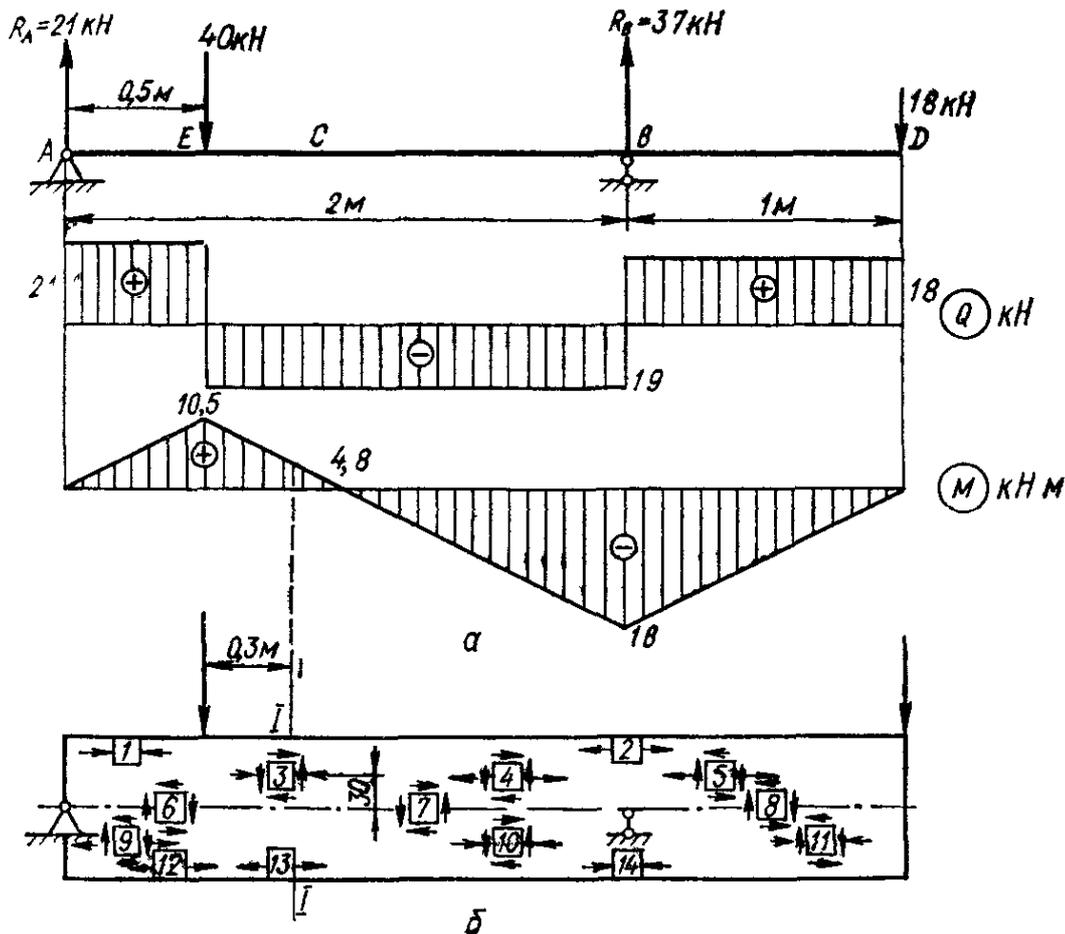


Рис. 176

Таким образом, логично рассматривать два условия прочности, относящиеся к различным точкам балки:

а) по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad (10.19)$$

б) по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} \leq [\tau]. \quad (10.20)$$

Обычно из условия прочности по нормальным напряжениям (10.19) определяют размеры балки принятой формы поперечного сечения

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (10.21)$$

а потом проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по касательным напряжениям (10.20).

Однако такой подход к расчету балок, особенно балок с оптимальной формой сечения, обеспечивающей минимальный вес и необходимую прочность (двутавровые, тавровые, швеллерные и другие профили), еще не гарантирует прочность балки. Во многих случаях в сечениях балок имеются точки, в которых одновременно действуют большие нормальные напряжения (мало отличающиеся от максимальных) и большие касательные напряжения.

В частности, такое сочетание σ и τ имеет место при изгибе двутавровой балки в зоне перехода полки в стенку (рис. 175). В таких случаях возникает необходимость проверки балки на прочность по главным напряжениям.

В общем случае плоского напряженного состояния, испытываемого элементом материала балки (например, элемент 5 на рис. 176), на который действуют $\sigma_\alpha = \sigma$, определяемое по формуле Навье, $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$, определяемые по формуле Журавского, и при $\sigma_\beta = 0$, главные напряжения находят по формулам (см. раздел 5.5):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Зная главные напряжения, можно по различным теориям прочности выразить эквивалентные напряжения, которые не должны превышать допускаемых.

Таким образом, условия прочности по различным теориям могут быть представлены в виде (см. раздел 6.1)

$$\sigma_{\text{экв I}} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]; \quad (10.23)$$

$$\sigma_{\text{экв II}} = 0,35\sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (\text{при } \mu = 0,3); \quad (10.24)$$

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.25)$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.26)$$

$$\sigma_{\text{экв M}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+n}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (10.27)$$

где

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

При проверке прочности балок по главным напряжениям часто возникает необходимость знать не только величины главных напряжений в той или иной точке, но и их направления.

В частности, это необходимо при конструировании железобетонных балок, в которых арматуру следует располагать таким образом, чтобы она сопротивлялась действию растягивающих напряжений. В любой балке можно построить линию, касательная к которой в каж-

дой точке будет характеризовать направление главных напряжений. Такая кривая называется *траекторией главных напряжений*. Траектории главных напряжений зависят от вида нагрузки и условия закрепления балки.

Очевидно, через каждую точку балки проходят две траектории главных напряжений, соответственно σ_1 и σ_2 , пересекающиеся между собой под прямым углом. В железобетонных балках обычно стремятся располагать арматуру в направлении траектории главных растягивающих напряжений (рис. 177).

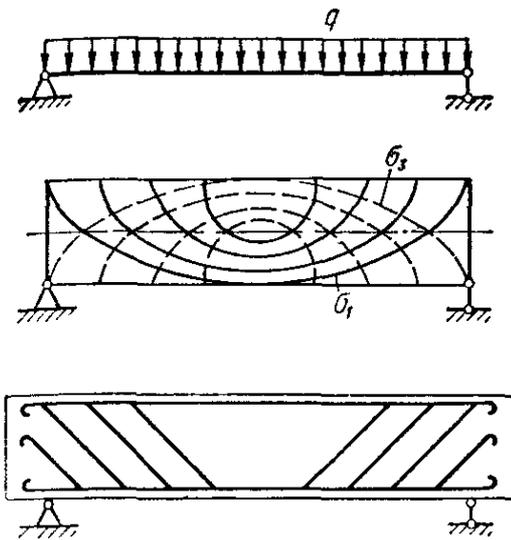


Рис. 177

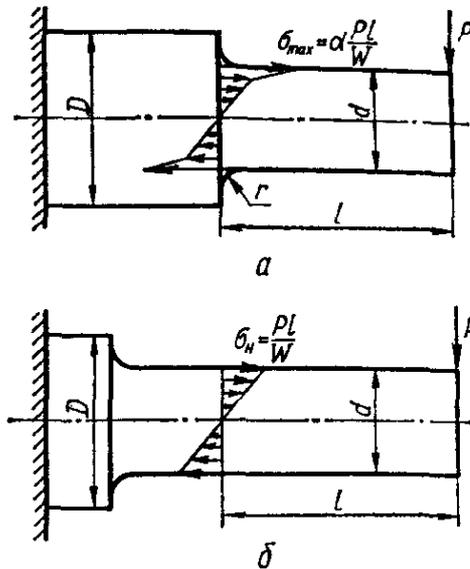


Рис. 178

10.4. Концентрация напряжений при изгибе

При изгибе, как и в случае растяжения или кручения, в местах резкого изменения размеров или формы поперечного сечения возникает концентрация напряжений. При статических нагрузках концентрация напряжений в деталях, изготовленных из пластичных материалов, не является опасной вследствие перераспределения напряжений в зоне концентрации за счет текучести материала. В случае хрупких материалов, когда не приходится рассчитывать на перераспределение напряжений и ограничение максимальных напряжений пределом текучести, концентрацию напряжений следует учитывать и при статических нагрузках. Допускаемые максимальные напряжения в зоне концентратора не должны достигать временного сопротивления материала, являющегося в данном случае предельным.

Влияние концентрации, возникающей в месте резкого изменения диаметра вала (рис. 178, а), может быть учтено введением некоторого коэффициента концентрации α :

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_n,$$

где $\sigma_n = Pl/W$, найденное для вала с диаметром, равным меньшему диаметру вала (рис. 178, б) при отсутствии концентратора.

Значения коэффициента концентрации α для различных отношений диаметров D/d и радиусов закруглений в галтели r , найденные методами теории упругости для $D/d = 3$ и $D/d = 1,5$, приведены в виде графика $\alpha = f(r/d)$ (рис. 179).

Максимальные напряжения в зоне концентратора в пластине с двусторонней выточкой гиперболической формы при чистом изгибе в плоскости пластины (рис. 180) могут быть определены по следующей формуле, полученной методами теории упругости:

$$\sigma_{\max} = \sigma_H \frac{4 \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{3 \left[\sqrt{\frac{a}{\rho}} + \left(\frac{a}{\rho} - 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]},$$

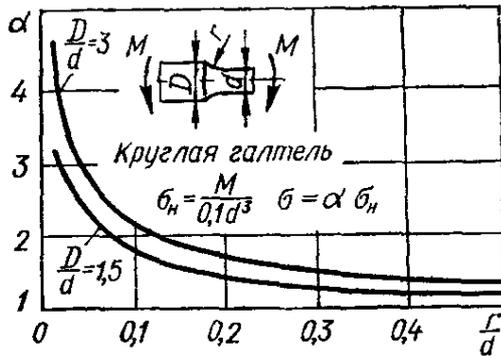


Рис. 179

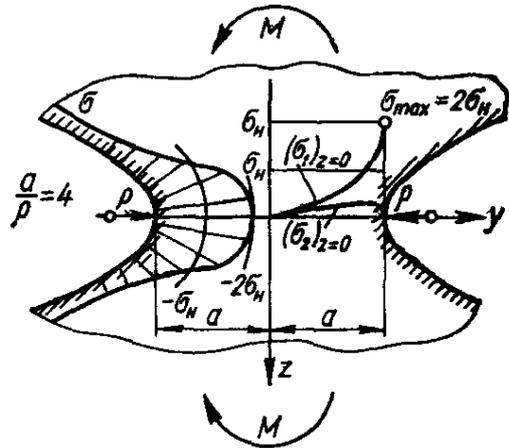


Рис. 180

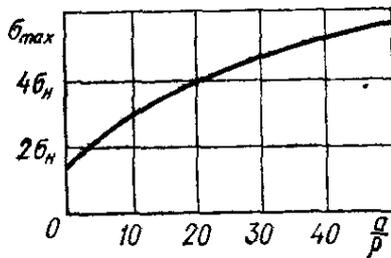


Рис. 181

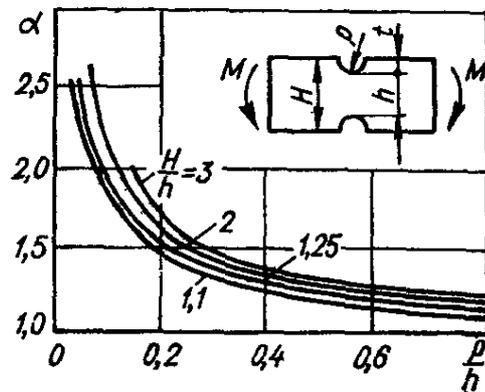


Рис. 182

где

$$\sigma_H = \frac{3M}{2a^2\delta} \quad (\delta \text{ — толщина пластины}).$$

На рис. 181 приведен график зависимости σ_{\max} от отношения a/ρ . На рис. 182 даны зависимости теоретического коэффициента концентрации α для различных отношений ширины пластины H к ее ширине h в месте выточки радиусом ρ от отношения ρ/h .

На рис. 183 даны графики распределения напряжений в зоне концентратора в виде эллиптического отверстия в широкой пластине при чистом изгибе в ее плоскости для случая, когда $t/\rho = 25$. По мере удаления от дна выточки, а также в направлении вдоль оси y напряжения быстро убывают. Штриховой линией показано распределение напряжений, вычисленных по элементарной теории изгиба путем учета ослабления сечения отверстием.

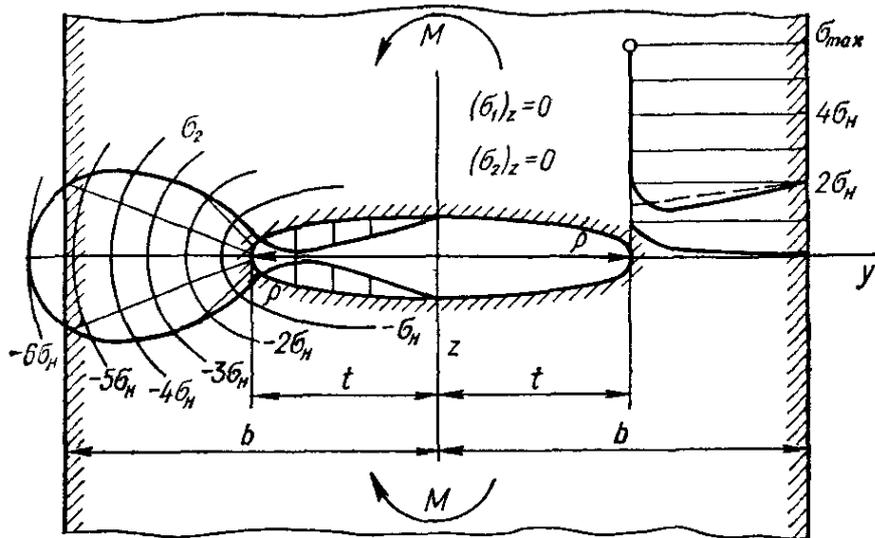
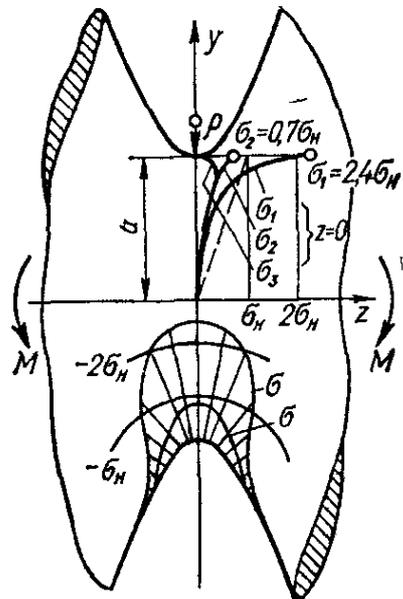


Рис. 183



Сечение $x=0$
Рис. 185

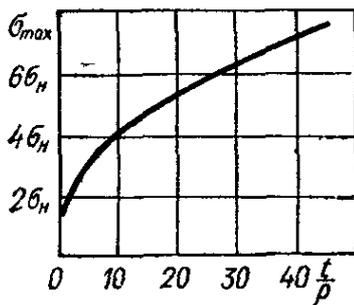


Рис. 184

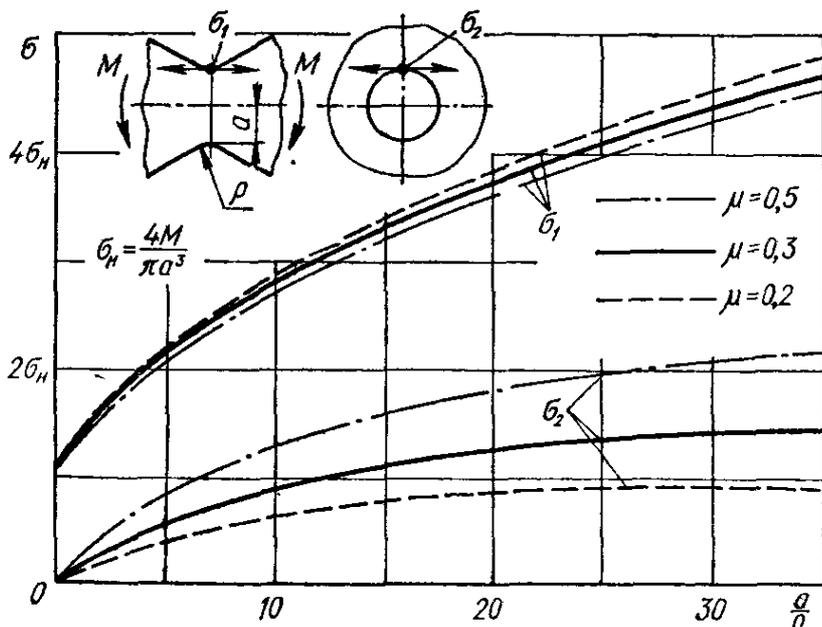


Рис. 186

Наибольшее напряжение, возникающее у дна выточки, можно определить по формуле

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \left(1 + \sqrt{\frac{r}{\rho}} \right),$$

где

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2\delta b^3} \quad (\delta - \text{толщина пластины}).$$

Зависимость σ_{\max} от отношения t/ρ графически представлена на рис. 184.

Для круглого отверстия $\sigma_{\max} = 2\sigma$. При $\rho \rightarrow \infty$ $\sigma_{\max} \rightarrow \sigma$.

В случае глубокой круговой выточки на теле вращения (рис. 185) наибольшее напряжение при изгибе возникает у дна выточки, где материал находится в условиях объемного напряженного состояния.

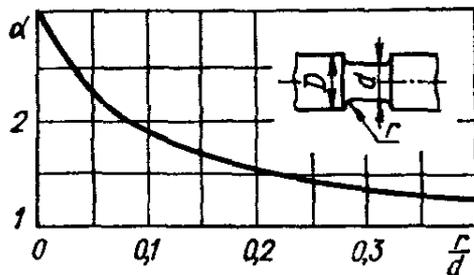


Рис. 187

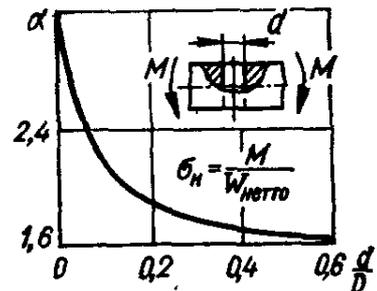


Рис. 188

На рис. 185 показано распределение всех трех главных напряжений (σ_1 , σ_2 , σ_3), а на рис. 186 дано распределение напряжений σ_1 и σ_2 у дна выточки в зависимости от отношения a/ρ при различных коэффициентах Пуассона.

В случае мелких выточек на деталях вращения величина коэффициента концентрации зависит, главным образом, от отношения

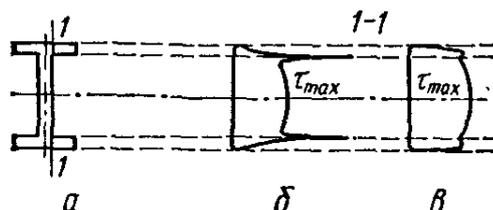


Рис. 189

радиуса закругления r к диаметру выточки. На рис. 187 приведен график зависимости $\alpha = f(r/d)$ для этого случая.

Весьма распространенными концентраторами в работающих на изгиб деталях машин являются различного рода поперечные отверстия. Концентрация в этом случае зависит от отношения диаметра поперечного

отверстия d к диаметру детали D , в которой это отверстие сделано. Зависимость коэффициента концентрации α от d/D приведена в виде графика на рис. 188.

Отметим, что при изгибе возможна не только концентрация нормальных напряжений, но и концентрация касательных напряжений в местах резких переходов, в частности в сечении 1-1 двутавровой балки (рис. 189, а, б). Однако вследствие закруглений в местах перехода стенки в полку концентрация напряжений снижается и вместе с эпюрой, показанной на рис. 189, б, получается эпюра, показанная на рис. 189, в.

10.5. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (упругой линии)

В инженерной практике приходится проводить расчет балок при изгибе не только на прочность, но и на жесткость, или деформативность.

Деформативность балки в данном сечении характеризуется прогибом w и углом поворота θ . Информацию о w и θ как функциях координатной оси, совпадающей с осью балки, можно получить, зная уравнение изогнутой оси балки (упругой линии).

Упругой линией называется плоская кривая, форму которой принимает ось балки при плоском изгибе. На рис. 190 и 191 упругие линии изображены тонкими линиями.

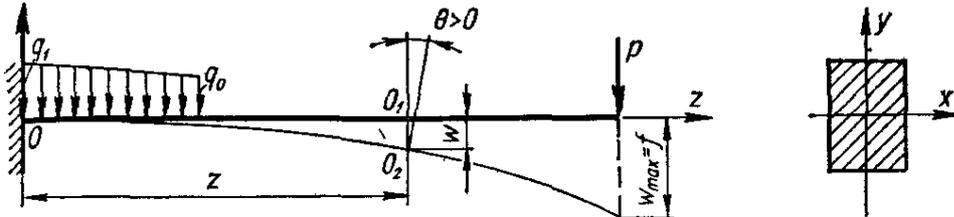


Рис. 190

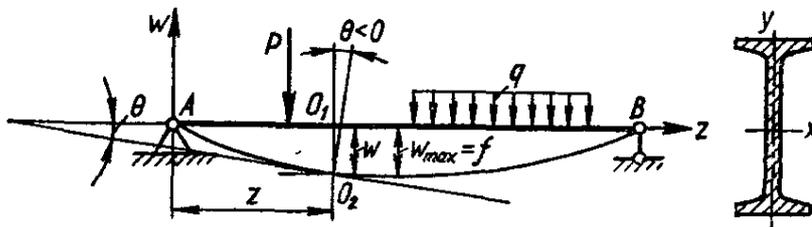


Рис. 191

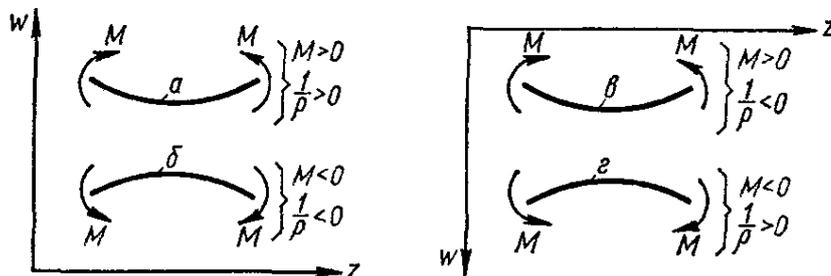


Рис. 192

Уравнение упругой линии легко получить, зная выражение кривизны через изгибающий момент $M(z)$ в данном сечении и изгибную жесткость EJ поперечного сечения балки (см. раздел 10.1)

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M(z)}{EJ}, \quad (10.28)$$

и выражение кривизны через координаты точки в данном сечении w и z , известное из курса высшей математики:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (10.29)$$

Учитывая знаки для M и $1/\rho$ в зависимости от направления действия моментов и расположения координатных осей (рис. 192), можно приравнять правые части выражений (10.28) и (10.29), приняв в (10.28)

знак «плюс» для выбранного ранее положительного направления оси w вверх. Тогда точное уравнение изогнутой оси балки получим в виде

$$\frac{d^2 w}{dz^2} \left[1 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{M(z)}{EJ}. \quad (10.30)$$

Если бы ось w была направлена вниз, то в правой части (10.30) следовало бы поставить знак «минус».

В связи с малостью деформации балки ($w_{\max} = (0,01 - 0,001) l$, $\theta_{\max} \leq 1^\circ$) в формуле (10.30) можно пренебречь членом $(dw/dz)^2 \approx 0$. Тогда дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ}. \quad (10.31)$$

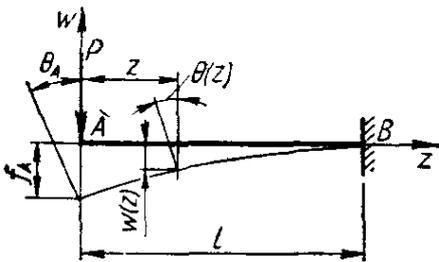


Рис. 193

Это и есть то исходное (приближенное) дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, решая которое, можно получить уравнение упругой линии $w = f_1(z)$ и уравнение угла поворота $\theta = dw/dz = f_1'(z)$.

Пронтегрировав уравнение (10.31) первый раз, найдем

$$\theta(z) = \frac{dw}{dz} = \int \frac{M(z)}{EJ} dz + C_1. \quad (10.32)$$

Пронтегрировав второй раз, получим

$$w(z) = \int dz \int \frac{M(z)}{EJ} dz + C_1 z + C_2, \quad (10.33)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые должны быть найдены из граничных условий (условий на концах балки).

Если балка заделана одним концом (рис. 193), то прогиб и угол поворота в заделке равны нулю:

$$w_B = 0; \quad \theta_B = 0.$$

Для балки на двух шарнирных опорах (рис. 191) равны нулю прогибы на этих опорах:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0.$$

Учитывая дифференциальную зависимость между изгибающим моментом $M(z)$ и распределенной нагрузкой (см. раздел 3.6)

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = q(z),$$

выражение упругой линии (10.31) можно записать в виде

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EJ(z) \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \right] = q(z). \quad (10.34)$$

В этой форме дифференциальное уравнение применяют обычно при расчете балок на упругом основании, а также при рассмотрении колебаний балок.

Для иллюстрации нахождения уравнения упругой линии $w = f(z)$ и угла поворота $\theta = f'(z)$, а также определения максимальных прогибов w_{\max} и углов θ_{\max} (представляющих наибольший практический интерес) путем интегрирования дифференциального уравнения (10.31) рассмотрим несколько примеров.

Для консоли постоянного поперечного сечения при действии сосредоточенной силы P на свободном конце (рис. 193) изгибающий момент на расстоянии z от конца будет

$$M(z) = -Pz,$$

а дифференциальное уравнение изогнутой оси консоли (10.31) примет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{Pz}{EJ}.$$

После двукратного интегрирования будем иметь

$$\frac{dw}{dz} = \theta(z) = -\frac{Pz^2}{2EJ} + C_1;$$

$$w(z) = -\frac{Pz^3}{6EJ} + C_1z + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из условий

$$w = 0 \text{ при } z = l;$$

$$\theta = 0 \text{ при } z = l.$$

Из второго условия получим

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EJ};$$

из первого условия получим

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Уравнения прогиба и угла поворота следующие:

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[z - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]; \quad (10.35)$$

$$\theta(z) = \frac{Pl^2}{2EJ} \left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2 \right]. \quad (10.36)$$

Максимальные значения w и θ имеют место на свободном конце балки в точке A :

$$w_{\max} = f_A = -\frac{Pl^3}{3EJ}; \quad (10.37)$$

$$\theta_{\max} = \theta_A = \frac{Pl^2}{2EJ}. \quad (10.38)$$

Отрицательное значение f_A свидетельствует о том, что прогиб направлен в сторону, противоположную положительному направлению оси w ; положительное значение θ показывает, что поворот сечения происходит против часовой стрелки.

В случае изгиба балки, шарнирно опертой по концам и несущей равномерно распределенную нагрузку q (рис. 194), выражение изгибающего момента будет

$$M(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2},$$

а дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (10.31) примет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} \right).$$

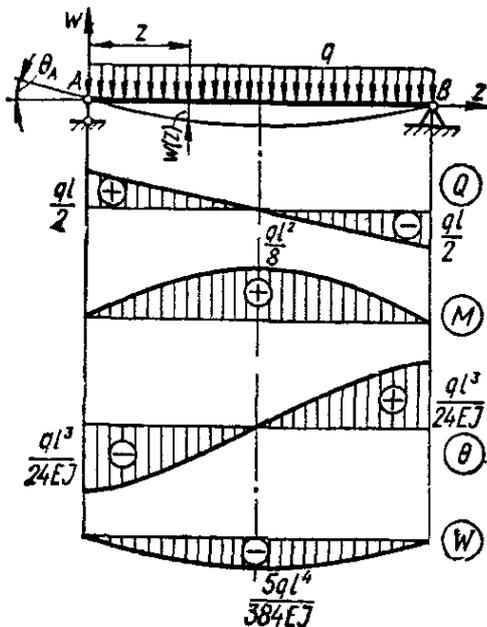


Рис. 194

Проинтегрировав дважды, получим

$$\theta(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{ql}{4EJ}z^2 - \frac{q}{6EJ}z^3 + C_1;$$

$$w(z) = \frac{ql}{12EJ}z^3 - \frac{qz^4}{24EJ} + C_1z + C_2.$$

Граничные условия следующие:

$$w = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$w = 0 \text{ при } z = l.$$

Из первого условия находим $w(0) = C_2 = 0$; из второго условия имеем

$$C_1 = -\frac{ql^3}{24EJ}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в выражения для $w(z)$ и $\theta(z)$, получим уравнение упругой линии и уравнение угла поворота:

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= -\frac{ql^3z}{24EJ} \left[1 - 2\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]; \\ \theta(z) &= -\frac{ql^3}{24EJ} \left[1 - 6\left(\frac{z}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

Максимальное значение прогиба будет посередине пролета

$$w_{\max} = f = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}. \quad (10.40)$$

Максимальные значения угла поворота будут на опорах

$$\begin{aligned} \theta(0) = \theta_A &= -\frac{ql^3}{24EJ}; \\ \theta_A &= -\theta_B. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Уравнения изогнутой оси балки, значения максимальных прогибов и углов поворота опорных сечений для различных схем нагружения простейших балок приведены в табл. 27.

При определении перемещений отдельных сечений балки в ряде случаев удобно использовать графоаналитический метод (метод Мора), основанный на аналогии между дифференциальным уравнением упру-

гой линии (10.31) и дифференциальной зависимостью (3.3), связывающей изгибающий момент и интенсивность распределенной нагрузки. Указанная аналогия позволяет вычисление прогиба w по известному $\frac{M(z)}{EJ}$ вести так же, как определение $M(z)$ по известному $q(z)$. Ордината действительной эпюры $M(z)$, деленная на EJ , рассматривается как интенсивность некоторой фиктивной нагрузки

$$q_{\phi}(z) = \frac{M(z)}{EJ}.$$

Тогда искомые прогиб $w(z)$ и угол поворота $\theta(z)$ заданной (действительной) балки определяются соответственно как изгибающий момент $M_{\phi}(z)$ и поперечная сила $Q_{\phi}(z)$ в сечении z фиктивной (взаимной) балки от фиктивной нагрузки q_{ϕ} . Для балки постоянного поперечного сечения за интенсивность фиктивной нагрузки удобнее принять величину в EJ раз большую, т. е. ординату действительной эпюры $M(z)$, а именно $\bar{q}_{\phi}(z) = M(z)$. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= \frac{M_{\phi}(z)}{EJ}; \\ \theta(z) &= \frac{\bar{Q}_{\phi}(z)}{EJ}, \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

где $\bar{M}_{\phi}(z)$ и $\bar{Q}_{\phi}(z)$ — соответственно изгибающий момент и поперечная сила в фиктивной балке от фиктивной нагрузки $\bar{q}_{\phi}(z)$, равной эпюре $M(z)$ действительной балки.

Фиктивная (взаимная) балка имеет длину участков, равную длине участков действительной балки, а опоры выбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям деформации действительной балки. Сочетания опорных закреплений действительной и фиктивной балок приведены в табл. 24.

Последовательность определения деформаций следующая. Строится эпюра изгибающего момента действительной балки; выбирается соответствующая схема фиктивной балки; фиктивная балка нагружается эпюрой изгибающего момента действительной балки; в выбранном сечении фиктивной балки определяются фиктивные изгибающий момент $\bar{M}_{\phi}(z)$ и поперечная сила $\bar{Q}_{\phi}(z)$ и по формулам (10.42) вычисляются значения прогиба и угла поворота в выбранном сечении.

При вычислении $\bar{M}_{\phi}(z)$ и $\bar{Q}_{\phi}(z)$ в случае сложной конфигурации эпюры изгибающего момента действительной балки, представляющей фиктивную нагрузку, ее разбивают на отдельные простейшие фигуры (см., например, рис. 255), площади и положения центров тяжести которых известны (см. табл. 30).

10.6. Определение перемещений в балках по методу начальных параметров

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии в случае балок с большим числом участков, каждый из которых характеризуется своим выражением изгибающего момента, сопряжено со значительными трудностями

ностями, связанными с определением произвольных постоянных интегрирования. При интегрировании дифференциальных уравнений для n участков приходится иметь дело с двойным числом постоянных интегрирования. Добавив к двум основным условиям на концах балки $2(n - 1)$ условий непрерывного и плавного сопряжения всех участков упругой линии, можно составить $2n$ уравнений для определения этих произвольных постоянных.

Задача становится весьма трудоемкой уже при трех участках. Технику определения постоянных интегрирования можно существенно упростить, сведя ее к отысканию всего двух неизвестных — прогиба

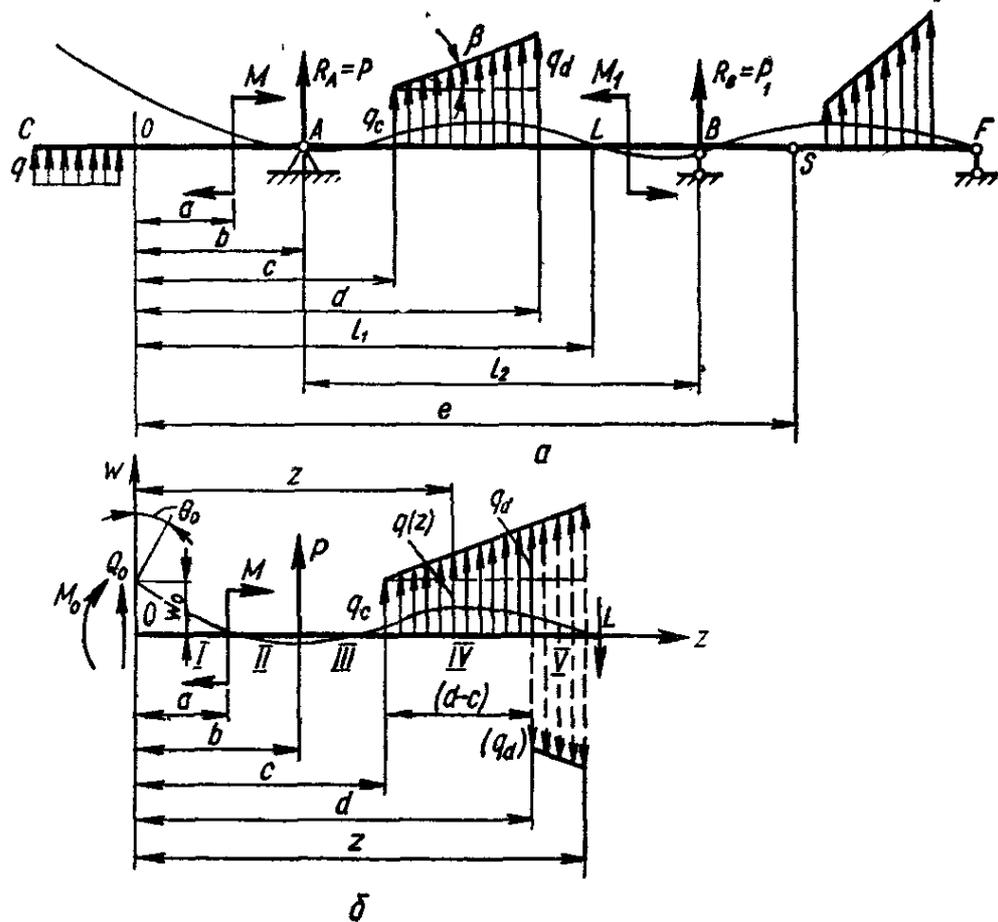


Рис. 195

и угла поворота в выбранном начале координат. Этот метод называется *методом начальных параметров*. Рассмотрим некоторую часть балки (рис. 195, а) длиной z , проведя сечения в точках 0 и L. Метод основан на следующих исходных положениях.

1. Начало координат выбирают в крайней левой точке рассматриваемой части балки и оно является общим для всех участков.

2. Выражение для изгибающего момента $M(z)$ составляется путем вычисления моментов сил, расположенных слева от рассматриваемого сечения, взятого на расстоянии z от начала координат.

3. При включении в уравнения внешнего сосредоточенного момента M , приложенного на некотором расстоянии a от начала координат, его умножают на множитель $(z - a)^0$, равный единице.

4. В случае обрыва распределенной нагрузки (например, в сечении $z = d$) ее продлевают до конца рассматриваемого участка (рис. 195, б), а для восстановления фактически действующей на балку нагрузки вводят компенсирующую нагрузку обратного направления

(экстраполированную дополнительную нагрузку и нагрузку, ее компенсирующую, принято показывать штрихами).

5. Интегрирование уравнений на всех участках производят без раскрытия скобок.

При таком подходе выражение изгибающего момента на любом участке представлено через все силовые факторы, действующие слева от рассматриваемого сечения, включая изгибающий момент M_0 и поперечную силу Q_0 , действующие в сечении, совпадающем с началом координат. Величины M_0 и Q_0 так же, как и прогиб w_0 и угол поворота θ_0 в начале координат, называются *начальными параметрами*. Изгибающий момент в сечении балки, показанной на рис. 195, б, на расстоянии z от начала координат в точке 0 (на пятом участке балки) будет

$$M(z) = M_0 + Q_0 z + M(z-a) + P(z-b) + q_c \frac{(z-c)^2}{2} + \\ + k \frac{(z-c)^3}{6} - q_d \frac{(z-d)^2}{2} - k \frac{(z-d)^3}{6},$$

где

$$k = \operatorname{tg} \beta = \frac{q_d - q_c}{d - c}.$$

После подстановки изгибающего момента в дифференциальное уравнение (10.31), двукратного его интегрирования и определения постоянных интегрирования, которыми оказываются начальные параметры

$$C_1 = \theta_0 \text{ и } C_2 = w_0,$$

уравнения $\theta(z) = f_1(z)$ и $w(z) = f(z)$ в самом общем виде могут быть записаны так:

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{z}{1!} + \sum M \frac{(z-a)}{1!} + Q_0 \frac{z^2}{2!} + \right. \\ \left. + \sum P \frac{(z-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(z-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(z-d)^3}{3!} + \right. \\ \left. + \sum k \frac{(z-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(z-d)^4}{4!} \right]; \quad (10.43)$$

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{z^2}{2!} + \sum M \frac{(z-d)^2}{2!} + \right. \\ \left. + Q_0 \frac{z^3}{3!} + \sum P \frac{(z-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(z-c)^4}{4!} - \right. \\ \left. - \sum q_d \frac{(z-d)^4}{4!} + \sum k \frac{(z-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(z-d)^5}{5!} \right]. \quad (10.44)$$

Полученное уравнение (10.44) обычно называют *универсальным уравнением упругой линии*, имея в виду, что оно может быть применено при любых расчетных схемах балок.

В уравнения (10.43) и (10.44) подставляют нагрузки, расположенные слева от рассматриваемого сечения; знаки слагаемых определяются знаком соответствующих силовых факторов. Итак, определение перемещений по методу начальных параметров в конечном счете сводится к определению начальных параметров Q_0 , M_0 , θ_0 и w_0 . При этом статические начальные параметры Q_0 и M_0 находятся из условия равновесия балки, геометрические начальные параметры θ_0 и w_0 определяются из

условий на опорах. Для определения начальных параметров Q_0 и M_0 могут быть использованы данные табл. 7, а для определения параметров θ_0 и w_0 — данные табл. 27.

Воспользуемся полученным универсальным уравнением для определения прогибов консоли (рис. 196, а, б) в точках $z = a$ и $z = 2a$. Уравнение упругой линии на участке, где приложена нагрузка q , будет иметь вид

$$\omega(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{z^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!} \right].$$

Из условия равновесия балки находим

$$M_0 = M_A = -\frac{qa^2}{2}; \quad Q_0 = R_A = qa.$$

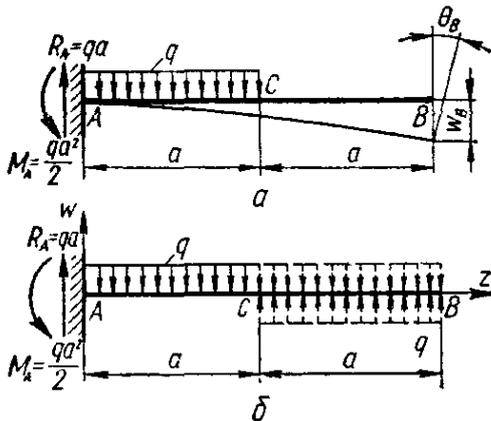


Рис. 196

Так как начало координат совпадает с заделкой, то геометрические начальные параметры — прогиб и угол поворота в начале координат — равны нулю:

$$w_0 = 0; \quad \theta_0 = 0.$$

Уравнение прогибов на первом участке будет

$$\omega(z) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{qa^2}{2} \frac{z^2}{2!} + qa \frac{z^3}{3!} - \frac{qz^4}{4!} \right].$$

При $z = a$

$$w_C = -\frac{qa^4}{8EJ}.$$

Уравнение прогиба на втором участке CB будет

$$\omega(z) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{qa^2}{2} \frac{z^2}{2!} + qa \frac{z^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} \right].$$

Положив $z = 2a$, для прогиба свободного конца получим

$$w_B = -\frac{7qa^4}{24EJ}.$$

Определив прогибы и углы поворота, можно проверить жесткость балки или подобрать ее сечения из условия жесткости

$$w_{\max} = f \leq [f].$$

Допускаемые величины прогибов $[f]$ устанавливаются из условия эксплуатации или экспериментальных данных.

В случае расчета перемещений балок с промежуточным шарниром универсальные уравнения (10.43) и (10.44) должны быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \theta(z) = & \theta_0 + \alpha(z-e)^0 + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{z}{1!} + \sum M \frac{(z-a)}{1!} + \right. \\ & + Q_0 \frac{z^2}{2!} + \sum P \frac{(z-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(z-c)^3}{3!} - \\ & \left. - \sum q_d \frac{(z-d)^3}{3!} + \sum k \frac{(z-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(z-d)^4}{4!} \right]; \end{aligned} \quad (10.45)$$

$$\begin{aligned}
w(z) = & w_0 + \theta_0 z + \alpha(z - e) + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{z^2}{2!} + \right. \\
& + \sum M \frac{(z - a)^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} + \sum P \frac{(z - b)^3}{3!} + \\
& + \sum q_c \frac{(z - c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(z - d)^4}{4!} + \sum k \frac{(z - c)^5}{5!} - \sum k \frac{(z - d)^5}{5!} \left. \right].
\end{aligned}
\tag{10.46}$$

Здесь α — угол, на который отличаются углы поворота стержней, примыкающих к промежуточному шарниру, т. е.

$$\theta(e)_{\text{л}} + \alpha = \theta(e)_{\text{пр}},$$

где $\theta(e)_{\text{пр}}$ — угол поворота правого стержня в точке S (рис. 195); $\theta(e)_{\text{л}}$ — угол поворота левого стержня в том же шарнире S . Слагаемые с сомножителем $(z - j) < 0$, где $j = a, b, c, d$, при расчете не учитываются

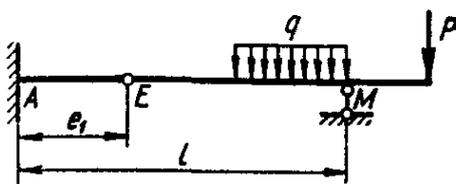


Рис. 197

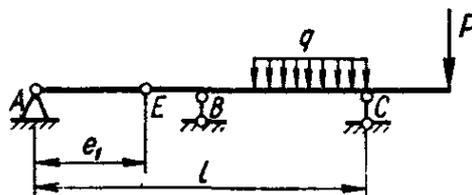


Рис. 198

Взаимный угол наклона α является дополнительной неизвестной величиной в уравнениях (10.45) и (10.46). Как и начальные параметры w_0 и θ_0 , угол α определяется из условий на опорах. В зависимости от расчетной схемы балки возможны два основных случая составления опорных условий.

1. Угол α может быть определен из условия равенства нулю прогиба на правой опоре (рис. 197).

2. Угол α определяется вместе с θ_0 из условия равенства нулю прогибов на опорах B и C (рис. 198) путем решения системы двух алгебраических уравнений.

10.7. Расчет балок переменного сечения на прочность и жесткость

Ступенчатые стержни. При расчете на прочность ступенчатого стержня, изготовленного из пластичного материала, условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} \leq [\sigma]. \tag{10.47}$$

Для стержня из хрупкого материала следует учитывать концентрацию напряжений в местах сопряжения двух сечений разного диаметра. В этом случае условие прочности следует записывать в виде

$$\sigma_{\text{max}} = \alpha \sigma_{\text{н}} = \alpha \frac{M}{W} \leq [\sigma], \tag{10.48}$$

где α — теоретический коэффициент концентрации напряжений (см.

Приложение 2). В обеих формулах W — момент сопротивления ослабленного сечения.

При определении деформации ступенчатой балки (рис. 199, а) необходимо записать дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для каждой из ступеней, изгибные жесткости поперечных сечений которых соответственно равны $EJ_1; EJ_2; EJ_3; \dots$:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_1}; \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_2}; \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_3}, \dots \quad (10.49)$$

Заменим ступенчатую балку эквивалентной балкой постоянного сечения с моментом инерции J_0 , равным моменту инерции одного из участков балки, например второго: $J_0 = J_2$. Умножив числитель и знаменатель правой части дифференциального уравнения (10.49) для произвольного участка n на J_0 , получим

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_n} \frac{J_0}{J_0} = \frac{M(z)}{EJ_0} \frac{J_0}{J_n} = \frac{M(z)}{EJ_0} \beta_n, \quad (10.50)$$

где $\beta_n = \frac{J_0}{J_n}$ — коэффициент приведения. В примере, приведенном на рис. 199, $J_1:J_2:J_3 = 1:3:2$ и $\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 1$; $\beta_3 = 3/2$.

Так как изгибающий момент является линейной функцией нагрузки, то для каждой части балки вместо умножения на коэффициент приведения изгибающего момента можно умножить на этот коэффициент все внешние нагрузки данной частью вместе с внутренними усилиями Q и M в местах сопряжения различных ступеней (рис. 199, б, в). Соединив отдельные части одну с другой и просуммировав внутренние усилия в стыке, получим балку постоянного сечения с изгибной жесткостью EJ_0 нагруженную приведенными внешними нагрузками (т. е. нагрузками, измененными в β_n раз). При этом в местах сопряжений будут наблюдаться скачки поперечных сил и изгибающих моментов, соответственно равные

$$\Delta Q_1 = Q_1 (\beta_2 - \beta_1); \quad \Delta Q_2 = Q_2 (\beta_3 - \beta_2);$$

$$\Delta M_1 = M_1 (\beta_2 - \beta_1); \quad \Delta M_2 = M_2 (\beta_3 - \beta_2).$$

В местах стыка частей балки надо приложить дополнительные сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты, определяемые приведенными формулами.

Полученная таким образом эквивалентная балка (рис. 199, г) будет иметь упругую линию, полностью совпадающую с упругой линией заданной ступенчатой балки (рис. 199, а).

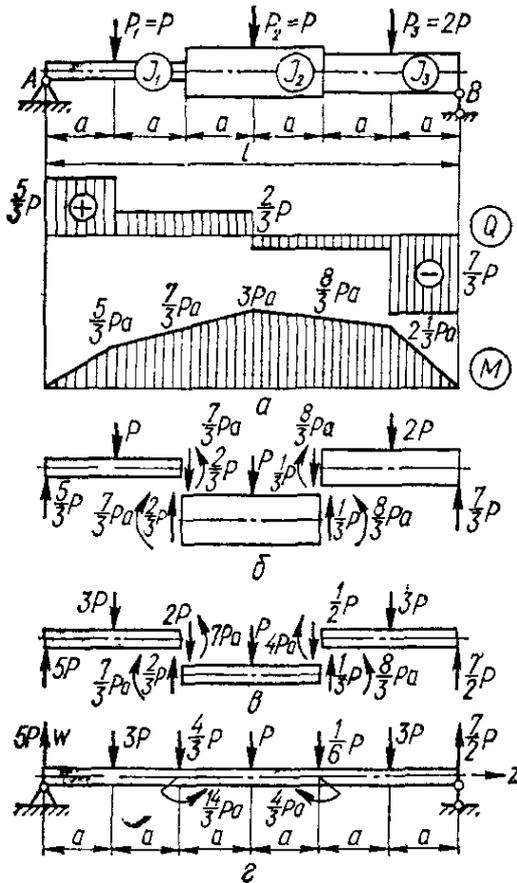


Рис. 199

Перемещения такой балки можно определить, интегрируя дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M_{\text{пр}}(z)}{EJ_0}, \quad (10.51)$$

где $M_{\text{пр}}$ — момент приведенных внешних нагрузок и дополнительных нагрузок ΔQ и ΔM , определяемый, как и в обычной балке, нагруженной по схеме рис. 199, г. Для определения w и θ можно воспользоваться также универсальными уравнениями (10.43) и (10.44) метода начальных параметров, рассматривая приведенную балку как балку постоянного сечения с изгибной жесткостью поперечного сечения EJ_0 .

Балки с непрерывно изменяющимся по длине сечением. Если размеры сечения стержня непрерывно изменяются по длине, то формулы, полученные на основании гипотезы плоских поперечных сечений, становятся неверными, как и сама гипотеза. Однако, как показывают результаты расчета методами теории упругости, в том случае, когда угол наклона образующей поверхности стержня к его оси не превышает $15-20^\circ$, распределение нормальных напряжений по высоте сечения можно принимать линейным. Тогда, естественно, можем использовать обычное условие прочности и дифференциальное уравнение упругой линии

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M(z)}{W(z)} \leq [\sigma]; \quad (10.52)$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ(z)}. \quad (10.53)$$

Погрешности при вычислении касательных напряжений по формуле Журавского

$$\tau = \frac{QS(y)}{b(z)J(z)} \quad (10.54)$$

в данном случае будут большими, чем при вычислении нормальных напряжений по формуле Навье

$$\sigma = \frac{M(z)y}{J(z)}. \quad (10.55)$$

Формулу (10.53), выражающую дифференциальное уравнение изгиба балки переменного сечения, можно записать в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M_{\text{пр}}(z)}{EJ_0}, \quad (10.56)$$

где $M_{\text{пр}}(z) = \frac{J_0}{J(z)} M(z)$ — приведенный изгибающий момент, смысл которого отличен от $M_{\text{пр}}$, входящего в формулу (10.51); J_0 — момент инерции какого-либо сечения, обычно наибольший или наименьший.

Балка, момент сопротивления которой изменяется пропорционально изгибающему моменту от внешних нагрузок, называется *балкой равного сопротивления изгибу*. Рассчитывается такая балка по формуле

$$W(z) = \frac{M(z)}{[\sigma]}. \quad (10.57)$$

В балке равного сопротивления изгибу максимальные напряжения в любом сечении одинаковы и равны допускаемому $[\sigma]$. Примером бал-

ки равного сопротивления может служить консоль с постоянной шириной b и переменной высотой $h(z)$ (рис. 200), определяемой из формулы (10.57). Тогда

$$W(z) = \frac{bh^2(z)}{6} = \frac{M(z)}{[\sigma]} = \frac{Pz}{[\sigma]},$$

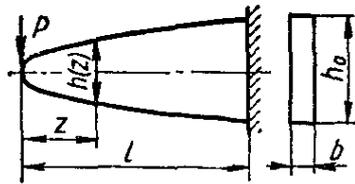
откуда

$$h(z) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \sqrt{z}. \quad (10.58)$$

Следовательно, высота балки меняется по параболическому закону, достигая максимума в месте закрепления

$$h_0 = h(l) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \sqrt{l}.$$

Поскольку согласно (10.58) в месте приложения силы ($z=0$) $h(0) = 0$, то высота конечного сечения определяется из условия среза



$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{F} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} \leq [\tau],$$

откуда

$$h \geq \frac{3P}{2b[\tau]}.$$

Рис. 200

Балки параболического очертания (весьма выгодные с точки зрения экономии материала) из-за сложности изготовления применяются весьма редко. На практике часто применяют балки равного сопротивления изгибу, имеющие постоянную высоту h и переменную ширину $b(z)$ (рис. 201).

Закон изменения ширины $b(z)$ найдем из (10.57):

$$W(z) = \frac{b(z)h^2}{6} = \frac{M(z)}{[\sigma]} = \frac{Pz}{2[\sigma]},$$

откуда получаем линейную зависимость

$$b(z) = \frac{3P}{h^2[\sigma]} z.$$

При $z = l/2$

$$b_0 = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3Pl}{2h^2[\sigma]}.$$

Максимальный прогиб такой балки равного сопротивления изгибу определяется на основании (10.56). По известным J_0 , $J(z)$ и их отношению

$$J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}; \quad J(z) = \frac{b(z) h^3}{12};$$

$$\frac{J_0}{J(z)} = \frac{b_0}{b(z)} = \frac{l}{2z}$$

можно найти приведенный момент

$$M_{\text{пр}}(z) = \frac{M(z)}{J(z)} J_0 = \frac{Pz}{2} \frac{J_0}{J(z)} = \frac{Pl}{4}.$$

Подставляя $M_{пр}$ в (10.56), получаем

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{Pl}{4EJ_0}.$$

Интегрируя это уравнение дважды, находим

$$\frac{dw}{dz} = \theta(z) = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{Pl}{4} z + C_1 \right);$$

$$w(z) = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{Plz^2}{8} + C_1z + C_2 \right).$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий

$$w(0) = 0; \quad \theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{8}; \quad C_2 = 0.$$

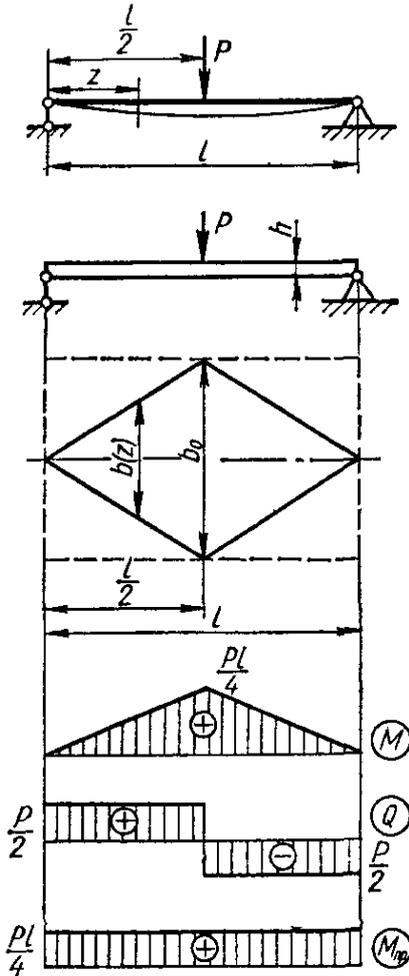


Рис. 201

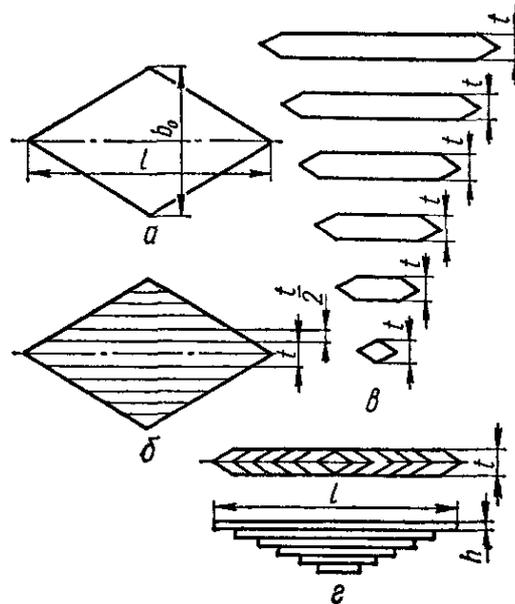


Рис. 202

Тогда

$$w(z) = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{Pl}{8} z^2 - \frac{Pl^2}{8} z \right),$$

а

$$w_{\max} = f = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

Отсюда видно, что максимальный прогиб рассматриваемой балки равного сопротивления изгибу в полтора раза больше прогиба балки постоянного сечения с изгибной жесткостью EJ_0 .

Приведенная теория с достаточной степенью приближения может быть использована при расчете рессор (рис. 202, а, б, в, г). При

этом ширину концевых сечений балки определяют из условия среза (см. рис. 203, а, б)

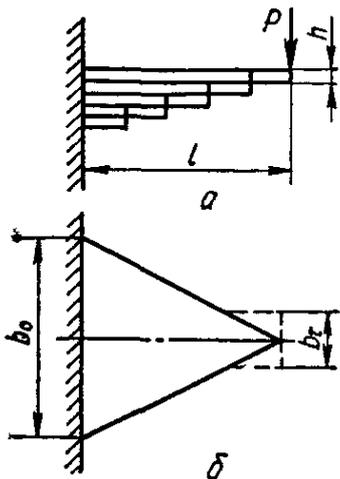


Рис. 203

$$\tau_{\max} = \frac{P}{F} = \frac{P}{b_r h} \leq [\tau],$$

откуда

$$b_r = \frac{P}{h [\tau]}.$$

Формулы для определения размеров поперечного сечения и максимального прогиба балок равного сопротивления приведены в табл. 25. В табл. 26 даны уравнения упругой линии и углов поворота поперечных сечений консольной балки переменной высоты для некоторых случаев ее нагружения.

10.8. Расчет на изгиб с учетом сил инерции

Действие сил инерции следует учитывать при расчете элементов конструкций, испытывающих большие ускорения. Примером может служить спарник AB (рис. 204), соединяющий две оси, одна из которых (O_1) является ведущей. Любой элемент длины спарника, описывающий

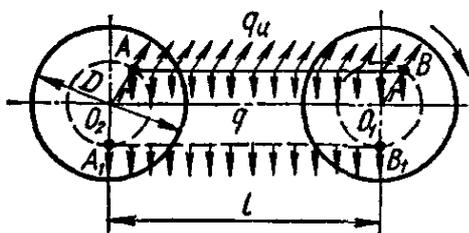


Рис. 204

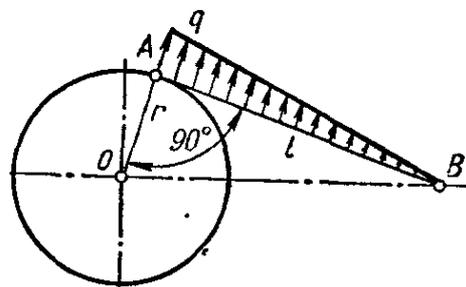


Рис. 205

окружность радиусом r с угловой скоростью ω , испытывает центростремительное ускорение $\omega^2 r$. Интенсивность возникающей по длине спарника распределенной нагрузки будет

$$q_{\text{и}} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

где F — площадь поперечного сечения спарника; γ — удельный вес материала; g — ускорение свободного падения.

Наиболее опасным положением спарника будет крайнее нижнее положение $A_1 B_1$, при котором нагрузка от сил инерции $q_{\text{и}}$ и от собственного веса q_c суммируются:

$$q_{\max} = q_{\text{и}} + q_c = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r + \gamma F = \gamma F \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

Рассматривая спарник как балку на двух шарнирных опорах, находим максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{q_{\max} l^2}{8} = \frac{qFl^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right)$$

и наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F}{W} \frac{\gamma l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

Силы инерции необходимо учитывать также при расчете шатуна поршневой машины (рис. 205). Шатун испытывает инерционную распределенную нагрузку, изменяющуюся по линейному закону, как показано на рисунке. Максимальная интенсивность инерционной нагрузки будет в точке *A*, тогда кривошип составляет с шатуном угол 90° ;

$$q_{\max} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

где *r* — радиус кривошипа.

Максимальный изгибающий момент в шатуне (при рассмотрении его как шарнирно опертой балки), как известно, будет на расстоянии $l/\sqrt{3}$ от точки *B*:

$$M_{\max} = \frac{q_{\max} l^2}{9\sqrt{3}},$$

а максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

Подставляя значение q_{\max} , находим

$$\sigma_{\max} = \frac{q_{\max} l^2}{9\sqrt{3}W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3}W}.$$

10.9. Касательные напряжения при изгибе балок тонкостенного профиля. Центр изгиба

Формула Журавского дает верные результаты в случаях, когда ширина балки (сечения *mn* на рис. 206) достаточно мала по сравнению с высотой *h*.

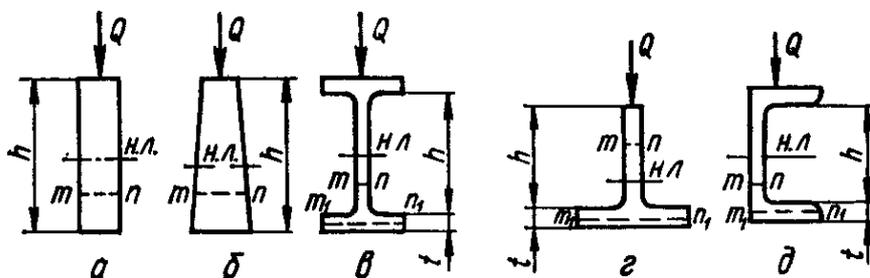


Рис. 206

В сечениях $m_1 n_1$ полки тонкостенного профиля (рис. 206, в, г, д) напряжения τ , параллельные усилию *Q*, настолько малы, что ими можно пренебречь. Но в этих полках возникают касательные напряжения τ_{\perp} , перпендикулярные усилию *Q*. Учитывая малую толщину полки *t*,

можно считать, что касательные напряжения τ_n по толщине полки распределены равномерно. Тогда их величина определится по формуле

$$\tau_n = \frac{QS(x)}{Jt}, \quad (10.59)$$

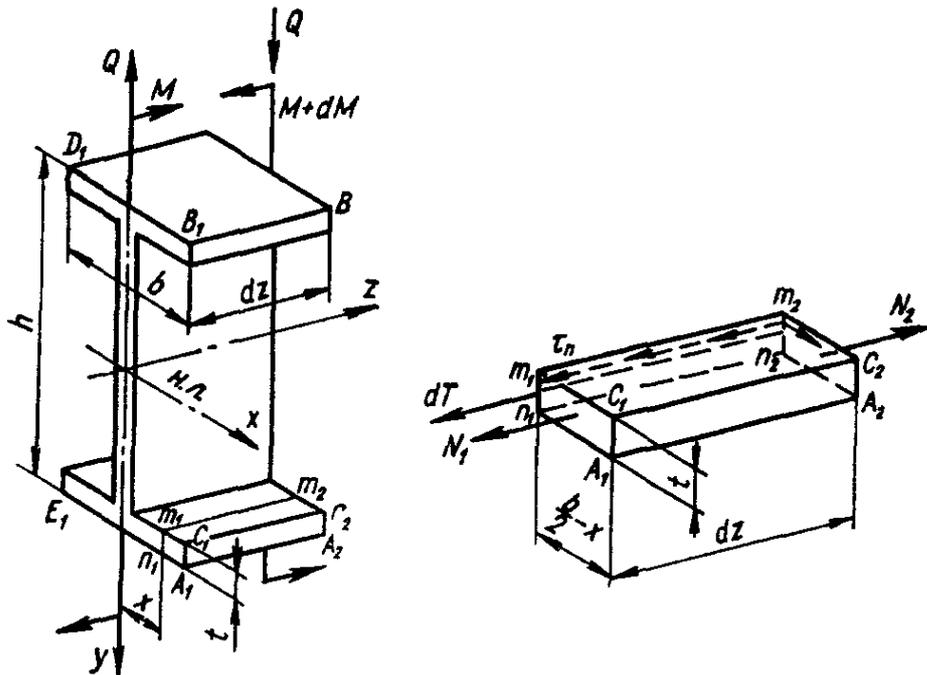


Рис. 207

найденной из рассмотрения условия равновесия части полки двутаврового сечения дляной dz (рис. 207), где статический момент

$$S(x) = \left(\frac{b}{2} - x\right) t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right). \quad (10.60)$$

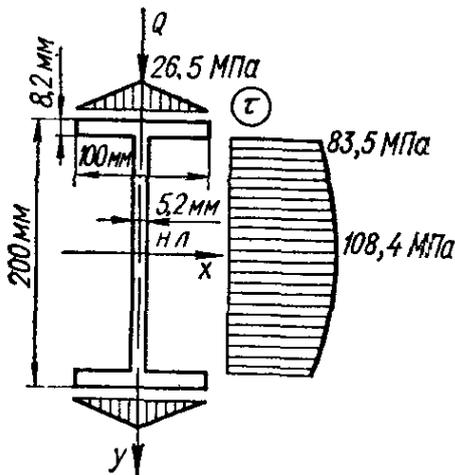


Рис. 208

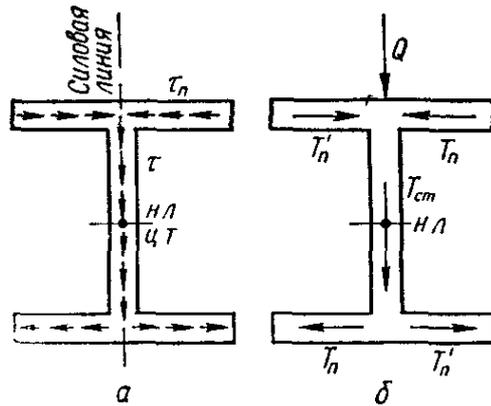


Рис. 209

Из сопоставления формул (10.59) и (10.60) видно, что закон распределения касательных напряжений по ширине полки определяется законом изменения статического момента $S(x)$, т. е. τ_n распределяются по линейному закону.

Эпюры касательных напряжений, построенные для двутаврового сечения № 20 при $Q = 98,0665$ кН, приведены на рис. 208.

Касательные напряжения в полках тонкостенных профилей существенно влияют на характер напряженного состояния стержня и вид его деформации.

Если сечение имеет две оси симметрии и силовая плоскость проходит через одну из них (рис. 209, а), то в сечении возникают равнодействующие усилия в стенке $T_{ст}$ и в полке $T_{п}$ (рис. 209, б). В силу симметрии полочек усилия $T_{п}$ взаимно уравновешиваются на каждой полке

Иначе обстоит дело, если главная центральная ось, перпендикулярная к нейтральной линии, не является осью симметрии (рис. 210, а). Касательные напряжения в стенке и полках приводятся соответственно к усилиям $T_{ст}$ и $T_{п}$ (рис. 210, б).

При этом вертикальными касательными напряжениями в полках пренебрегают. Поперечная сила

$$Q = T_{ст}$$

При этом она не проходит через центр тяжести, а, будучи равнодействующей силы $T_{ст}$ и двух сил $T_{п}$, создающих пару, смещена на некоторое расстояние x_C (рис. 210, б) и пересекает нейтральную линию в точке С. Смещение x_C можно определить из условия

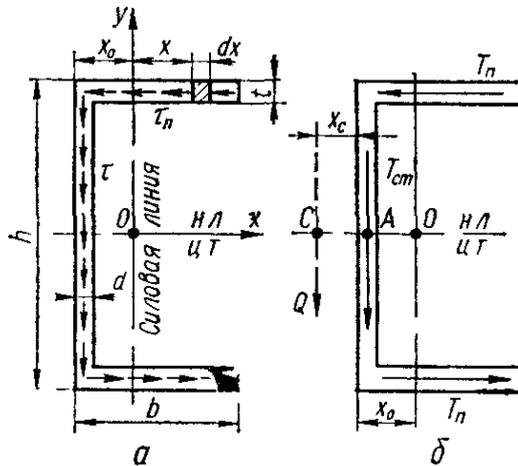


Рис. 210

$$\sum M_A = Q \left(x_C + \frac{d}{2} \right) - T_{п} (h - t) = 0,$$

откуда

$$x_C = \frac{T_{п}}{Q} (h - t) - \frac{d}{2}. \quad (10.61)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} T_{п} &= t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \tau_{п} dx = t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \frac{QS(x)}{Jt} dx = \\ &= t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \frac{Q(b-x_0-x)t \frac{h-t}{2}}{Jt} dx = \frac{Qt(h-t)(b-d)^2}{4J}. \end{aligned}$$

формулу (10.61) можем записать в окончательном виде

$$x_C = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2}.$$

Смещение равнодействующей относительно центра тяжести сеченая на расстояние $x'_C + x_0$, как это следует из схемы, приведенной на рис. 211, а, приводит к тому, что внешняя нагрузка P , действующая в плоскости zy , вызывает в сечении балки не только переменный по длине изгибающий момент $M(z) = Pz$, но также крутящий момент (рис. 211, б) $M_{кр} = P(x_0 + x_C)$ за счет смещенности поперечной силы $Q = P$ (являющейся равнодействующей усилий $T_{ст}$ и $T_{п}$). Вследствие этого балка будет не только изгибаться, но и скручиваться (рис. 211, в).

Для предотвращения скручивания на практике используют симметричные сечения из двух швеллеров или выносят точку приложения нагрузки из главной плоскости так, чтобы она проходила через точку C (рис. 211, z).

В этом случае участок балки длиной z полностью уравнивается силами P , $Q(z) = P$ и моментом $M(z) = P(z) -$ и кручения не будет. Поэтому точку C называют *центром изгиба* или *центром жест-*

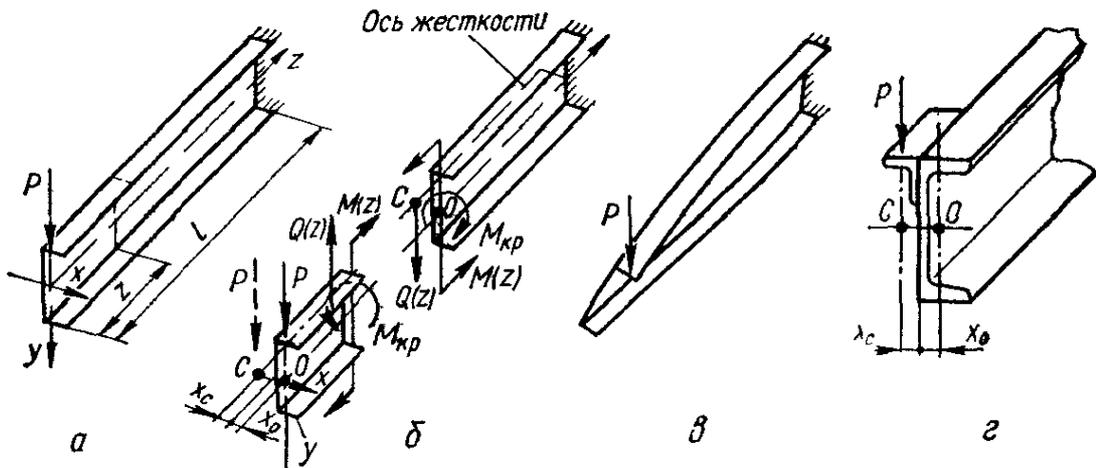


Рис. 211

кости. Центры изгиба всех сечений балки расположены на прямой, которая называется *осью жесткости* балки (рис. 211, б). Очевидно, для стержней с двойной симметрией ось жесткости балки совпадает с осью, на которой размещены центры тяжести сечений.

10.10. О расчете балок на упругом основании

При рассмотрении балки на сплошном упругом основании (рис. 212) предполагается, что реакция основания в каждой точке пропорциональна упругому прогибу w в этой точке.

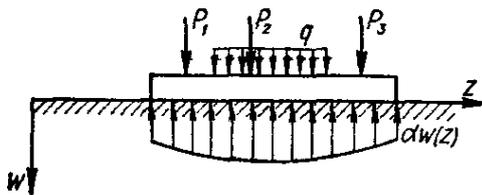


Рис. 212

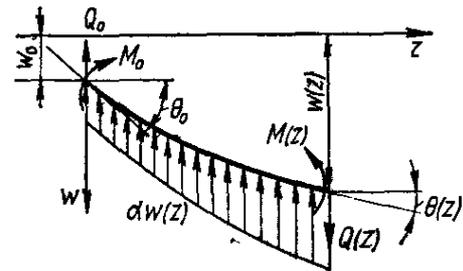


Рис. 213

Обозначая коэффициент пропорциональности, имеющий размерность $\frac{\text{сила}}{(\text{длина})^2}$, буквой α , получаем, что интенсивность реакции основания равна αw .

Таким образом, при заданной внешней распределенной нагрузке $q(z)$ полная распределенная нагрузка, действующая на балку, будет

$$p(z) = q(z) - \alpha w(z). \quad (10.62)$$

Расчет балок на упругом основании представляет собой статически неопределимую задачу. Интенсивность реакции основания связана с деформацией балки, поэтому при решении задач сначала необходимо найти упругую линию балки. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки согласно (10.34) можно, учитывая принятые на рис. 212 направления оси w и нагрузки q , записать в виде

$$\frac{d^4 w(z)}{dz^4} = \frac{1}{EJ} [q(z) - \alpha w(z)]. \quad (10.63)$$

Если распределенная нагрузка отсутствует, т. е. $q(z) = 0$ (рис. 212), то уравнение (10.63) принимает вид

$$\frac{d^4 w(z)}{dz^4} = -\frac{\alpha}{EJ} w(z). \quad (10.64)$$

Выберем начало координат на левом конце рассматриваемого участка, где начальными параметрами будут w_0 , θ_0 , M_0 и Q_0 (рис. 213). Введя обозначение

$$L = \sqrt[3]{\frac{4EJ}{\alpha}}$$

(L имеет размерность длины) и заменив независимую переменную z безразмерной абсциссой

$$\xi = \frac{z}{L},$$

уравнение (10.64) перепишем в виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$w = C_1 e^\xi \cos \xi + C_2 e^\xi \sin \xi + C_3 e^{-\xi} \cos \xi + C_4 e^{-\xi} \sin \xi. \quad (10.65)$$

Взяв соответствующие производные от (10.65), выразим через них Q , M и θ :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\xi} = \theta L = & C_1 e^\xi (\cos \xi - \sin \xi) + C_2 e^\xi (\cos \xi + \sin \xi) - \\ & - C_3 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + C_4 e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \end{aligned} \quad (10.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\xi^2} = -\frac{M(z) L^2}{EJ} = & -2 (C_1 e^\xi \sin \xi - C_2 e^\xi \cos \xi - \\ & - C_3 e^{-\xi} \sin \xi + C_4 e^{-\xi} \cos \xi); \end{aligned} \quad (10.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{d\xi^3} = -\frac{Q(z) L^3}{EJ} = & -2 [C_1 e^\xi (\cos \xi + \sin \xi) - C_2 e^\xi (\cos \xi - \sin \xi) - \\ & - C_3 e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - C_4 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)]. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Положив в (10.65) — (10.68) $\xi = 0$, получим выражения для начальных параметров:

$$\begin{aligned} w_0 &= C_1 + C_3; \\ L\theta_0 &= C_1 + C_2 - C_3 + C_4; \\ L^2 M_0 &= (-2C_2 + 2C_4) EJ; \\ L^3 Q_0 &= (2C_1 - 2C_2 - 2C_3 - 2C_4) EJ. \end{aligned}$$

Решив систему этих четырех линейных уравнений относительно постоянных интегрирования, получим выражение последних через начальные параметры в виде

$$C_1 = \frac{\omega_0}{2} + \frac{L\theta_0}{4} + \frac{L^2Q_0}{8EJ};$$

$$C_2 = \frac{L\theta_0}{4} - \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ};$$

$$C_3 = \frac{\omega_0}{2} - \frac{L\theta_0}{4} - \frac{L^3Q_0}{8EJ};$$

$$C_4 = \frac{L\theta_0}{4} + \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}.$$

Подставив выражения постоянных интегрирования в (10.65) — (10.68), найдем

$$\omega(z) = \omega_0 Y_1(\xi) + L\theta_0 Y_2(\xi) - \frac{L^2M_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{L^3Q_0}{EJ} Y_4(\xi);$$

$$\theta(z) = \theta_0 Y_1(\xi) - \frac{LM_0}{EJ} Y_2(\xi) - \frac{L^2Q_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{4\omega_0}{L} Y_4(\xi);$$

$$M(z) = M_0 Y_1(\xi) + LQ_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 \omega_0 Y_3(\xi) + \alpha L^3 \theta_0 Y_4(\xi);$$

$$Q(z) = Q_0 Y_1(\xi) + \alpha L \omega_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 \theta_0 Y_3(\xi) - \frac{4}{L} M_0 Y_4(\xi),$$

где Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 — функции А. Н. Крылова*;

$$Y_1(\xi) = \operatorname{ch} \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) \cos \xi;$$

$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) =$$

$$= \frac{1}{4} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi + (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi];$$

$$Y_3(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (e^\xi - e^{-\xi}) \sin \xi \right];$$

$$Y_4(\xi) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) =$$

$$= \frac{1}{8} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi - (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi].$$

При дифференцировании функций Крылова справедливы следующие важные зависимости:

$$LY'_1 = -4Y_4; \quad LY'_2 = Y_1; \quad LY'_3 = Y_2; \quad LY'_4 = Y_3.$$

В общем случае (рис. 214), когда на отрезке Oz действует сосредоточенный момент M_i в точке с абсциссой a_i , сосредоточенная сила P_i в точке с абсциссой b_i и равномерно распределенная нагрузка q

* Значения этих функций приведены в Приложении 4.

на участке от $z=c$ до $z=d$, общие уравнения для w , θ , Q и M имеют вид

$$\begin{aligned} w(z) = & \omega_0 Y_1\left(\frac{z}{L}\right) + \theta_0 L Y_2\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L^3 Y_3\left(\frac{z}{L}\right) + \right. \\ & + Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{z}{L}\right) + L^3 \sum M_i Y_3\left(\frac{z-a_i}{L}\right) - L^3 \sum P_i Y_4\left(\frac{z-b_i}{L}\right) + \\ & \left. + \frac{L^4}{4} \sum q_i \left[Y_1\left(\frac{z-c_i}{L}\right) - Y_1\left(\frac{z-d_i}{L}\right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (10.69)$$

$$\begin{aligned} \theta(z) = & \theta_0 Y_1\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L Y_2\left(\frac{z}{L}\right) + Q_0 L^2 Y_3\left(\frac{z}{L}\right) + \right. \\ & + \frac{4EJ}{L} \omega_0 Y_4\left(\frac{z}{L}\right) + L \sum M_i Y_2\left(\frac{z-a_i}{L}\right) - L^2 \sum P_i Y_3\left(\frac{z-b_i}{L}\right) - \\ & \left. - L^3 \sum q_i \left[Y_4\left(\frac{z-c_i}{L}\right) - Y_4\left(\frac{z-d_i}{L}\right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (10.70)$$

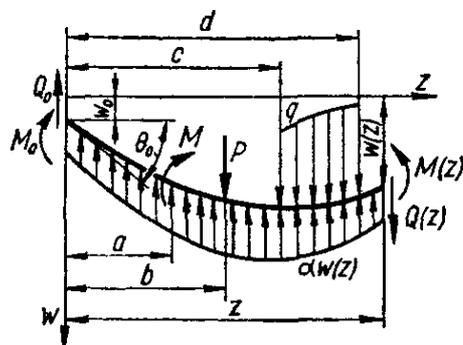


Рис. 214

$$\begin{aligned} M(z) = & M_0 Y_1\left(\frac{z}{L}\right) + Q_0 L Y_2\left(\frac{z}{L}\right) + \alpha L^2 \omega_0 Y_3\left(\frac{z}{L}\right) + \alpha L^3 \theta_0 Y_4\left(\frac{z}{L}\right) + \\ & + \sum M_i Y_1\left(\frac{z-a_i}{L}\right) - L \sum P_i Y_2\left(\frac{z-b_i}{L}\right) + \\ & + L^2 \sum q_i \left[Y_3\left(\frac{z-c_i}{L}\right) - Y_3\left(\frac{z-d_i}{L}\right) \right]; \end{aligned} \quad (10.71)$$

$$\begin{aligned} Q(z) = & Q_0 Y_1\left(\frac{z}{L}\right) + \alpha L \omega_0 Y_2\left(\frac{z}{L}\right) + \alpha L^2 \theta_0 Y_3\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{4M_0}{L} Y_4\left(\frac{z}{L}\right) - \\ & - \frac{4}{L} \sum M_i Y_4\left(\frac{z-a_i}{L}\right) - \sum P_i Y_1\left(\frac{z-b_i}{L}\right) + \\ & + L \sum q_i \left[Y_2\left(\frac{z-c_i}{L}\right) - Y_2\left(\frac{z-d_i}{L}\right) \right]. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Таким образом, при известных начальных параметрах ω_0 , θ_0 , M_0 и Q_0 величины $w(z)$, $\theta(z)$, $M(z)$ и $Q(z)$ могут быть определены в любом сечении с координатой z по формулам (10.69) — (10.72).

Начальные параметры в каждом конкретном случае могут быть определены из условий на концах балки. Эти условия для различных случаев закрепления балки при совмещении начала координат с левым ее концом представлены ниже.

Условия на концах балки		Левый конец ($z = 0$)				Правый конец $z = l$			
Левый конец	Правый конец	w	θ	M	Q	w	θ	M	Q
Свободен	Свободен	—	—	M_0	Q_0	—	—	M_l	Q_l
Свободен	Оперт	—	—	M_0	Q_0	0	—	M_l	—
Свободен	Заделан	—	—	M_0	Q_0	0	0	—	—
Оперт	Оперт	0	—	M_0	—	0	—	M_l	—
Оперт	Заделан	0	—	M_0	—	0	0	—	—
Заделан	Заделан	0	0	—	—	0	0	—	—

M_l и Q_l — соответственно внешние сосредоточенные момент и сила на правой опоре.

При выборе начала координат на левом конце однопролетной балки два начальных параметра всегда известны. Для определения двух других параметров необходимо решить систему двух алгебраических уравнений, составленную из условий закрепления правого конца балки.

10.11. Изгиб балок, материал которых не следует закону Гука

Диаграммы растяжения и сжатия, записанные для материалов, не следующих закону Гука (чугун, камень и др.), показывают, что напряжения растут медленнее деформаций и отставание роста напряжений от деформаций значительнее при растяжении, чем при сжатии (рис. 215). В этом случае нейтральная линия не проходит через центр тяжести

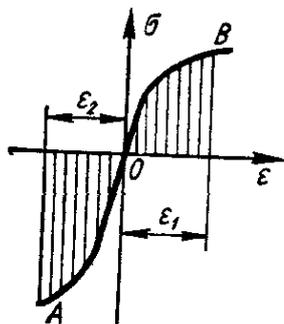


Рис. 215

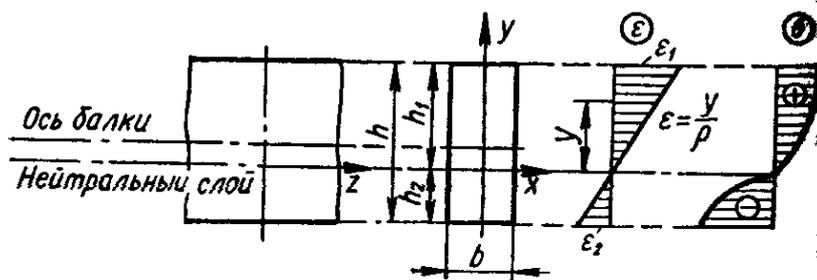


Рис. 216

сти поперечного сечения, а смещается в сторону центра кривизны оси балки (рис. 216). По известному радиусу кривизны нейтрального слоя ρ на основании гипотезы плоских сечений относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, как и прежде, определяется известной формулой

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (10.7)$$

Поэтому прежде всего следует найти положение и радиус кривизны нейтрального слоя.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения из материала, не следующего закону Гука (рис. 217). Учитывая, что для многих материалов зависимости $\epsilon = f(\sigma)$ при растяжении и сжатии могут быть представлены в виде

$$\epsilon_p = k_p \sigma_p^n; \quad \epsilon_{сж} = k_{сж} \sigma_{сж}^m, \quad (10.74)$$

где k_p , $k_{сж}$, n и m — величины, характеризующие физические свойства материала, положение нейтрального слоя можно определить из условий

$$\sum Z = \int_F \sigma dF = 0;$$

$$\sum M_x = \int_F \sigma y dF - M = 0$$

или

$$b \left(\int_0^{h_1} \sigma_p dy - \int_0^{h_2} \sigma_{сж} dy \right) = 0; \quad (10.75)$$

$$b \left(\int_0^{h_1} \sigma_p y dy + \int_0^{h_2} \sigma_{сж} y dy \right) = M. \quad (10.76)$$

На основании (10.74) и (10.73)

$$\sigma_p = \left(\frac{\epsilon_p}{k_p} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{y}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sigma_{сж} = \left(\frac{\epsilon_{сж}}{k_{сж}} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{y}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (10.77)$$

Подставляя (10.77) в (10.75) и (10.76) и интегрируя, соответственно получаем

$$\frac{n}{n+1} \left(\frac{h_1}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}} h_1 - \frac{m}{m+1} \left(\frac{h_2}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} h_2 = 0; \quad (10.78)$$

$$\frac{n}{2n+1} b \left(\frac{h_1}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}} h_1^2 - \frac{m}{2m+1} b \left(\frac{h_2}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} h_2^2 = M. \quad (10.79)$$

Учитывая, что $h_1 + h_2 = h$, из последних двух уравнений находим ρ , h_1 и h_2 , а затем по формулам (10.77) — напряжения σ_p и $\sigma_{сж}$.

Можно решить и обратную задачу: определить наибольший допускаемый изгибающий момент по допускаемым напряжениям растяжения $[\sigma_p]$ или сжатия $[\sigma_{сж}]$. При этом, пользуясь формулами (10.77), определяют напряжения в крайних волокнах:

$$(\sigma_p)_{\max} = \sigma_1 = \left(\frac{h_1}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad (\sigma_{сж})_{\max} = \sigma_2 = \left(\frac{h_2}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (10.80)$$

На основании (10.80) выражения (10.78) и (10.79) можно представить в виде

$$\frac{n}{n+1} \sigma_1 h_1 - \frac{m}{m+1} \sigma_2 h_2 = 0; \quad (10.81)$$

$$\frac{n}{2n+1} b \sigma_1 h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \sigma_2 h_2^2 = M. \quad (10.82)$$

Кроме того, из уравнения (10.80) следует, что

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_1 k_p^n}{\sigma_2^m k_{сж}}. \quad (10.83)$$

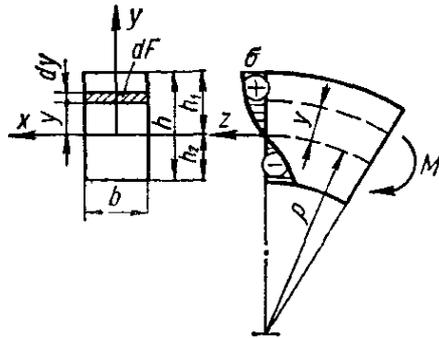


Рис. 217

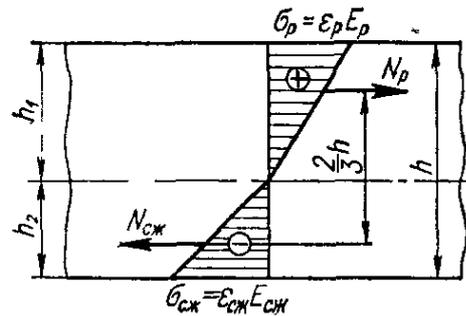


Рис. 218

Пользуясь соотношениями (10.81) — (10.83) и учитывая, что $h_1 + h_2 = h$, можно по известному $[\sigma_p]$ или $[\sigma_{сж}]$ определить положение нейтральной оси и допускаемое значение изгибающего момента $[M]$.

В случае, когда материал следует закону Гука, но модули упругости при растяжении E_p и сжатии $E_{сж}$ неодинаковы (обычно $E_{сж} > E_p$), эпюра нормальных напряжений будет иметь вид, приведенный на рис. 218, а максимальные напряжения при известном действующем изгибающем моменте M для стержня прямоугольного сечения будут определяться по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \sqrt{\frac{E_p}{E_{сж}}} \right); \\ \sigma_{сж} &= \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \sqrt{\frac{E_{сж}}{E_p}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

В случае, когда напряжения определяются через относительные деформации в крайних волокнах, найденные с помощью тензометров, формулы (10.84) лучше представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \frac{\epsilon_{сж}}{\epsilon_p} \right); \\ \sigma_{сж} &= \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{сж}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.85)$$

Таблица 24. Схемы действительных и соответствующих им фиктивных балок

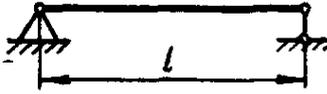
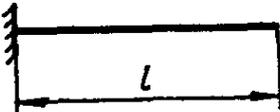
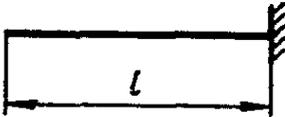
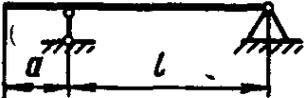
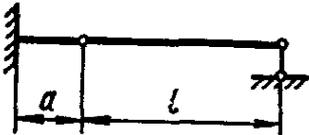
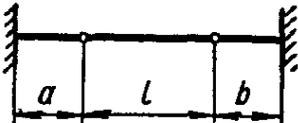
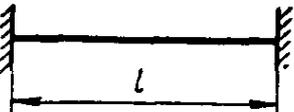
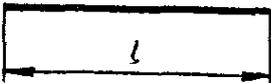
Действительная балка	Фиктивная балка
	
	
	
	
	

Таблица 25. Балки равного сопротивления изгибу

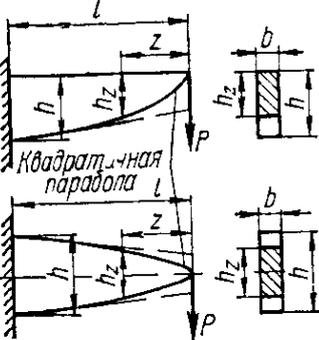
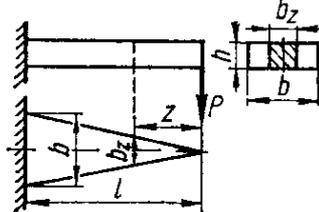
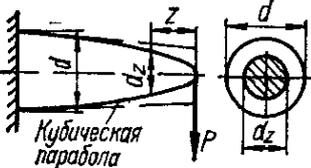
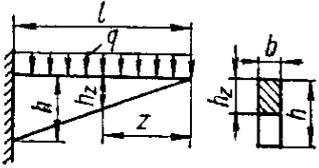
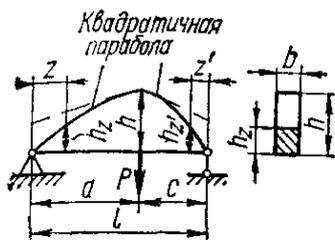
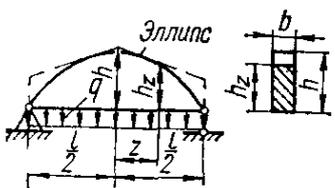
Схема балки и ее поперечное сечение	Формулы для определения размеров поперечного сечения и максимального прогиба
	$h_z = \sqrt{\frac{6Pz}{b[\sigma]}}; f = \frac{8P}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
	$b_z = \frac{6Pz}{h^2[\sigma]}; f = \frac{6P}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
	$d_z = \sqrt[3]{\frac{32Pz}{\pi[\sigma]}}$
	$h_z = z \sqrt{\frac{3q}{B[\sigma]}}$

Схема балки и ее поперечное сечение

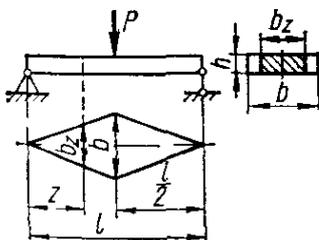
Формулы для определения размеров поперечного сечения и максимального прогиба



$$h_z = \sqrt{\frac{6Pcz}{bl[\sigma]}}; h_{z'} = \sqrt{\frac{6Paz'}{bl[\sigma]}}$$



$$h_z = \sqrt{\frac{3ql^2}{4b[\sigma]} \left(1 - 4\frac{z^2}{l^2}\right)}; f = \frac{3ql^4}{16bEh^3}$$



$$h_z = \sqrt{\frac{3Pz}{h^2[\sigma]}}; f = \frac{3Pl^3}{8bEh^3}$$

Таблица 26. Уравнения упругой линии и угла поворота поперечных сечений консольной балки переменной высоты

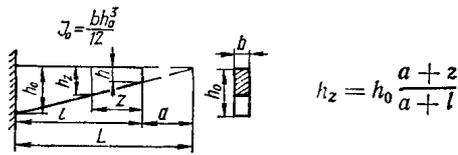


Схема балки и нагрузки	Уравнение упругой линии	Уравнение угла поворота
	$\frac{PL^3}{EJ_0} \left[-\ln \frac{L}{a+z} + \frac{a}{2(a+z)} + \frac{2l+a}{2L^2} (l-z) - \frac{a}{2L} \right]$	$\frac{PL^3}{EJ_0} \left[\frac{2z+a}{2(a+z)^2} - \frac{2l+a}{2L^2} \right]$
	$-\frac{pL^3}{2EJ_0} \left\{ 2a \ln \frac{L}{a+z} - (a+z) [\ln(a+z) - 1] - \frac{4aL - a^2}{2L^2} (l-z) + (a+z) \ln L - \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{a+z} - \frac{1}{L} \right) - L \right\}$	$-\frac{pL^3}{2EJ_0} \left[\ln \frac{L}{a+z} - 2a \left(\frac{1}{a+z} - \frac{1}{L} \right) + a^2 \left(\frac{1}{2(a+z)^2} - \frac{1}{2L^2} \right) \right]$

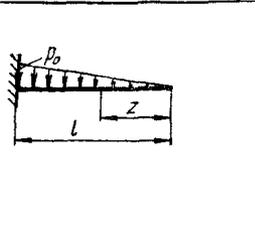
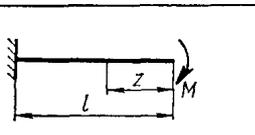
	$-\frac{p_0 L^3}{6EJ_0 l} \left\{ 3a(a+z) [\ln(a+z) - 1] - 3aL \ln L - \right.$ $- 3a^2 \ln \frac{L}{a+z} + \left(3a \ln L + \frac{3a^2}{L} - L - \frac{a^3}{2L^2} \right) (l-z) +$ $\left. + \frac{1}{2} [L^2 - (a+z)^2] + \frac{a^3}{2} \left(\frac{1}{a+z} - \frac{1}{L} \right) + 3aL \right\}$	$\frac{p_0 L^3}{6EJ_0 l} \left\{ -3a \ln \frac{L}{a+z} + (l-z) + \right.$ $+ 3a^2 \left(\frac{1}{a+z} - \frac{1}{L} \right) - \frac{a^3}{2} \times$ $\left. \times \left[\frac{1}{(a+z)^2} - \frac{1}{L^2} \right] \right\}$
	$\frac{ML^3}{EJ_0} \left[\frac{z}{2L^2} + \frac{1}{2(a+z)} - \frac{2l+a}{2L^2} \right]$	$\frac{ML^3}{EJ_0} \left[\frac{1}{2(a+z)^2} - \frac{1}{2L^2} \right]$

Таблица 27. Уравнения упругой линии, максимальные прогибы и углы поворота концевых и опорных сечений статически определенных балок постоянного поперечного сечения

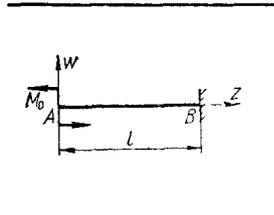
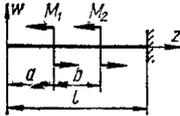
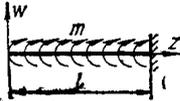
Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{M_0 l^2}{2EJ} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2$ $f = -\frac{M_0 l^2}{2EJ} \text{ при } z = 0$	$\theta = \frac{M_0 l}{EJ}$ <p>при $z = 0$</p>

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$0 < z < a$ $w_z = -\frac{1}{2EJ} [(M_1 + M_2)(l - z)^2 - M_1(a - z)^2 - M_2(a + b - z)^2]$ $a \leq z \leq a + b$ $w_z = -\frac{1}{2EJ} [(M_1 + M_2)(l - z)^2 - M_2(a + b - z)^2]$ $a + b \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{(M_1 + M_2)l^2}{2EJ} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ $f = -\frac{1}{2EJ} [(M_1 + M_2)l^2 - M_1a^2 - M_2(a + b)^2] \quad \text{при } z = 0$	$\theta = \frac{1}{EJ} [(M_1 + M_2)l - M_1a - M_2 \times (a + b)]$ <p style="text-align: center;">при $z = 0$</p>
	$0 < z < l$ $w_z = \frac{ml^3}{6EJ} \left[2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]$ $f = \frac{ml^3}{3EJ} \quad \text{при } z = 0$	$\theta = -\frac{ml^2}{2EJ}$ <p style="text-align: center;">при $z = 0$</p>

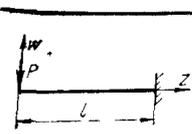
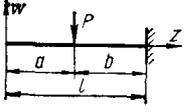
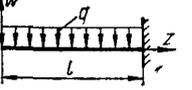
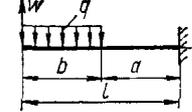
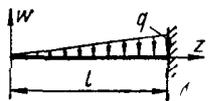
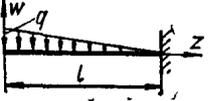
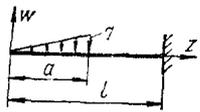
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]$ $f = -\frac{Pl^3}{3EJ} \quad \text{при } z=0$	$\theta = \frac{Pl^2}{2EJ}$ <p>при $z=0$</p>
	$0 \leq z \leq a$ $w_z = \frac{Pb^3}{6EJ} \left(1 - 3\frac{l-z}{b} \right) = -\frac{Pb^3}{6EJ} \left(3\frac{a-z}{b} + 2 \right)$ $a \leq z \leq l$ $w_z = \frac{Pb^3}{6EJ} \left(\frac{l-z}{b} - 3 \right) \left(\frac{l-z}{b} \right)^2$ $f = \frac{Pb^3}{6EJ} \left(1 - 3\frac{l}{b} \right) = -\frac{Pb^3}{6EJ} \left(2 + 3\frac{a}{b} \right) \quad \text{при } z=0$	$\theta = \frac{Pb^2}{2EJ}$ <p>при $z=0$</p>
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[3 - 4\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \right]$ $f = -\frac{ql^4}{8EJ} \quad \text{при } z=0$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ}$ <p>при $z=0$</p>
	$0 \leq z \leq b$ $w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} - 4\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4} \right]$ $b \leq z \leq l$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ} \left(1 - \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p>при $z=0$</p>

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} - 4\left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4} - \frac{(z-b)^4}{l^4} \right]$ $f = -\frac{ql^4}{24EJ} \left(3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} \right) \text{ при } z = 0$	
	$0 < z < l$ $w_z = -\frac{ql^4}{120EJ} \left(4 - 5\frac{z}{l} + \frac{z^5}{l^5} \right)$ $f = -\frac{ql^4}{30EJ} \text{ при } z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \text{ при } z = 0$
	$0 < z < l$ $w_z = -\frac{ql^4}{120EJ} \left(11 - 15\frac{z}{l} + 5\frac{z^4}{l^4} - \frac{z^5}{l^5} \right)$ $f = -\frac{11}{120} \frac{ql^4}{EJ} \text{ при } z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{8EJ} \text{ при } z = 0$

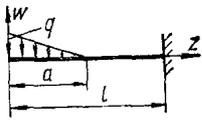


$$0 \leq z \leq a$$

$$w_z = -\frac{qal^3}{120EJ} \left[4 \left(5 - 5 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) - 5 \left(6 - 8 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} + \frac{z^5}{a^2 l^3} \right]$$

$$f = -\frac{qal^3}{30EJ} \left(5 - 5 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } z=0$$

$$\theta = \frac{qal^2}{24EJ} \left(6 - 8 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z=0$$

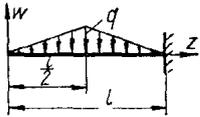


$$0 \leq z \leq a$$

$$w_z = -\frac{qal^3}{120EJ} \left[20 - 10 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} - 5 \left(6 - 4 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} + 5 \frac{z^4}{al^3} - \frac{z^5}{a^2 l^3} \right]$$

$$f = -\frac{qal^3}{120EJ} \left(20 - 10 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } z=0$$

$$\theta = \frac{qal^2}{24EJ} \left(6 - 4 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z=0$$



$$0 \leq z \leq l/2$$

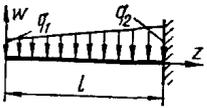
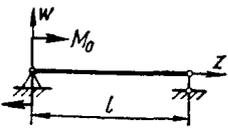
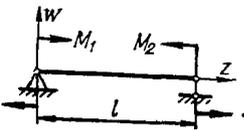
$$w_z = -\frac{109}{1920} \frac{ql^4}{EJ} \left[1 - \frac{140}{109} \frac{z}{l} + \frac{32}{109} \frac{z^5}{l^5} \right]$$

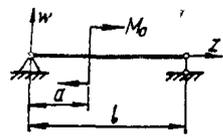
$$l/2 \leq z \leq l$$

$$w_z = -\frac{109}{1920} \frac{ql^4}{EJ} \left[1 - \frac{140}{109} \frac{z}{l} + \frac{32}{109} \frac{z^5}{l^5} - \frac{64}{109} \frac{\left(z - \frac{l}{2} \right)^5}{l^5} \right]$$

$$f = -\frac{10,9ql^4}{192EJ} \text{ при } z=0$$

$$\theta = \frac{7}{96} \frac{ql^3}{EJ} \text{ при } z=0$$

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$0 < z < l$ $w_z = -\frac{l^4}{120EJ} \left[11q_1 + 4q_2 - 5(3q_1 + q_2) \frac{z}{l} + 5q_1 \frac{z^4}{l^4} + (q_2 - q_1) \frac{z^5}{l^5} \right]$ $f = -\frac{11q_1 + 4q_2}{120EJ} l^4 \text{ при } z = 0$	$\theta = \frac{3q_1 + q_2}{24EJ} l^3 \text{ при } z = 0$
	$0 < z < l$ $w_z = -\frac{M_0 l^2}{6EJ} \left(2 \frac{z}{l} - 3 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $w = -\frac{M_0 l^2}{16EJ} \text{ при } z = l/2$ $f = -0,0642 \frac{M_0 l^2}{EJ} \text{ при } z = 0,422l$	$\theta = -\frac{M_0 l}{3EJ} \text{ при } z = 0$ $\theta = \frac{M_0 l}{6EJ} \text{ при } z = l$
	$0 < z < l$ $w_z = -\frac{l^2}{6EJ} \left[(2M_1 + M_2) \frac{z}{l} - 3M_1 \frac{z^2}{l^2} + (M_1 - M_2) \frac{z^3}{l^3} \right]$ $w = -\frac{M_1 + M_2}{16EJ} l^2 \text{ при } z = l/2$	$\theta = -\left(\frac{M_1 l}{3EJ} + \frac{M_2 l}{6EJ} \right) \text{ при } z = 0$ $\theta = \frac{M_1 l}{6EJ} + \frac{M_2 l}{3EJ} \text{ при } z = l$



$$0 \leq z < a$$

$$w_z = \frac{M_0 l^2}{6EJ} \left[\left(6 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} - 2 \right) \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right]$$

$$w = \frac{M_0 l^2}{6EJ} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - \frac{13 a^3}{8 l^3} \right) \text{ при } z = \frac{a}{2}$$

$$w = \frac{M l^2}{3EJ} \left(3 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - 2 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ при } z = a$$

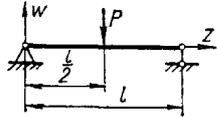
$$\theta = -\frac{M_0 l}{6EJ} \left(2 - 6 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$$

при $z = 0$

$$\theta = -\frac{M_0 l}{EJ} \left(3 - \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right)$$

при $z = a$

$$\theta = \frac{M_0 l}{6EJ} \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z = l$$



$$0 \leq z < l/2$$

$$w_z = -\frac{P l^3}{48EJ} \left(3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$$

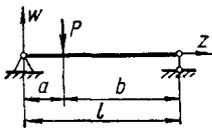
$$l/2 \leq z \leq l$$

$$w_z = -\frac{P l^3}{48EJ} \left[3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} + \frac{8(z-l/2)^3}{l^3} \right]$$

$$f = -\frac{P l^3}{48EJ} \text{ при } z = l/2$$

$$\theta = -\frac{P l^2}{16EJ} \text{ при } z = 0$$

$$\theta = \frac{P l^2}{16EJ} \text{ при } z = l$$



$$0 \leq z < a$$

$$w_z = -\frac{P a^2 b^2}{6EJl} \left(2 \frac{z}{a} + \frac{z}{b} - \frac{z^3}{a^2 b} \right)$$

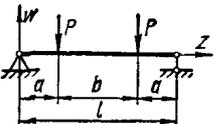
$$a \leq z \leq l$$

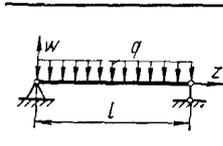
$$w_z = -\frac{P a^2 b^2}{6EJl} \left[2 \frac{l-z}{b} + \frac{l-z}{a} - \frac{(l-z)^3}{a b^2} \right]$$

$$\theta = -\frac{P b a}{6EJl} (a + 2b) =$$

$$= -\frac{P l^2}{6EJ} \left(\frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3} \right)$$

при $z = 0$

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$w = -\frac{Pb}{48EJ} (3l^2 - 4b^2) \quad \text{при } z = l/2$ $w = -\frac{Pl^3}{3EJ} \left(\frac{ab}{l^2}\right)^2 \quad \text{при } z = a$ $f = -\frac{Pbl^2 \sqrt{3}}{27EJ} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^3} \quad \text{при } z = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$	$\theta = \frac{Pa}{6EJl} (l^2 - a^2) \quad \text{при } z = l$
	$0 < z < a$ $w_z = -\frac{Pa^3}{6EJ} \left[3 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} \right]$ $a < z < a + b$ $w_z = -\frac{Pa^3}{6EJ} \left[3 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} + \frac{(z-a)^3}{a^3} \right]$ $w = -\frac{Pa^3}{6EJ} \left(2 + 3 \frac{b}{a} \right) \quad \text{при } z = a$ $f = -\frac{Pl^3}{24EJ} \left(3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \quad \text{при } z = l/2$	$\theta = -\frac{Pa(a+b)}{2EJ}$ <p style="text-align: center;">при $z = 0$</p> $\theta = \frac{Pa(a+b)}{2EJ}$ <p style="text-align: center;">при $z = l$</p>



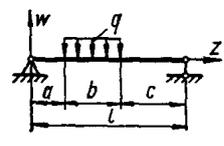
$$0 \leq z \leq l$$

$$w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 + \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right]$$

$$f = -\frac{5ql^4}{384EJ} \quad \text{при } z = l/2$$

$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \quad \text{при } z = 0$$

$$\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \quad \text{при } z = l$$



$$0 \leq z \leq a$$

$$w_z = -\frac{qbl^3}{48EJ} \left[8 \frac{d}{l} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) - \frac{z}{l} \left(8 \frac{d^3}{l^3} - \frac{2ab^2}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2 \frac{b^2}{l^2} \right) \right]$$

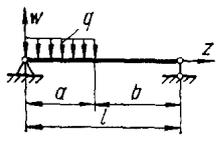
$$a \leq z \leq a + b$$

$$w_z = -\frac{qbl^3}{48EJ} \left[8 \frac{d}{l} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) - \frac{z}{l} \left(8 \frac{d^3}{l^3} - 2 \frac{ab^2}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2 \frac{b^2}{l^2} \right) + 2 \frac{(z-a)^4}{bl^3} \right]$$

$$\theta = -\frac{qbl^2}{24EJ} \left(4 \frac{d}{l} - 4 \frac{d^3}{l^3} + \frac{ab^2}{l^3} + \frac{1}{2} \frac{b^3}{l^3} - \frac{b^2}{l^2} \right)$$

при $z = 0$

$$d = c + \frac{1}{2} b$$



$$0 \leq z \leq a$$

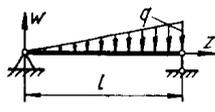
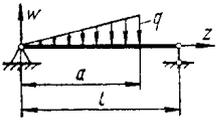
$$w_z = -\frac{qa^3l}{24EJ} \left[4 \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2 \frac{z}{a} - 4 \frac{\left(\frac{a}{2} + b \right) z^3}{a^2 l^2} + \frac{z^4}{a^3 l} \right]$$

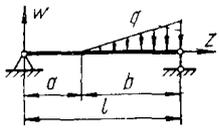
$$a \leq z \leq l$$

$$w_z = -\frac{qa^3l}{24EJ} \left[4 \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2 \frac{z}{a} - 4 \frac{\left(\frac{a}{2} + b \right) z^3}{a^2 l^2} + \right]$$

$$\theta = -\frac{qa^2l}{6EJ} \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2 \quad \text{при } z = 0$$

$$\theta = \frac{qa^2l}{12EJ} \left(1 - \frac{a^2}{2l^2} \right) \quad \text{при } z = l$$

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$w = -\frac{qa^3l}{24EJ} \left(4 - 7\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z = a$	
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{ql^4}{360EJ} \left(7\frac{z}{l} - 10\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{z^5}{l^5} \right)$ $f = -0,00652 \frac{ql^4}{EJ} \text{ при } z = 0,5193l$	$\theta = -\frac{7ql^3}{360EJ} \text{ при } z = 0$ $\theta = \frac{8ql^3}{360EJ} \text{ при } z = l$
	$0 \leq z \leq a$ $w_z = -\frac{qa^3l}{360EJ} \left[\left(40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{a} - 10 \left(3 - 2\frac{a}{l} \right) \frac{z^3}{a^3l} + 3\frac{z^5}{a^5l} \right]$ $a \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{qa^3l}{90EJ} \left[\left(5 - 3\frac{a^2}{l^2} \right) \frac{l-z}{a} - 5\frac{(l-z)^3}{al^2} \right]$ $w = -\frac{qa^3l}{45EJ} \left(5 - 9\frac{a}{l} + 4\frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z = a$	$\theta = -\frac{qa^2l}{360EJ} \left(40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z = 0$ $\theta = \frac{qa^2l}{90EJ} \left(5 - 3\frac{a^2}{l^2} \right) \text{ при } z = l$



$$0 \leq z \leq a$$

$$w_z = -\frac{qab^2l}{360EJ} \left[\left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{z}{a} - 10 \frac{z^3}{al^2} \right]$$

$$a \leq z \leq l$$

$$w_z = -\frac{qab^2l}{360EJ} \left[\left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{z}{a} - 10 \frac{z^3}{al^2} + 3 \frac{(z-a)^3}{b^3al} \right]$$

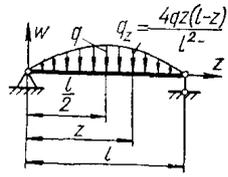
$$w = -\frac{qab^2l}{360EJ} \left(20 \frac{b}{l} - 13 \frac{b^2}{l^2} \right) \text{ при } z = a$$

$$\theta = -\frac{qb^2l}{360EJ} \left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right)$$

$$\text{при } z = 0$$

$$\theta = \frac{qb^2l}{360EJ} \left(20 - 15 \frac{b}{l} + 3 \frac{b^2}{l^2} \right)$$

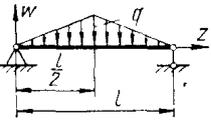
$$\text{при } z = l$$



$$f = -\frac{61}{5760} \frac{ql^4}{EJ} \text{ при } z = l/2$$

$$\theta = -\frac{ql^3}{30EJ} \text{ при } z = 0$$

$$\theta = \frac{ql^3}{30EJ} \text{ при } z = l$$



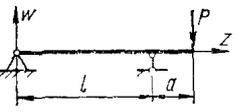
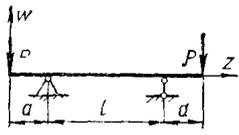
$$0 \leq z \leq l/2$$

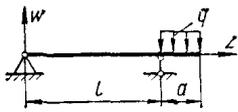
$$w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left(\frac{5}{8} \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} + \frac{2}{5} \frac{z^5}{l^5} \right)$$

$$f = -\frac{ql^4}{120EJ} \text{ при } z = l/2$$

$$\theta = -\frac{5}{192} \frac{ql^3}{EJ} \text{ при } z = 0$$

$$\theta = \frac{5}{192} \frac{ql^3}{EJ} \text{ при } z = l$$

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = \frac{Pal^2}{6EJ} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$ $l \leq z \leq l + a$ $w_z = \frac{Pal^2}{6EJ} \left[\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} + \frac{(l+a)(z-l)^3}{al^3} \right]$ $w_{\max} = 0,0642 \frac{Pal^2}{EJ} \text{ при } z = 0,578l$ $w = -\frac{Pa^2}{3EJ}(l+a) \text{ при } z = l+a$	$\theta = \frac{Pal}{6EJ} \text{ при } z = 0$ $\theta = -\frac{Pal}{3EJ} \text{ при } z = l$ $\theta = -\frac{Pa}{6EJ}(2l+3a) \text{ при } z = l+a$
	$0 \leq z \leq a$ $w_z = -\frac{Pa^2}{6EJ} \left[(3l+2a) - 3(l+a) \frac{z}{a} + \frac{z^3}{a^2} \right]$ $a \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{Pa^2}{6EJ} \left[(3l+2a) - 3(l+a) \frac{z}{a} + \frac{z^3}{a^2} - \frac{(z-a)^3}{a^2} \right]$ $w = -\frac{Pa^2}{6EJ}(3l+2a) \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l+2a$ $f = \frac{Pal^2}{8l^2} \text{ при } z = a + \frac{l}{2}$	$\theta = \frac{Pal}{2EJ} \text{ при } z = a$ $\theta = -\frac{Pal}{2EJ} \text{ при } z = a+l$ $\theta = \frac{Pa(a+l)}{2lJ} \text{ при } z = 0$ $\theta = -\frac{Pa(a+l)}{2lJ} \text{ при } z = 2a+l$



$$0 \leq z \leq l$$

$$w_z = \frac{qa^2 l^2}{12EJ} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$l < z \leq l + a$$

$$w_z = -\frac{qa^3 l}{24EJ} \left[\left(4 + 3 \frac{a}{l} \right) - 4 \left(1 + \frac{l}{a} \right) \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right) + \frac{l^3}{a^3} \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right)^4 \right]$$

$$w = \frac{qa^2 l^2}{32EJ} \text{ при } z = l/2$$

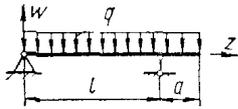
$$w_{\max} = 0,0321 \frac{qa^2 l^2}{EJ} \text{ при } z = 0,577l$$

$$w = -\frac{qa^3}{24EJ} (4l + 3a) \text{ при } z = l + a$$

$$\theta = \frac{qa^2 l}{12EJ} \text{ при } z = 0$$

$$\theta = -\frac{qa^2 l}{6EJ} \text{ при } z = l$$

$$\theta = -\frac{qa^2}{6EJ} (a + l) \text{ при } z = l + a$$



$$0 \leq z \leq l$$

$$w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[\left(1 - 2 \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} - 2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right]$$

$$l < z \leq l + a$$

$$w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[\left(4 \frac{a^3}{l^3} - \frac{a}{l} + 3 \frac{a^4}{l^4} \right) - \left(4 \frac{a^2}{l^2} - 1 + \right. \right.$$

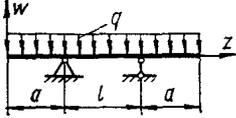
$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \left(1 - 2 \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$\text{при } z = 0$$

$$\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \left(1 + \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$\text{при } z = l$$

$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \left(4 \frac{a^3}{l^3} + 4 \frac{a^2}{l^2} - 1 \right)$$

Схема балки	Уравнение упругой линии w_z и максимальный прогиб f	Угол поворота θ
	$+ 4 \frac{a^3}{l^3} \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right) + \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right)^4 \Big]$ $w = -\frac{ql^4}{384EJ} \left(5 - 12 \frac{a^2}{l^2} \right) \quad \text{при } z = l/2$ $w = -\frac{qa^4}{24EJ} \left(3 + 4 \frac{l}{a} - \frac{l^3}{a^3} \right) \quad \text{при } z = l + a$	<p style="text-align: center;">при $z = l + a$</p>
	$0 \leq z \leq a$ $w_z = \frac{ql^4}{24EJ} \left[\left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 3 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{a}{l} - \left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{z}{l} - \frac{z^4}{l^4} \right]$ $a \leq z \leq a + l$ $w_z = \frac{ql^4}{24EJ} \left[\left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 3 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{a}{l} - \left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{z}{l} + 2 \left(1 + 2 \frac{a}{l} \right) \frac{(z-a)^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4} \right]$ $w = \frac{qal^3}{24EJ} \left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 3 \frac{a^3}{l^3} \right) \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l + 2a$ $w = -\frac{ql^4}{16EJ} \left(\frac{5}{24} - \frac{a^2}{l^2} \right) \quad \text{при } z = a + \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \quad \text{при } z = 0$ $\theta = -\frac{ql^3}{4EJ} \left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{l^2} \right) \quad \text{при } z = a$ $\theta = \frac{ql^3}{4EJ} \left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{l^2} \right) \quad \text{при } z = a + l$ $\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \left(1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \quad \text{при } z = l + 2a$

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под сложным сопротивлением подразумевают различные комбинации простых напряженных состояний (растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба). В общем случае нагружения бруса (рис. 219, а) в его поперечных сечениях действуют шесть компонентов внутренних усилий (N , Q_x , Q_y , M_x , M_y , $M_{кр}$) (рис. 219, б), связанные с четырьмя простыми деформациями стержня: растяжением или сжатием, сдвигом, кручением и изгибом.

На основании гипотезы о независимом действии сил напряженное состояние жесткого стержня определяют путем суммирования напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности.

Аналогично деформации (перемещения) могут быть определены путем сложения деформаций (перемещений), вызванных каждым компонентом нагрузки в отдельности.

Принцип суммирования действия сил, или принцип суперпозиции, применим во всех случаях, когда деформации малы, а материал подчиняется закону Гука. На практике редко встречаются случаи, когда в стержне возникают все шесть компонентов внутренних усилий, обычно приходится иметь дело с их различными комбинациями.

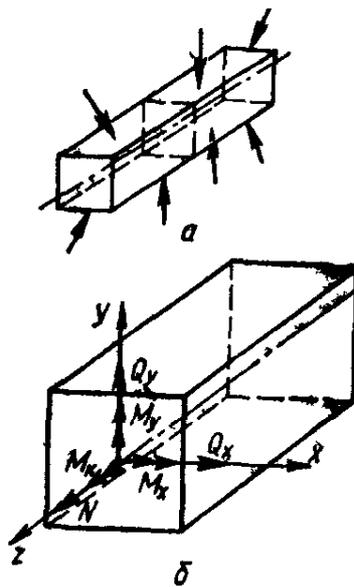


Рис. 219

11.1. Сложный и кривой изгиб

Сложный, или неплоский, изгиб вызывается внешними силами, действующими в разных плоскостях, проходящих через ось балки (рис. 220, а). Изогнутая ось балки в этом случае не является плоской кривой.

Если все нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей, то изгиб называется кривым (рис. 221, а).

Обычно сложный или кривой изгиб приводит к двум плоским изгибам, для чего нагрузки, действующие в произвольных продольных плоскостях, раскладывают на составляющие, лежащие в главных плоскостях yz и xz (рис. 220, б, 221, б). При этом в сечении возникает четыре компонента внутренних усилий: Q_x , Q_y , M_x и M_y .

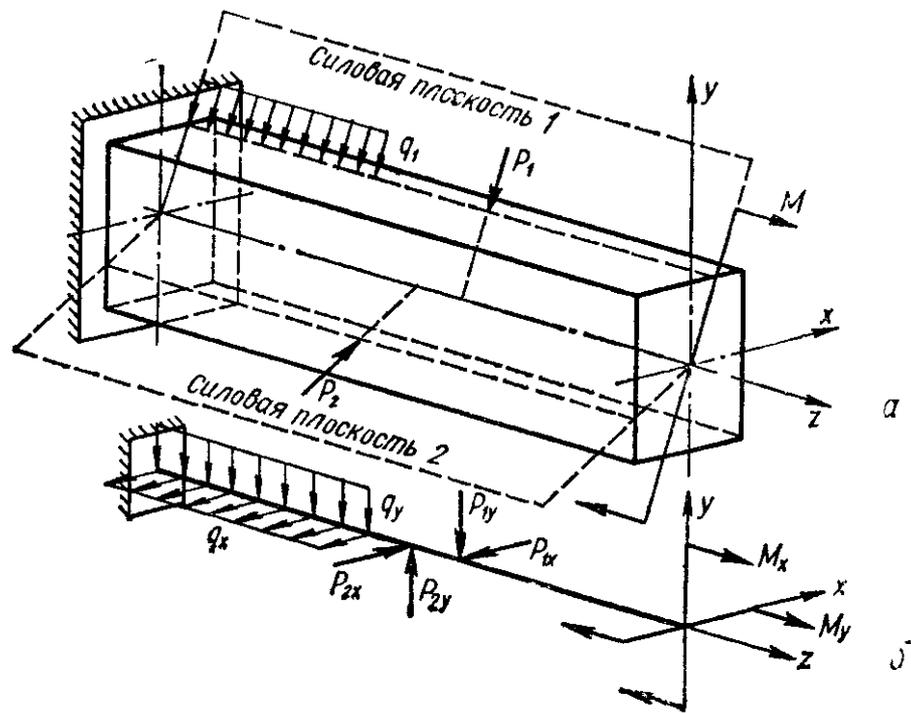


Рис 220

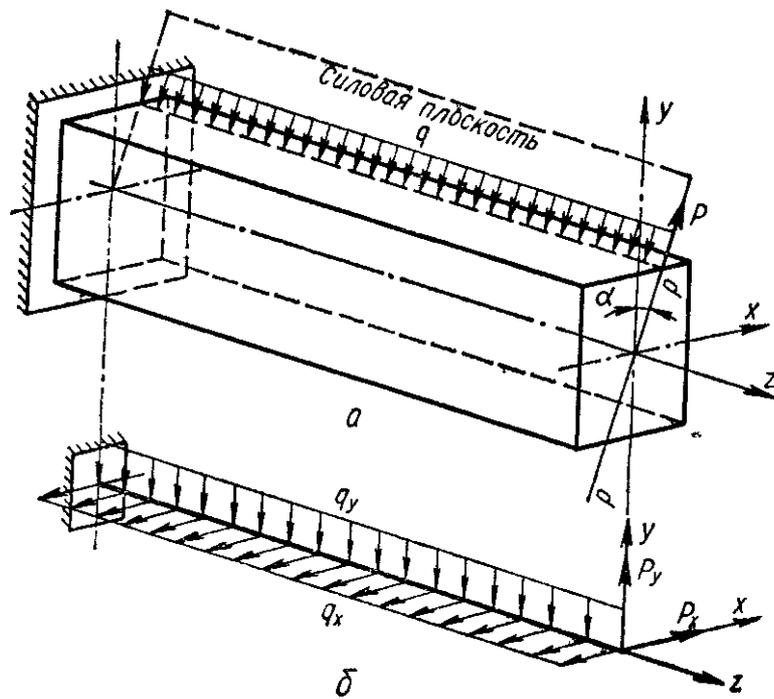


Рис. 221

Напряжения в точках любого сечения, расположенных в первом квадранте системы координат xu (рис. 222, а), при одновременном действии M_x и M_y определяются формулой

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}. \quad (11.1)$$

Применяя эту формулу, в общем случае, следует учитывать знаки при координатах x и y .

При косом изгибе (рис. 223) справедливы зависимости

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha; \\ M_y &= M \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где M — изгибающий момент в данном сечении в силовой плоскости pp (рис. 222, б).
Формула (11.1) может быть записана в виде

$$\sigma = M \left(\frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right). \quad (11.3)$$

Уравнение нейтральной линии получим из (11.1), приняв $\sigma = 0$:

$$\sigma = \frac{M_x y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{J_y} = 0. \quad (11.4)$$

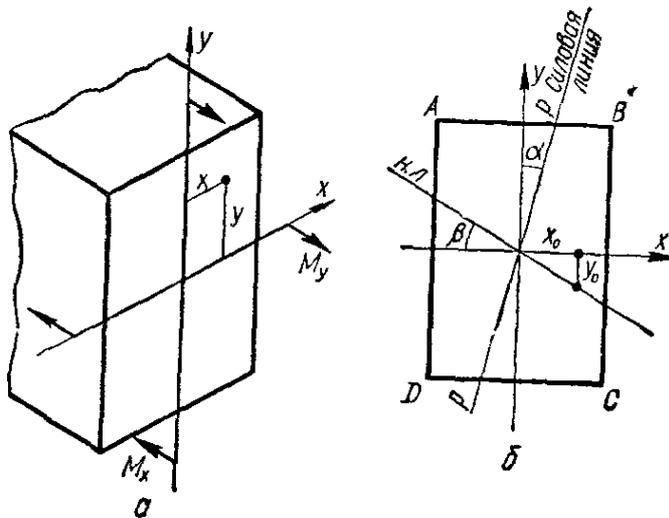


Рис. 222

Уравнение (11.4) является уравнением прямой линии, проходящей через начало координат. Положение нейтральной линии определяется тангенсом угла ее наклона β (рис. 222, б) к главной оси x :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = - \frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y}. \quad (11.5)$$

Строя векторную диаграмму моментов (рис. 223), определяют угол α наклона силовой плоскости pp (плоскости действия момента):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x}. \quad (11.6)$$

Тогда угол наклона нейтральной линии (11.5) может быть представлен формулой

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (11.7)$$

из которой видно, что в общем случае сложного изгиба, когда $J_x \neq J_y$ нейтральная линия не перпендикулярна к силовой линии.

Поскольку при косом изгибе отношение M_y к M_x , характеризующее $\operatorname{tg} \alpha$ (11.6), постоянно по всей длине стержня, угол наклона нейтраль-

ной линии β также постоянен, т. е. упругая линия расположена в одной плоскости $n - n$ (рис. 223), называемой *плоскостью изгиба*.

Проверка прочности при сложном напряженном состоянии осуществляется на основании данных о наибольшем суммарном напряжении. Очевидно, при сложном изгибе σ_{\max} будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (точки A и B на рис. 224). В данном случае в точке A возникают наибольшие растягивающие напряжения, в точке B — наибольшие сжимающие напряжения. Условия прочности будут иметь вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{M_x y_A}{J_x} + \frac{M_y x_A}{J_y} \leq [\sigma_+]; \quad (11.10)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = -\frac{M_x y_B}{J_x} - \frac{M_y x_B}{J_y} \leq [\sigma_-]. \quad (11.11)$$

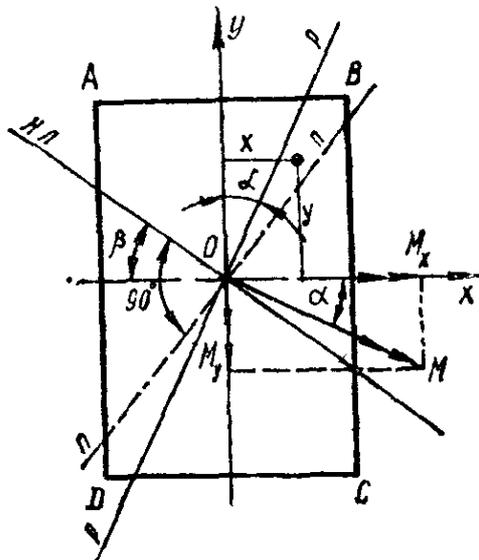


Рис 223

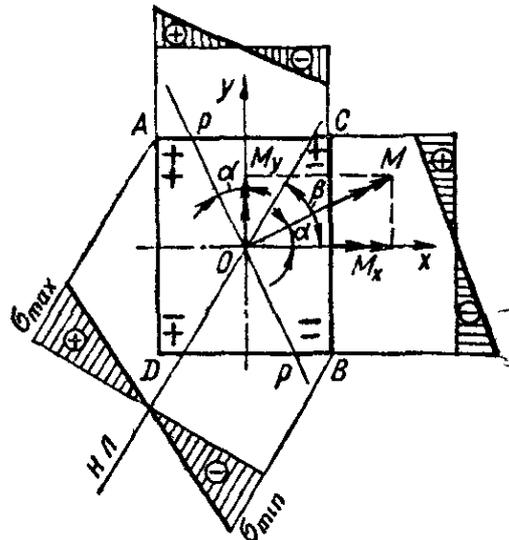


Рис 224

В случае косоугольного изгиба (рис. 222, б) условия прочности запишутся в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = M_{\max} \left(\frac{x_B \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_B \cos \alpha}{J_x} \right) \leq [\sigma_+]; \quad (11.12)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left(\frac{x_D \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_D \cos \alpha}{J_x} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (11.13)$$

В частности, для прямоугольного сечения, когда

$$\frac{J_y}{x_D} = \frac{J_y}{x_B} = W_y; \quad \frac{J_x}{y_B} = \frac{J_x}{y_D} = W_x,$$

формулы (11.10) и (11.11) могут быть представлены так.

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_x} \right) \leq [\sigma_+], \quad (11.14)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_x} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (11.15)$$

Определение размеров сечения в случае неплоского изгиба производят методом подбора, задаваясь различными отношениями моментов сопротивления. Касательные напряжения могут быть определены по формуле Журавского

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x}{J_x b}, \quad \tau_x = \frac{Q_x S_y}{J_y h}.$$

Перемещения определяются по принципу независимости действия сил. Если w — прогиб в направлении главной оси y , v — прогиб в направлении главной оси x (рис. 225), то дифференциальные уравнения изгиба в плоскостях yOz и xOz будут иметь вид

$$EJ_x \frac{d^2 w}{dz^2} = M_x; \quad EJ_y \frac{d^2 v}{dz^2} = M_y. \quad (11.14)$$

Уравнения (11.14) решают любым известным способом как для простого изгиба.

Величина полного прогиба в любом сечении балки может быть получена геометрическим суммированием прогибов в разных плоскостях по формуле

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (11.15)$$

Направление полного прогиба перпендикулярно к нейтральной линии (см. рис. 225).

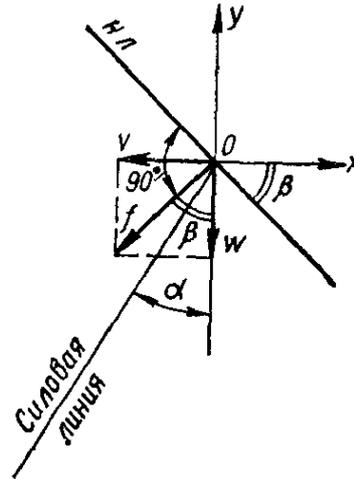


Рис 225

11.2. Изгиб с растяжением

Совместное действие изгиба и растяжения (сжатия) имеет место при продольно-поперечном действии нагрузок; внецентренном растяжении (сжатии).

Сложный изгиб с растяжением (сжатием) прямого бруса. В общем случае (рис. 226, а), когда на брус действуют продольные и поперечные силы, пересекающие ось бруса, в сечении возникают усилия M_x, M_y, Q_x, Q_y , а также продольное усилие в направлении оси z — N_z (рис. 226, б). Нормальные напряжения в произвольной точке при этом определяются формулой

$$\sigma = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (11.16)$$

Полагая напряженное состояние в опасной точке линейным (пренебрегаем при этом касательными напряжениями), условие прочности запишем в обычном виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (11.17)$$

Для сечения с двойной симметрией формула (11.16) примет вид

$$\sigma_{\pm} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

В случае изгиба в плоскости xy

$$\sigma_{\pm} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x}. \quad (11.18)$$

Эти формулы применяются также при расчете на прочность плоских рам и арок малой кривизны. В этом случае опасными сечениями будут те, где действует M_{\max} .

Внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса. Ядро сечения. На практике часто изгиб сочетается с растяжением (сжатием), что обусловлено внецентренным приложением нагрузки, параллельно оси стержня, когда равнодействующая P не совпадает с осью бруса (рис. 227). Обозначим координаты точки приложения равнодействующей x_p и y_p , а расстояние от этой точки до оси z , называемое эксцентриситетом, — e . Внутренние усилия в любом сечении равны

$$N = P; \quad M_y = Px_p, \quad M_x = Py_p,$$

напряжения в произвольной точке сечения определяются формулой

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y. \quad (11.1)$$

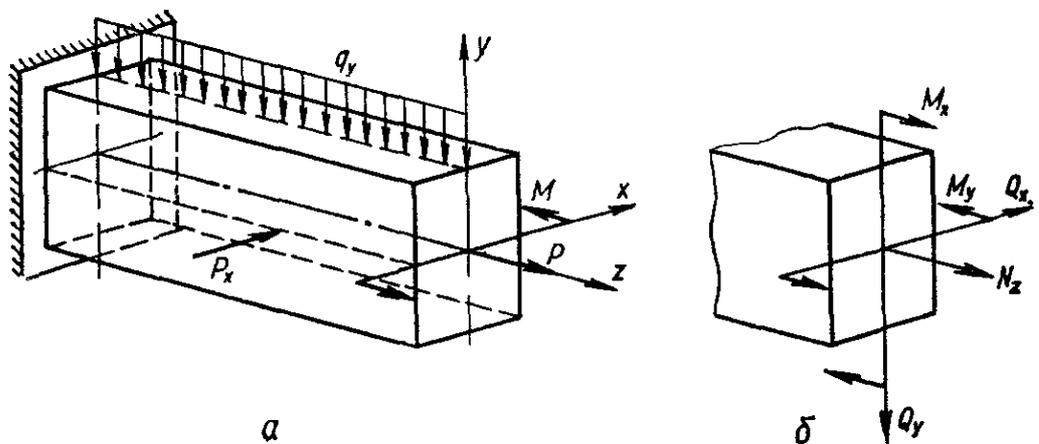


Рис. 226

или

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p F}{J_y} x + \frac{y_p F}{J_x} y \right). \quad (11.2)$$

Эту формулу можно выразить также через радиусы инерции

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y \right). \quad (11.2)$$

Уравнение нейтральной линии ($\sigma = 0$) находим из (11.2)

$$\frac{x_p}{i_y^2} x_0 + \frac{y_p}{i_x^2} y_0 = -1. \quad (11.2)$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y и x (рис. 228), найдем из (11.22), положив $x_0 = 0$, $y_0 = 0$:

$$x_n = -\frac{i_y^2}{x_p}; \quad y_n = -\frac{i_x^2}{y_p}. \quad (11.23)$$

Из (11 23) следует, что нейтральная линия пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка приложения силы P .
 Условия прочности для точек с наибольшими растягивающими и наибольшими сжимающими напряжениями (соответственно точек A и B на рис 228) можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_P}{i_y} x_A + \frac{y_P}{i_x} y_A \right) \ll [\sigma_+], \quad (11 24)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{x_P}{i_y} x_B - \frac{y_P}{i_x} y_B \right) \ll [\sigma_-] \quad (11 25)$$

Эпюры напряжений σ_z приведены на рис 228

Для стержня прямоугольного сечения условие прочности удобно представить следующим образом

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \ll [\sigma]. \quad (11.26)$$

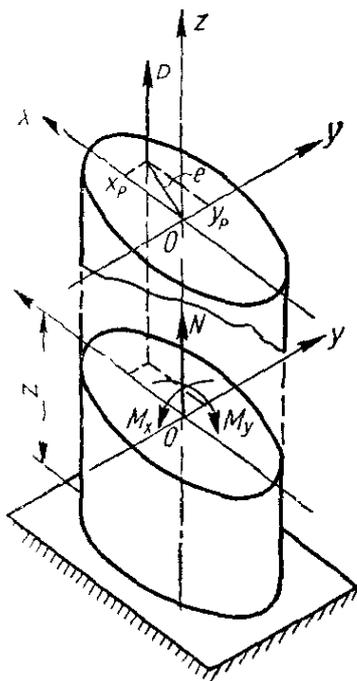


Рис 227

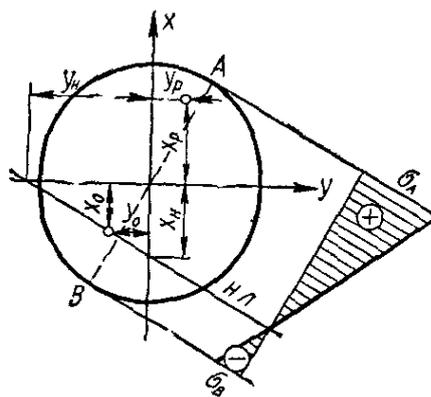


Рис 228

Формулы (11 24) — (11 26) справедливы и в случае, когда сила P является сжимающей, при условии, что нет опасности потери устойчивости.

Расстояние нейтральной линии от центра тяжести и величины зон сечения испытывающих растягивающие и сжимающие усилия, зависят от эксцентриситета e . Очевидно, одна из зон может отсутствовать (при растяжении — зона сжатия, при сжатии — зона растяжения), а нейтральная линия не будет пересекать сечения.

Представляет большой практический интерес, особенно при внецентренном сжатии колонн из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (например, кирпичной кладки), знать то максимальное значение эксцентриситета, при котором в сечении не будут возникать зоны растяжения, т.е. нейтральная линия будет касательной к сечению.

Область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложении силы P вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака, называется ядром сечения. Для определения ядра сечения необходимо задаваться различными положениями нейтральной

линии, проводя ее касательно к контуру и нигде не пересекая его (рис. 229), и вычислять координаты соответствующих точек приложения силы по следующим, вытекающим из (11.23) формулам:

$$y_P = -\frac{i_x^2}{y_H}; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{x_H}. \quad (11.24)$$

Вычисленные таким образом точки и определяют контур ядра сечения.

При повороте нейтральной линии относительно некоторой неподвижной точки контура сечения, например точки *A*, точка приложения силы перемещается вдоль некоторой прямой, например 2—3.

Для построения ядра сечения какой-либо фигуры, например прямоугольника (рис. 230), необходимо рассмотреть ряд положений нейтральной линии, совпадающих со сторонами сечения. Совместив нейтральную линию со стороной *CD* (положение 1—1), получим $y_H = b$, $x_H = \infty$; тогда на основании (11.27)

$$y_P = -\frac{i_x^2}{y_H} = -\frac{b}{6}; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0,$$

где

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}.$$

Таким образом, определим координату точки 1 ядра сечения. Совместив положение нейтральной линии со стороной *AD* (положение 2—2), аналогично получим

$$y_H = \infty; \quad x_H = -\frac{h}{2},$$

а координатами точки 2 ядра будут

$$y_P = 0; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{x_H} = -\frac{h^2}{12\left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6}.$$

Задаваясь соответствующими положениями нейтральной линии 3—3 и 4—4, по аналогии определим координаты точек ядра 3 и 4.

В табл. 28 приведена форма и размеры ядра сечения для различных сечений брусьев.

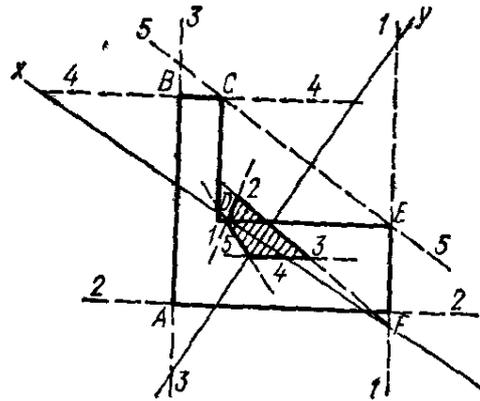


Рис. 229

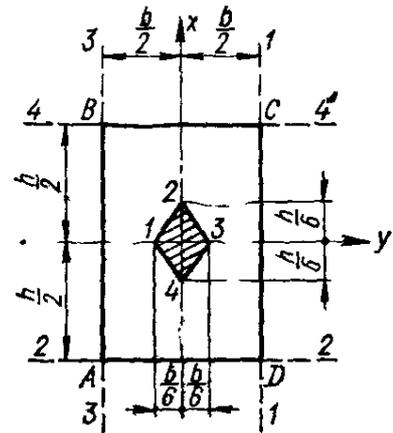


Рис. 230

11.3. Изгиб с кручением

Круглый вал. Совместное действие изгиба и кручения является наиболее характерным случаем нагружения валов. В этом напряженном состоянии имеют место пять компонентов внутренних усилий:

$$M_{кр} = M_z; M_y; M_x; Q_y \text{ и } Q_x.$$

При расчете валов сначала строят эпюры изгибающих M_x и M_y , результирующего M , а также крутящих $M_{кр}$ моментов и устанавливают

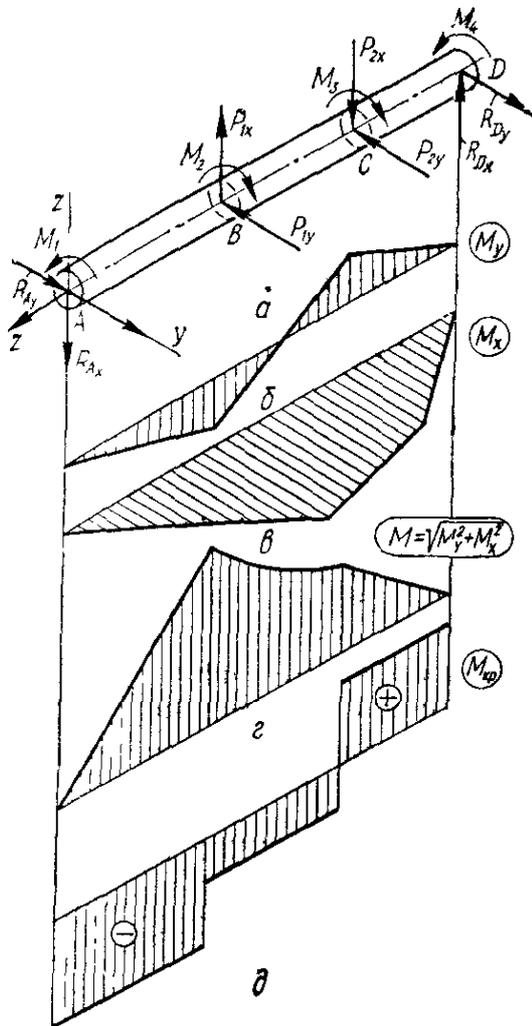


Рис. 231

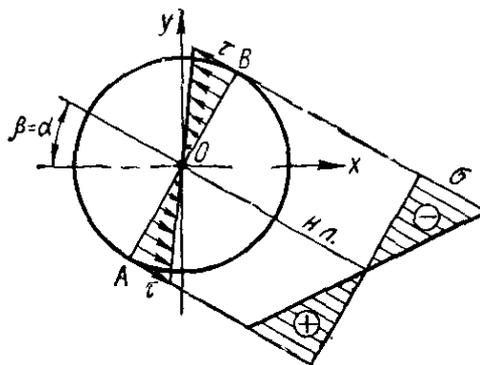


Рис. 232

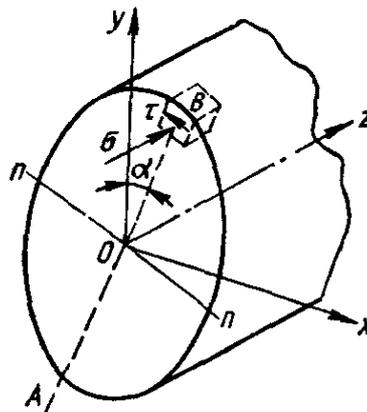


Рис. 233

опасное сечение (рис. 231, а, б, в, г, д). Результирующий изгибающий момент определяют по формуле

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (11.28)$$

По известным M и $M_{кр}$ в опасном сечении определяют максимальные нормальные и касательные напряжения в опасных точках сечения (рис. 232) по формулам

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}; \quad (11.29)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (11.30)$$

Главные напряжения в наиболее опасной точке (точка В рис. 233) будут (см. раздел 10.3)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (11.3)$$

Для проверки прочности элемента, выделенного у опасной точки следует воспользоваться одной из формул соответствующей теории прочности:

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (11.32)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \quad (11.33)$$

где

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Формула (11.32) пригодна при $m < 1$ для хрупких материалов и $m = 1$ для пластичных материалов.

Подставляя в формулы (11.32) и (11.30) выражения для напряжений и учитывая, что $W_p = 2W$, получаем

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1}{W} \left[\frac{1-m}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} \right] \leq [\sigma]; \quad (11.34)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{1}{W} \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} \leq [\sigma]. \quad (11.35)$$

Вторые сомножители в этих формулах представляют собой приведенные моменты $M_{\text{пр}}$, действие которых эквивалентно совместному действию моментов M_x , M_y и $M_{\text{кр}}$ в соответствии с принятыми теориями прочности:

$$M_{\text{прМ}} = \frac{1-m}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}; \quad (11.36)$$

$$M_{\text{прIV}} = \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M^2}. \quad (11.37)$$

Аналогично для других теорий прочности получим

$$M_{\text{прI}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2} \right]; \quad (11.38)$$

$$M_{\text{прII}} = 0,35 \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + 0,65 \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2} \quad (\text{при } \mu = 0,3) \quad (11.39)$$

$$M_{\text{прIII}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2}. \quad (11.40)$$

Условия прочности (11.34) и (11.35) можно выразить одной формулой

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (11.41)$$

Отсюда

$$W \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}, \quad (11.42)$$

а диаметр вала определим из условия

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{пр}}}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt[3]{10 \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}}. \quad (11.43)$$

Приведенные формулы полностью применимы и при расчете валов кольцевого сечения.

Брус прямоугольного сечения. При нагружении такого бруса, например, системой сил P_1 и P_2 (рис. 234, а), вызывающих в сечении моменты M_x , M_y и $M_{\text{кр}}$, расчет проводят по следующей схеме. Внешние силы раскладывают на составляющие, приводя их к оси вала. Для нахождения опасного сечения строят эпюры M_x , M_y и $M_{\text{кр}}$ (рис. 234, б). Установив по эпюрам опасное сечение 1—1, расположенное левее точки приложения силы P_2 , находят опасную точку в нем, для чего строят эпюры напряжений от всех силовых факторов (рис. 235, а, б, в, г, д, е): $\sigma_z(M_x)$; $\sigma_z(M_y)$; $\tau_{xz}(Q_x)$; $\tau_{yz}(Q_y)$; $\tau(M_{\text{кр}})$.

Эпюра $\tau(M_{\text{кр}})$ для длинной стороны контура имеет максимум, который обозначим $\tau_{\text{max}}(M_{\text{кр}})$. Наибольшую ординату эпюры $\tau(M_{\text{кр}})$ на короткой стороне обозначим $\tau'_{\text{max}}(M_{\text{кр}})$. Эти напряжения можно рассчитать по известным формулам кручения брусков прямоугольного сечения (см. раздел 9.2):

$$\tau_{\text{max}}(M_{\text{кр}}) = \tau_L = \tau_N = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha hb^2}; \quad \tau'_{\text{max}}(M_{\text{кр}}) = \tau_M = \tau_K = \gamma \tau_{\text{max}}(M_{\text{кр}}).$$

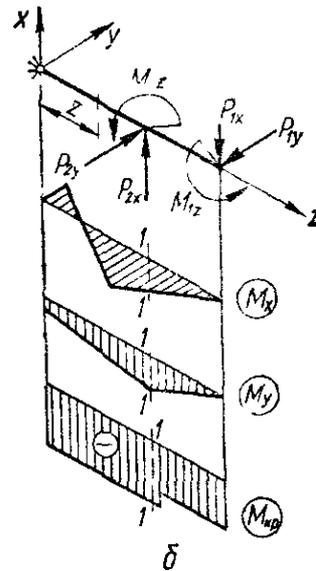
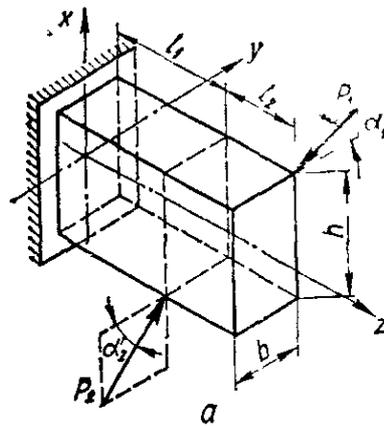


Рис. 234

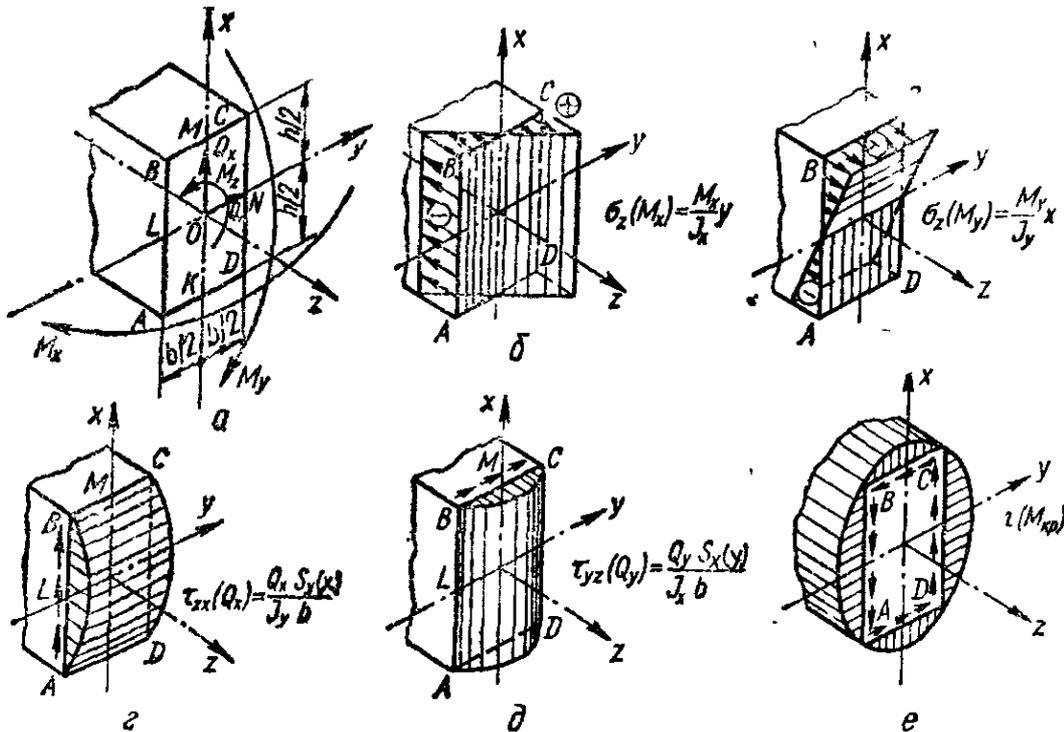


Рис. 235

В данном случае σ_{\max} от изгиба не совпадают с τ_{\max} от кручения, поэтому для выявления одной опасной точки приходится рассматривать сочетание напряжений в нескольких точках. Обычно бывает достаточно трех точек: одной из угловых (A или C), одной посередине длинной (L или N) и одной посередине короткой (M или K) сторон прямоугольника. Так, для точек C, L, K

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]; \quad (11.44)$$

$$\tau_L = \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2} \frac{Q_x}{bh}; \quad (11.45)$$

$$\tau_K = \frac{*M_{кр}}{\gamma \alpha hb^2} \pm \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh}. \quad (11.46)$$

Обычно касательные напряжения от поперечных сил Q_x и Q_y малы и их можно пренебречь.

Эквивалентные напряжения в точках L и K согласно IV теории прочности и теории Кулона — Мора равны:

в точке L

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (11.47)$$

$$\sigma_{\text{эквM}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_x}{W_x} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (11.48)$$

в точке K

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{*M_{кр}}{\gamma \alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (11.49)$$

$$\sigma_{\text{эквM}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{*M_{кр}}{\gamma \alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (11.50)$$

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках (C, L и K) по формулам (11.44), (11.47) — (11.50). При этом в каждом конкретном случае положение наиболее опасной точки зависит от соотношения моментов M_x, M_y и $M_{кр}$.

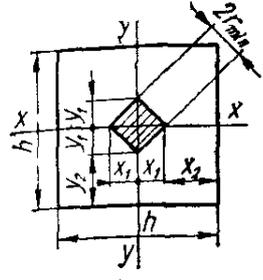
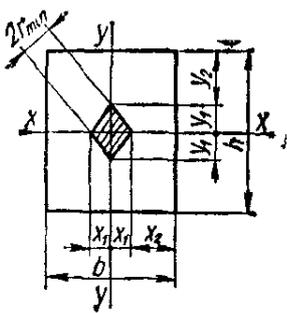
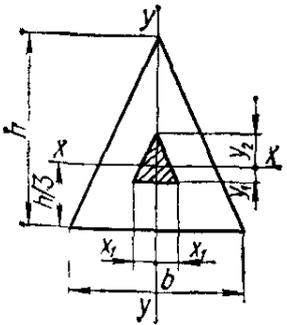
Общий случай действия сил на брус. Если в сечении стержня действуют осевая сила N_z , изгибающие моменты в главных плоскостях M_x, M_y , а также крутящий момент $M_{кр}$, то условие прочности, например по IV теории прочности, в точке K (рис. 235, а) будет

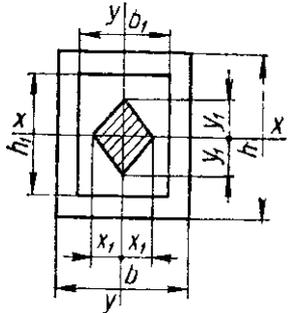
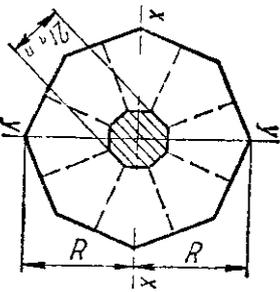
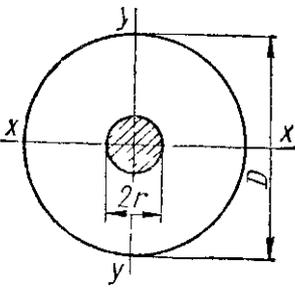
$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{*M_{кр}}{\gamma \alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma], \quad (11.51)$$

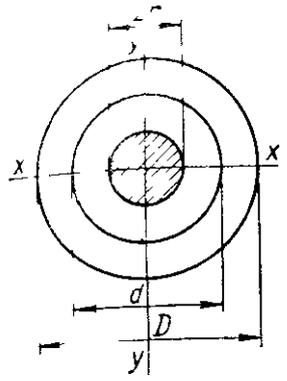
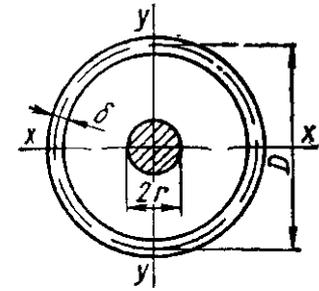
аналогично в точке L

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (11.52)$$

Таблица 28. Форма и размеры ядра сечения

Поперечное сечение; ядро сечения (заштриховано)	Размеры ядра сечения
<p>Квадрат</p> 	$x_1 = y_1 = h/6;$ $x_2 = y_2 = h/3;$ $r_{\min} = 0.0589h$
<p>Ядро—квадрат</p> <p>Прямоугольник</p> 	$x_1 = b/6; y_1 = h/6;$ $x_2 = b/3; y_2 = h/3;$ $r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$
<p>Ядро—ромб</p> <p>Равнобедренный треугольник</p>  <p>Ядро подобно поперечному сечению</p>	$x_1 = b/8; y_1 = h/12; y_2 = h/6$ <p>При $h = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ (равносторонний треугольник)</p> $x_1 = \frac{b}{8}; y_1 = \frac{\sqrt{3}}{24} b; y_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} b$

Поперечное сечение; ядро сечения (заштриховано)	Размеры ядра сечения
<p>Полый прямоугольник</p>  <p>Ядро—ромб</p>	$x_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{b(bh - b_1h_1)};$ $y_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{h(bh - b_1h_1)}$ <p>При $h = b$ и $h_1 = b_1$ (полый квадрат)</p> $r_{\min} = 0,0589h \left[1 + \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \right]$
<p>Восьмиугольник</p>  <p>Ядро—восьмиугольник</p>	$r_{\min} = 0,2256R$ <p>Если восьмиугольник полый (радиусы описанных окружностей наружной — R_2, внутренней — R_1, толщина стенки равна $0,924(R_2 - R_1)$), то</p> $r_{\min} = 0,2256R_2 \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]$
<p>Круг</p>  <p>Ядро—круг</p>	$r = D/8$

Поперечное сечение; ядро сечения (заштриховано)	Размеры ядра сечения
<p>Полный круг</p>  <p>Ядро—круг</p>	$r = \frac{D}{8} \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$
<p>Тонкостенная труба</p>  <p>Ядро—круг</p>	$r = D/4$

**ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ.
ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

12.1. Обобщенные силы и перемещения

Встречающиеся в задачах сопротивления материалов и строительной механики внешние нагрузки весьма разнообразны и обычно представляют собой группу сил. Работу группы постоянных сил можно представить в виде произведения двух величин

$$A = P\Delta_P, \quad (12.1)$$

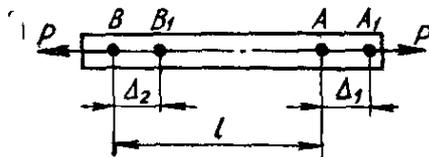


Рис. 236

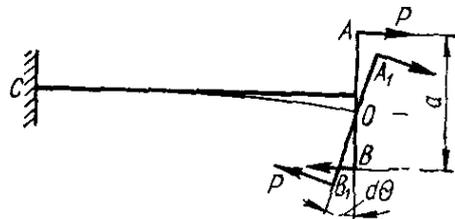


Рис. 237

в котором множитель P зависит только от сил группы и называется *обобщенной силой*, а Δ_P зависит от перемещений и называется *обобщенным перемещением*.

Таким образом, под обобщенной силой будем понимать любую нагрузку (сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, распределенные нагрузки), которая способна совершать работу на соответствующем обобщенном перемещении.

Так, рассматривая работу системы сил, действующих на стержень (рис. 236), получаем

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P(\Delta_1 - \Delta_2) = P\Delta_P,$$

где P — обобщенная сила; $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$ — обобщенное перемещение.

Работа системы сил (рис. 237)

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P(OA + OB) d\theta = Pad\theta = Md\theta.$$

Здесь обобщенной силой является момент $M = Pa$, а соответствующим обобщенным перемещением — угол поворота $d\theta$.

Для системы сил (рис. 238) обобщенной силой является момент M , а обобщенным перемещением — изменение угла α между элементами AB и CD , т. е.

$$\Delta_P = d\theta_1 + d\theta_2.$$

Обычно принято обозначать обобщенные перемещения (как линейные, так и угловые) буквами Δ и δ с соответствующими двойными индексами. Первый индекс указывает точку и направление перемещения,

второй — силовой фактор, вызвавший это перемещение. Например, Δ_{PP} означает перемещение точки приложения силы P по направлению ее действия, вызванное той же силой P (рис. 239, а), Δ_{MM} — перемещение точки приложения момента M в направлении действия момента, вызванное этим моментом (рис. 239, б).

Для обозначения полного перемещения, вызванного несколькими силовыми факторами, при Δ сохраняют только первый индекс. Так, полный прогиб и угол поворота конца балки (рис. 240) соответственно выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta_P &= \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \\ \Delta_M &= \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM}. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

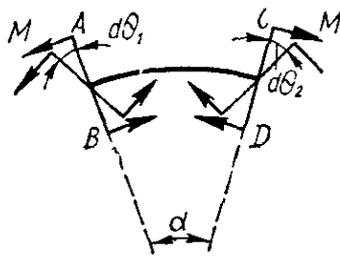


Рис. 238

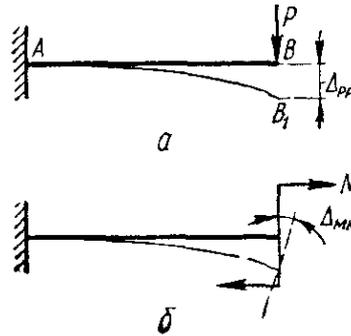


Рис. 239

Перемещения, вызванные единичной силой ($\bar{P} = 1$) или единичным моментом ($\bar{M} = 1$), принято обозначать буквой δ и называть *удельным перемещением*. Если единичная сила $P = 1$ вызвала перемещение δ_P , то полное перемещение Δ_P , вызванное силой P будет

$$\Delta_P = P\delta_P. \quad (12.3)$$

Отсюда размерность удельного перемещения

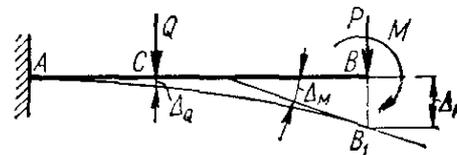


Рис. 240

$$[\delta] = \frac{\text{размерность обобщенного перемещения}}{\text{размерность обобщенной силы}}. \quad (12.4)$$

Если силовые факторы, действующие на систему, обозначить соответственно X_1, X_2, X_3 и т. д. (рис. 241), то перемещения по направлению каждого из них можно выразить формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}, \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

где

$$X_1\delta_{11} = \Delta_{11}; \quad X_2\delta_{12} = \Delta_{12}; \quad X_3\delta_{13} = \Delta_{13}; \quad \dots; \quad X_i\delta_{mi} = \Delta_{mi}.$$

Размерность перемещений δ_{mi} можно установить, умножив последнее равенство на X_m . При этом выражение $X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$ имеет размерность работы (Дж), откуда получим

$$[\delta_{mi}] = \frac{\text{Дж}}{[X_m][X_i]}.$$

Например, в формуле (12.5) размерность

$$[\delta_{13}] = \frac{\text{Дж}}{[X_1][X_3]} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{Н}}.$$

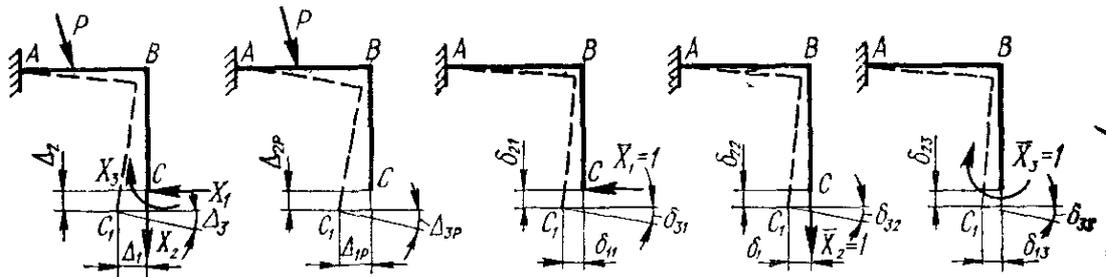


Рис. 241

12.2. Работа внешних сил

Из рассмотрения картины деформации упругого элемента (рис. 242, а) в пределах закона Гука, представленной в координатах: обобщенная сила P — обобщенное перемещение Δ (рис. 242, б), следует

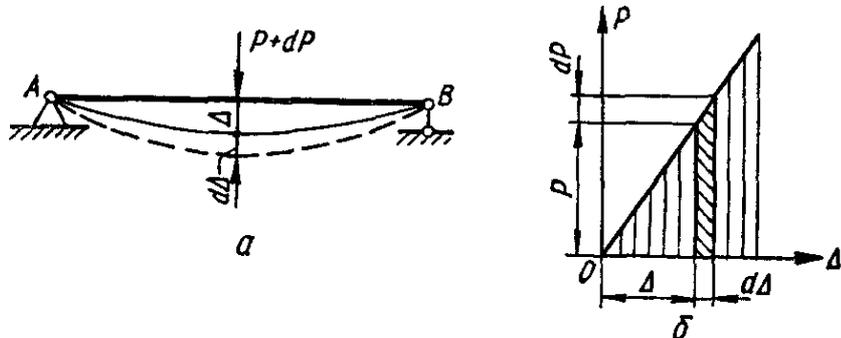


Рис. 242

что приращение силы dP вызывает бесконечно малое перемещение $d\Delta$. Работа внешних сил при этом, если пренебречь бесконечно малым второго порядка, равна

$$dA = (P + dP) d\Delta \approx Pd\Delta.$$

Полная работа, совершенная статически приложенной обобщенной силой P , вызвавшей обобщенное перемещение $\Delta = P\delta_{PP}$ (δ_{PP} — перемещение от $P = 1$), выражается формулой

$$A = \int_{\Delta} P d\Delta = \int_0^P P d(P\delta_{PP}) = \int_0^P P\delta_{PP} dP = \frac{\delta_{PP}P^2}{2};$$

$$A = \frac{\delta_{PP}P^2}{2} = \frac{\Delta^2}{2\delta_{PP}} = \frac{P\Delta}{2}. \quad (12.6)$$

Таким образом, действительная работа при статическом действии обобщенной силы на упругую систему равна половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение соответствующего перемещения.

При действии на упругую систему нескольких обобщенных сил P_1, P_2, \dots, P_i (рис. 243) работа деформации равна полусумме произведения окончательных значений обобщенных сил на соответствующие окончательные суммарные обобщенные перемещения

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \quad (12.7)$$

и не зависит от порядка нагружения системы.

12.3. Работа внутренних сил

При упругой деформации в элементах деформируемого тела развиваются внутренние силы — *силы упругого сопротивления* (рис. 244). Эти силы также совершают работу. Поскольку направления упругих

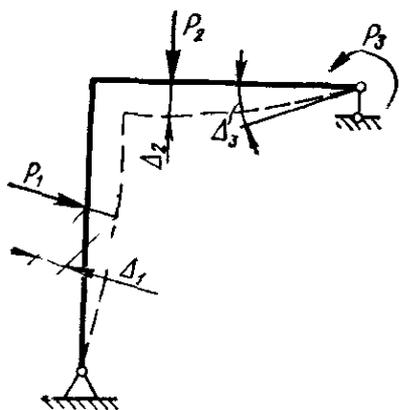


Рис. 243

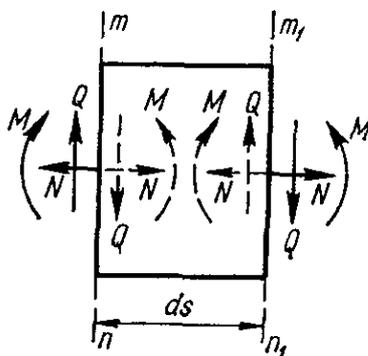


Рис. 244

сил (показаны штрихами) противоположны перемещениям (на которых они совершают работу), вызываемыми внешними силами (показаны сплошными линиями), то *работа внутренних сил всегда отрицательна*.

Работа внутренних сил N, Q и M , возникающих в элементе стержня длиной ds (рис. 244), совершаемая осевой силой N на перемещении

$$\Delta(ds) = \frac{Nds}{EF},$$

моментом M на перемещении

$$d\theta = \frac{Mds}{EJ}$$

и поперечной силой Q на перемещении

$$\gamma ds = k \frac{Q ds}{GF}, \quad (12.8)$$

может быть выражена формулой

$$dW = -\frac{M^2 ds}{2EJ} - \frac{N^2 ds}{2EF} - k \frac{Q^2 ds}{2GF}, \quad (12.9)$$

Интегрируя (12.9) в пределах каждого стержня и суммируя результаты по всем стержням системы, получаем формулу для работы внутренних сил в случае плоского изгиба:

$$W = - \sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum k \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (12.10)$$

Заметим, что выражение (12.8) получено из условия

$$\gamma ds = - \frac{dW_Q}{Q},$$

где

$$\begin{aligned} dW_Q &= - \int_F \frac{1}{2} \tau \gamma ds dF = - \int_F \frac{\tau^2 ds}{2G} dF = \\ &= - \frac{Q^2 ds}{2GJ_x^2} \int \frac{S_x^2}{b^2} dF = -k_y \frac{Q^2 ds}{2GF}; \end{aligned}$$

$$k_y = \frac{F}{J_x^2} \int \frac{S_x^2 dF}{b^2} \text{ — коэффициент, зависящий от формы сечения.}$$

В частности, для прямоугольного сечения $b \times h$

$$F = bh; J_x = \frac{bh^3}{12}; S_x = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right);$$

$$k_y = \frac{9}{2h} \int_0^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) dy = 1,2;$$

для круглого сечения $k = \frac{32}{27}$; для прокатных профилей приближенно

$$k = \frac{F}{F_c}, \text{ где } F_c \text{ — площадь стенки; } F \text{ — полная площадь сечения.}$$

Для чистого сдвига, когда

$$\tau = \frac{Q}{F},$$

$$dW_Q = - \frac{1}{2} \int_F \tau \gamma ds dF = - \frac{1}{2} \tau F \gamma ds = - \frac{Q \gamma ds}{2} = - \frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

В том случае, когда в стержне действует крутящий момент $M_{кр}$ при котором элементарный участок стержня закручивается на угол

$$d\theta = \frac{M_{кр} ds}{GJ_k},$$

где GJ_k — жесткость поперечного сечения стержня при кручении, элементарная работа внутренних сил за счет кручения равна

$$dW_{кр} = - \frac{1}{2} M_{кр} d\theta = - \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k},$$

а полная работа внутренних сил в стержне длиной l будет

$$W_{кр} = - \int_l \frac{1}{2} \frac{M_{кр}^2 ds}{GJ_k}. \quad (12.11)$$

В общем случае (рис. 245), когда в сечении стержня действуют все шесть силовых факторов ($N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z = M_{кр}$), работа внутренних сил (сил упругости) будет определяться по формуле

$$W = - \int_s \frac{M_x^2 ds}{2EJ_x} - \int_s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - \int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k} - \\ - \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} - \int_s k_x \frac{Q_x^2 ds}{2GF} - \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{2GF}. \quad (12.12)$$

Формула (12.12) справедлива и для стержней малой кривизны.

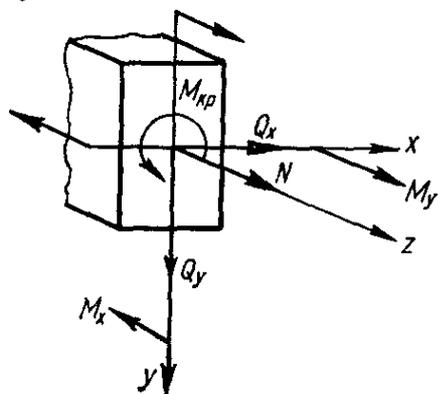


Рис. 245

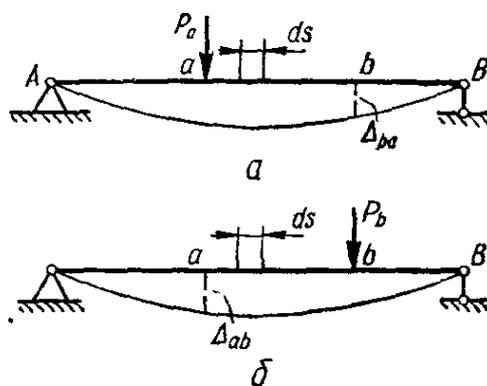


Рис. 246

12.4. Применение начала возможных перемещений к упругим системам

Применительно к упругим системам начало возможных перемещений можно сформулировать так: *если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точек системы равна нулю:*

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0, \quad (12.13)$$

где P_i — внешние силы; Δ_{im} — возможные перемещения точек приложения этих сил; $\sum P_i \Delta_{im}$ — работа внешних сил; W_{im} — работа внутренних сил.

В процессе совершения системой возможного перемещения величина и направление внешних и внутренних сил остаются неизменными. Поэтому при вычислении работ следует брать не половину, а полную величину произведения соответствующих сил и перемещений.

Учитывая малость деформаций и их линейную зависимость от нагрузок, в качестве *возможных перемещений* можно принимать *упругие перемещения, вызванные любым видом нагрузки и происходящие без нарушения связей*. Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях называется *возможной, или виртуальной работой*.

Рассмотрим два состояния плоской системы, находящейся в равновесии: состояние a , при котором система деформируется обобщенной силой P_a (рис. 246, a), и состоянии b системы, деформируемой силой P_b (рис. 246, b).

Перемещения состояния b могут рассматриваться как возможные для состояния a и, наоборот, перемещения состояния a являются возможными для состояния b .

Поэтому работа A_{ab} сил состояния a на перемещениях состояния b и работа A_{ba} сил состояния b на перемещениях состояния a соответственно равны

$$A_{ab} = P_a \Delta_{ab}; \quad (12.14)$$

$$A_{ba} = P_b \Delta_{ba}. \quad (12.15)$$

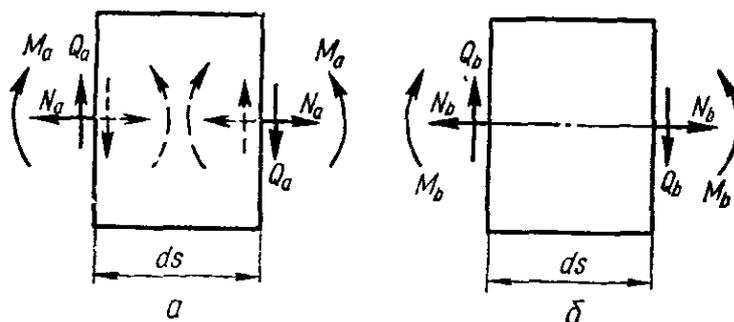


Рис. 247

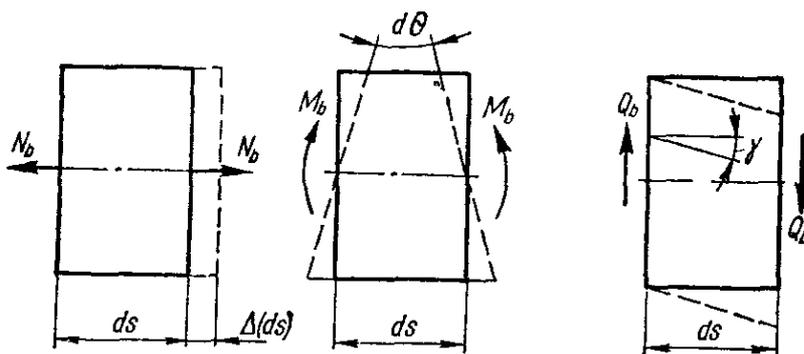


Рис. 248

Работа внутренних сил состояния a (рис. 247, a — штриховые линии) на перемещениях, вызванных нагрузкой состояния b (рис. 247, a, b), может быть найдена из рассмотрения работы внутренних сил при деформировании элемента стержня длиной ds (рис. 248). Ниже приведена схема определения работы внутренних сил.

Таким образом, полное значение возможной работы внутренних сил стержневой системы будет

$$W_{ab} = - \sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} - \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (12.16)$$

Подставляя (12.14) и (12.16) в (12.13), получаем общее выражение начала возможных перемещений для плоской упругой стержневой системы:

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[\sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF} \right] = 0 \quad (12.17)$$

Внешнее усилие, действующее на элемент (рис. 247, б)	Деформация элемента (рис. 248)	Работа внутренней силы состояния a на перемещениях состояния b	Работа внутренней силы состояния a в системе стержней
N_b	$(\Delta ds)_b = \frac{N_b ds}{EF}$	$-N_a (\Delta ds)_b = -\frac{N_a N_b ds}{EF}$	$-\sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF}$
Q_b	$(\gamma ds)_b = k \frac{Q_b ds}{GF}$	$-Q_a (\gamma ds)_b = -k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}$	$-\sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}$
M_b	$(d\theta)_b = \frac{M_b ds}{EJ}$	$-M_a (d\theta)_b = -\frac{M_a M_b ds}{EJ}$	$-\sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ}$

Если в качестве возможных принять действительные перемещения Δ_a , вызванные заданной нагрузкой P_a , то выражение (12.17) примет вид

$$\sum P_a \Delta_a - \left[\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0, \quad (12.18)$$

или

$$\frac{1}{2} \sum P_a \Delta_a - \frac{1}{2} \left[\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0. \quad (12.19)$$

Таким образом,

$$A + W = 0, \quad (12.20)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \sum P_a \Delta_a \quad (12.21)$$

представляет собой действительную работу внешних сил в процессе статической деформации, а

$$W = -\frac{1}{2} \left[\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] \quad (12.22)$$

представляет собой работу внутренних сил в процессе статической деформации.

Из уравнения (12.20) следует, что действительные значения работы внешних и внутренних сил равны по величине и противоположны по знаку.

12.5. Теоремы о взаимности работ и перемещений

Рассмотрим упругую систему в двух состояниях: состоянии 1 (рис. 249, а) и состоянии 2 (рис. 249, б). На основании принципа возможных перемещений получим для первого состояния

$$P_1 \Delta_{12} - \sum \left[\int \frac{M_1 M_2 ds}{EJ} + \int \frac{N_1 N_2 ds}{EF} + \int k \frac{Q_1 Q_2 ds}{GF} \right] = 0; \quad (12.23)$$

для второго состояния

$$P_2 \Delta_{21} - \sum \left[\int \frac{M_2 M_1 ds}{EJ} + \int \frac{N_2 N_1 ds}{EF} + \int k \frac{Q_2 Q_1 ds}{GF} \right] = 0. \quad (12.24)$$

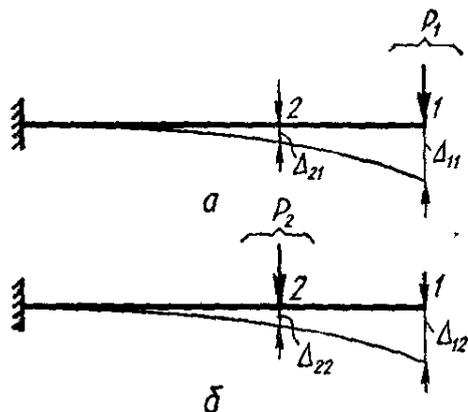


Рис. 249

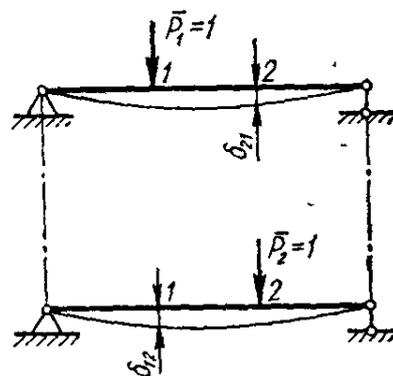


Рис. 250

Так как выражения для работ внутренних сил в обеих формулах одинаковы, то из (12.23) и (12.24) получим равенство

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (12.25)$$

Формула (12.25) выражает теорему о взаимности работ (теорему Бетти): возможная работа внешних (или внутренних) сил состояния 1 на перемещениях состояния 2 равна возможной работе внешних (или внутренних) сил состояния 2 на перемещениях состояния 1.

В частном случае, когда $\bar{P}_1 = 1$; $\bar{P}_2 = 1$ (рис. 250), на основании (12.15) получим соотношение

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (12.26)$$

выражающее теорему о взаимности перемещений (теорему Максвелла): перемещение точки приложения первой единичной силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй единичной силы по ее направлению, вызванному действием первой единичной силы.

12.6. Общие формулы для определения перемещений. Метод Мора

Общие формулы для определения перемещений легко получить, пользуясь началом возможных перемещений, если в качестве вспомогательного состояния принять систему, нагруженную в точке (перемещение которой нас интересует) соответствующей единичной обоб-

шенной силой $\bar{X}_i = 1$, которая должна совершать работу на возможном перемещении, каким является интересующее нас перемещение Δ_{iP} под действием внешних нагрузок.

Обозначив усилия, вызванные системой внешних сил $\sum P$ (рис. 251, а), через M_P, N_P, Q_P , а усилия, вызванные единичной силой $\bar{X}_i = 1$ (рис. 251, б), через $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$, начало возможных перемещений (12.17) для вспомогательного состояния (принимая в качестве возможного действительное перемещение) можно записать в виде

$$1 \cdot \Delta_{iP} = \sum \int_s \left[\frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \int_s k \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF} \right]. \quad (12.27)$$

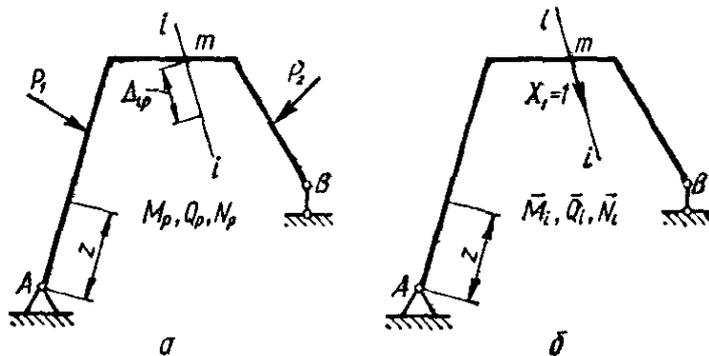


Рис. 251

Очевидно, в самом общем случае, при наличии всех шести компонентов внутренних усилий, формула (12.27) принимает вид

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \left[\frac{\bar{M}_i^x M_P^x}{EJ_x} + \frac{\bar{M}_i^y M_P^y}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_i^{кр} M_P^{кр}}{GJ_k} + \right. \\ \left. + k_x \frac{\bar{Q}_i^x Q_P^x}{GF} + k_y \frac{\bar{Q}_i^y Q_P^y}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right] ds. \quad (12.28)$$

Формула (12.28) является наиболее общей для определения перемещений в стержнях и называется *формулой Мора*. Она применима также для расчета стержней малой кривизны. Определение перемещений по формулам (12.27) и (12.28) называют *методом Мора*. При этом требуется вычисление входящих в указанные формулы так называемых интегралов Мора, для чего необходимо перемножить эпюры соответствующих усилий. Поэтому метод Мора иногда называют *методом перемножения эпюр*.

В большинстве случаев при определении перемещений в балках, рамах и арках по методу Мора в формуле (12.27) можно пренебречь влиянием продольных деформаций и сдвига, учитывая лишь перемещения, которые вызываются изгибом. Тогда формула (12.27) для плоской системы может быть записана следующим образом:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (12.29)$$

При пространственном нагружении формула Мора принимает

$$\Delta_{iP} = \sum_s \left[\int \frac{\bar{M}_i^x M_P^x ds}{EJ_x} + \int \frac{\bar{M}_i^y M_P^y ds}{EJ_y} + \int \frac{\bar{M}_i^{кр} M_P^{кр} ds}{GJ_{кр}} \right]. \quad (12.30)$$

При расчете шарнирных ферм, образованных из прямых стержней в формуле Мора сохраняется член, содержащий лишь продольную силу:

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} l. \quad (12.31)$$

Формула (12.31) называется *формулой Максвелла*.

Порядок определения перемещений по методу Мора.

1. Строится вспомогательная система и нагружается единичной нагрузкой в точке, где требуется определить перемещение. При определении линейных перемещений в заданном направлении прикладывается единичная сила, при определении угловых перемещений — единичный момент.

2. Для каждого участка системы выписываются выражения левых факторов в произвольном сечении заданной (M_P, N_P, Q_P) и вспомогательной ($\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$) систем.

3. Вычисляются по всем участкам системы интегралы Мора. При расчете плоских балок, рам и арок используется формула (12.30), при расчете ферм — формула (12.31).

4. Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это значит, что его направление совпадает с направлением единичной силы. Отрицательный знак указывает на то, что действительное перемещение противоположно направлению единичной силы.

В табл. 29 приведены значения интеграла Мора для наиболее распространенных случаев сочетания эпюр \bar{M}_i и M_P при изгибе.

12.7. Перемещения, вызванные изменением температуры

Предположим, что элемент стержня ds нагрет внизу до температуры t_H и наверху — до t_B (рис. 252, а, б), а также, что по высоте сечения температура изменяется по линейному закону. Тогда удлинения верхних и нижних волокон рассматриваемого элемента будут

$$\left. \begin{aligned} \Delta_B(ds) &= \alpha t_B ds; \\ \Delta_H(ds) &= \alpha t_H ds \end{aligned} \right\} \quad (12.32)$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Удлинение по оси неравномерно нагретого элемента и взаимный угол поворота его крайних сечений высотой h определяются соответственно формулами

$$(\Delta ds)_t = \alpha \frac{t_B + t_H}{2} ds; \quad (12.33)$$

$$(d\theta)_t = \frac{\Delta_H(ds) - \Delta_B(ds)}{h} = \alpha \left(\frac{t_H - t_B}{h} \right) ds. \quad (12.34)$$

Для определения перемещения любой точки K системы в любом направлении i — i , вызванного разностью температур, выбираем вспомо-

могательную систему и нагружаем ее соответствующей обобщенной единичной нагрузкой $\bar{X} = 1$ (рис 252, в) Приняв интересующее нас перемещение за возможное, запишем в соответствии с (12.27) формулу возможных перемещений применительно к рассмотренному случаю

$$\Delta_{it} = \sum \int_{\theta} \bar{M}_i (d\theta)_i + \sum \int_s \bar{N}_i (\Delta ds)_i \quad (12.35)$$

Учитывая (12.33) и (12.34), получаем

$$\Delta_{it} = \sum \int_i \bar{N}_i \alpha \frac{t_H + t_B}{2} ds + \sum \int_i \bar{M}_i \alpha \frac{t_H - t_B}{h} ds. \quad (12.36)$$

Формула (12.36) применима и для расчета брусьев малой кривизны.

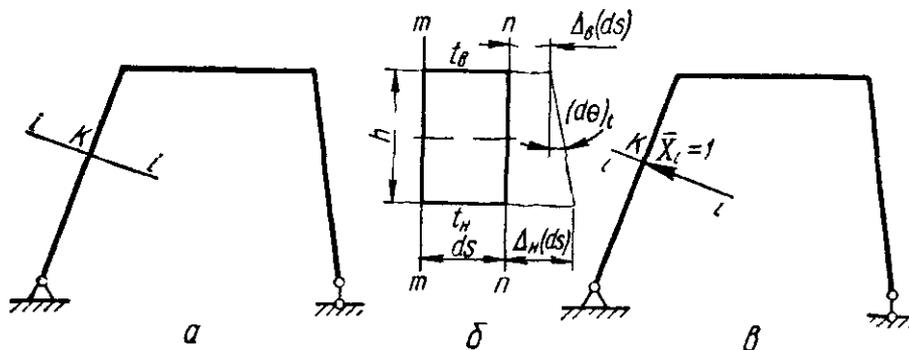


Рис. 252

В фермах, где действуют только продольные усилия, температурные перемещения определяются по формуле

$$\Delta_{it} = \sum \bar{N}_i \alpha t l, \quad (12.37)$$

где $t = \frac{t_H + t_B}{2}$ — температура на оси стержня.

12.8. Вычисление интеграла Мора

Интеграл Мора $\int \bar{M}_i M_P dz$ для случая, когда эпюра от заданной нагрузки имеет произвольное, а от единичной — прямолинейное очертание (рис 253), оказалось удобным определять графо-аналитическим способом, предложенным А. Н. Верещагиным.

Примем следующие обозначения Ω — площадь эпюры M_P от внешней нагрузки; C — центр тяжести эпюры, \bar{M}_C — ордината эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры M_P . Очевидно,

$$M_P dz = d\Omega$$

(дифференциал площади эпюры),

$$\bar{M}_i = z \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\int_i \bar{M}_i M_P dz = \operatorname{tg} \alpha \int_i z d\Omega,$$

$$\int_I z d\Omega = z_C \Omega; \quad \text{tg } \alpha \cdot z_C = \bar{M}_C;$$

$$\int_I \bar{M}_i M_P dz = \Omega \bar{M}_C.$$

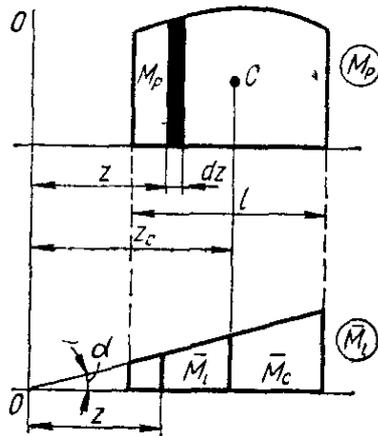


Рис. 253

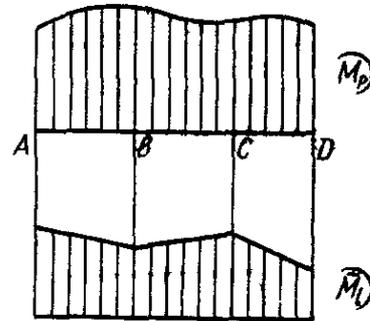


Рис. 254

Общая формула перемещений для систем, состоящих из прямолинейных элементов

$$\Delta_{IP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P dz}{EJ},$$

запишется в виде

$$\Delta_{IP} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_C}{EJ}. \quad (12.36)$$

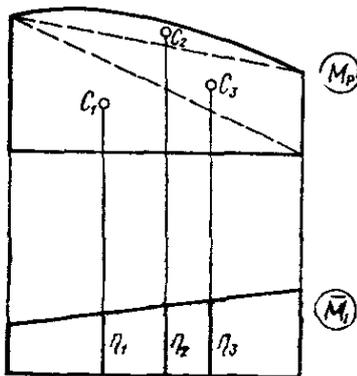


Рис. 255

Это и есть формула Верещагина. Вычисление по этой формуле производится по участкам, на каждом из которых прямолинейная эпюра должна быть без переломов (рис. 254).

В тех случаях, когда обе эпюры \bar{M}_i и M_P прямолинейны, можно умножить площадь одной из них на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой. Сложная эпюра M_P может быть разбита на простые фигуры (рис. 255), для каждой из которых легко определить координату центра тяжести. При этом площадь каждой фигуры умножают на

ординату единичной эпюры под ее центром тяжести, обозначаемую через η_k (вместо M_{C_k}). Формула Верещагина в этом случае примет вид

$$\Delta_{IP} = \sum_{k=1, 2, 3, \dots} \frac{\Omega_k \eta_k}{EJ}. \quad (12.39)$$

В табл. 30 приведены площади и координаты центров тяжести некоторых элементарных фигур.

При учете кручения в соответствующий член общей формулы (12.38) будет входить жесткость на кручение GJ_k . Если эпюры M_P и \bar{M}_i противоположны по знаку, то результат их умножения имеет знак «минус».

Общая формула Верещагина применима и при расчете стержней переменного сечения. В этом случае интеграл Мора записывается в виде

$$\Delta_{iP} = \sum_i \int \frac{\bar{M}_i M_P dz}{EJ(z)} = \sum_i \int \frac{M_P \frac{J_0}{J(z)}}{EJ_0} \bar{M}_i dz,$$

где $J(z)$ — момент инерции площади произвольного сечения;
 J_0 — момент инерции определенного (характерного) сечения. Назовем величину

$$M_{пр} = M_P \frac{J_0}{J(z)}$$

приведенным изгибающим моментом в текущем сечении. Теперь интеграл Мора может быть записан в виде

$$\Delta_{iP} = \sum_i \int \frac{\bar{M}_i M_{пр}}{EJ_0} dz,$$

а формула Верещагина —

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\Omega_{пр} \bar{M}_C}{EJ_0}; \quad (12.40)$$

где $\Omega_{пр}$ — площадь эпюры $M_{пр}$; \bar{M}_C — ордината единичной эпюры под центром тяжести приведенной эпюры.

В случае, если эпюры M_P очерчены по квадратной параболе или прямой, а \bar{M}_i — по прямой, эффективно применение формулы Симпсона — Корноухова

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{l}{6EJ} (\bar{M}_i^{лв} M_P^{лв} + 4\bar{M}_i^{ср} M_P^{ср} + \bar{M}_i^{пр} M_P^{пр}),$$

где буквами «лв», «ср», «пр» обозначены соответственно крайние левые, средние и крайние правые ординаты перемножаемых эпюр.

12.9. Потенциальная энергия деформации

В соответствии с законом сохранения энергии работа внешних сил при деформировании упругой системы не пропадает, а трансформируется в потенциальную энергию деформации, которая может проявиться в виде работы, совершаемой внутренними силами при разгрузке. Так, при частичной разгрузке (рис. 256) балка, несколько выпрямляясь и приподнимая оставшуюся часть груза, совершает определенную работу.

Пренебрегая при статическом нагружении кинетической энергией, а также потерями энергии на внутреннее трение, изменение температуры, магнитные и электрические явления, имеющие место при деформации, можно утверждать, что уменьшение потенциальной энергии

груза равно изменению потенциальной энергии деформации, накопленной упругой конструкцией, т. е.

$$U = U_P,$$

где U — приращение потенциальной энергии деформации; U_P — уменьшение потенциальной энергии груза.

Уменьшение потенциальной энергии груза численно равно действительной работе внешних сил при нагружении тела. Следовательно, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил при нагружении системы или работе внутренних сил, совершенной в процессе разгрузки. Согласно (12.12) потенциальная энергия деформации в общем случае может быть определена формулой

$$U = A = \frac{1}{2} \int_s \frac{M_x^2 ds}{EJ_x} + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_y^2 ds}{EJ_y} + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{GJ_{кр}} + \frac{1}{2} \int_s \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2} \int_s k_x \frac{Q_x^2 ds}{GF} + \frac{1}{2} \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{GF}. \quad (12.41)$$

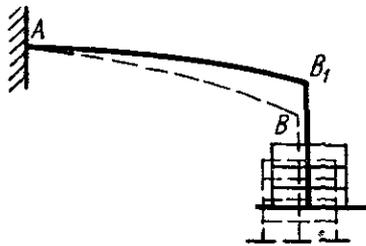


Рис. 256

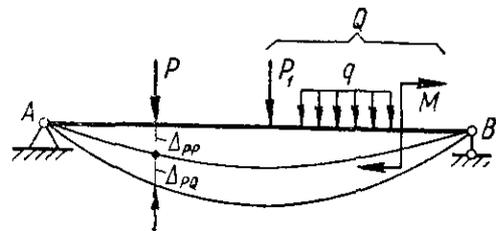


Рис. 257

Поскольку потенциальная энергия деформации является квадратичной функцией обобщенных сил (или обобщенных перемещений), она всегда положительна.

12.10. Теорема Кастильяно. Теорема Лагранжа

Рассмотрим упругую систему (рис. 257), статически нагруженную произвольной нагрузкой Q и некоторой обобщенной силой P . Перемещение точки приложения силы P по ее направлению и от ее действия будет Δ_{PP} , а перемещение той же точки под действием сил Q будет Δ_{PQ} . При полном перемещении рассматриваемой точки, равном $\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ}$, потенциальная энергия упругой системы выразится формулой

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ},$$

где U_{QQ} — энергия, накопленная в результате деформации системы только силами Q и численно равная работе сил Q на вызванных ими перемещениях.

Так как $\Delta_{PP} = P \delta_{PP}$, то приведенную выше формулу можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} P^2 \delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}. \quad (12.42)$$

Продифференцировав это выражение по силе P , получим

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_P.$$

Таким образом,

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (12.43)$$

Перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии по этой силе. В этом состоит теорема Кастильяно.

Заметим, что вторая производная от потенциальной энергии по силе (обобщенной) согласно формуле (12.42) равна

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial P} = \delta_{PP} \quad (12.44)$$

и имеет существенно положительную величину.

Для плоской стержневой системы формула (12.41) примет вид

$$U = \int_s \frac{M^2(s) ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2(s) ds}{2EF} + \int_s k \frac{Q^2(s) ds}{2GF}, \quad (12.45)$$

где $M(s)$, $N(s)$, $Q(s)$ — усилия в сечении стержня.

Применяя правило дифференцирования по параметру, находим

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \frac{\partial M(s)}{\partial P} + \int_s \frac{N(s) ds}{EF} \frac{\partial N(s)}{\partial P} + \int_s k \frac{Q(s) ds}{GF} \frac{\partial Q(s)}{\partial P} \quad (12.46)$$

или, пренебрегая влиянием на величину перемещений осевых и поперечных сил, получаем

$$\Delta_P = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \frac{\partial M(s)}{\partial P}. \quad (12.47)$$

Если при определении перемещений точки по условию задачи нет соответствующей обобщенной силы, ее вводят в виде фиктивной. Составленное выражение для потенциальной энергии деформации дифференцируется по этой силе, после чего она приравнивается нулю.

Если представить потенциальную энергию деформации как квадратичную функцию независимых перемещений $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, то оказывается, что частная производная от потенциальной энергии по любому перемещению, равна силе, действующей по направлению перемещения, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \quad (12.48)$$

В этом состоит теорема Лагранжа.

12.11. Теорема о минимуме потенциальной энергии

Заменим в статически неопределимой системе (рис. 258, а) лишние связи соответствующими реакциями X_1, X_2, X_3, \dots (рис. 258, б), которые будем рассматривать как независимые друг от друга внешние нагрузки, и вычислим по методу Кастильяно соответствующие перемещения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$.

Зная заранее, что указанные перемещения равны нулю, можно написать

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \dots,$$

где $U = U(X_1, X_2, X_3, \dots, P)$ — полная потенциальная энергия деформации системы.

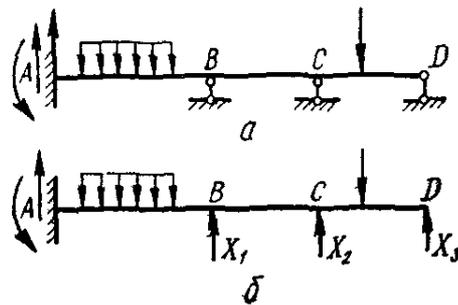


Рис. 258

Легко убедиться, что равенства

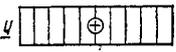
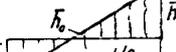
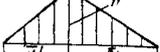
$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \dots \quad (12.44)$$

выражают условия экстремума функции U . Нетрудно видеть, что этот экстремум является минимумом. Доказательством последнего служит положительный знак вторых производных, которые согласно (12.44) выражают перемещения $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}, \dots$, являющиеся существенно положительными величинами:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33}.$$

Таким образом, в статически неопределимых системах лишние известные усилия принимают такие значения, при которых потенциальная энергия деформации имеет наименьшее значение (теорема Лагранжа). Эта теорема известна также как теорема о наименьшей работе, так как вместо потенциальной энергии можно говорить о численности, равной ей работе внешних сил. Из нее следует, что при добавлении в упругую систему каких-либо связей потенциальная энергия системы всегда уменьшается.

Таблица 29. Выражения интеграла Мора $\int \bar{M}_i M_p dz$ для различных сочетаний эпюр \bar{M}_i и M_p (l — основание площади эпюры)

Эпюра \bar{M}_i Эпюра M_p					
1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h (\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} h (2\bar{h}_2 - \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} (1 + \bar{\alpha}) l$
	$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} h (\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} (1 + \bar{\beta}) l$
	$\frac{1}{2} (h_1 + h_2) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (h_1 + 2h_2) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [h_1 (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) + h_2 (2\bar{h}_2 + \bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [h_1 (\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1) + h_2 (2\bar{h}_2 - \bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [(1 + \bar{\beta}) h_1 + (1 + \bar{\alpha}) h_2] \bar{h} l$

1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (1 + \alpha) h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [(1 + \beta) \bar{h}_1 + (1 + \alpha) \bar{h}_2] h l$	$\frac{1}{6} [(1 + \alpha) \bar{h}_2 - (1 + \beta) \bar{h}_1] h l$	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$ при $\alpha = \bar{\alpha}$
	$\frac{1}{2} (h_2 - h_1) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (2h_2 - h_1) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [h_2 (2\bar{h}_2 + \bar{h}_1) - h_1 (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2)] l$	$\frac{1}{6} [h_2 (2\bar{h}_2 - \bar{h}_1) - h_1 (\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [(1 + \bar{\alpha}) h_2 - (1 + \bar{\beta}) h_1] \bar{h} l$
	$h \bar{h} \beta l$	$\frac{1}{2} h \bar{h} \beta l$	$\frac{1}{2} h (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \beta l$	$\frac{1}{2} h (\bar{h}_2 - \bar{h}_1) \beta l$	$\frac{h \bar{h}}{6 \bar{\beta}} \left(3 - 3\alpha - \frac{\alpha^2}{\alpha} \right) l$ при $\bar{\alpha} < \alpha$ $\frac{h \bar{h}}{6} \left(3 - \frac{\alpha^2}{\alpha \bar{\beta}} \right) l$ при $\bar{\alpha} > \alpha$
	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{4} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h (3\bar{h}_2 - \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} (1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) l$

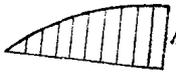
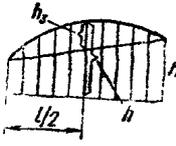
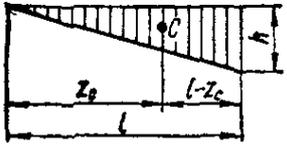
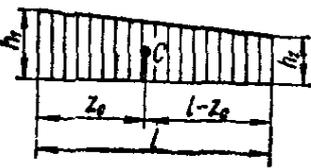
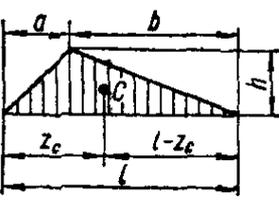
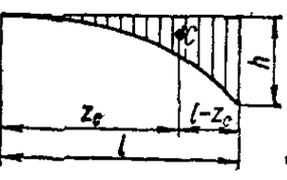
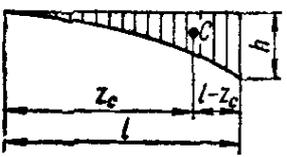
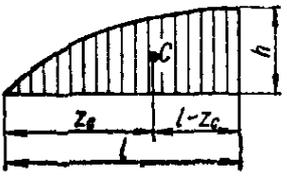
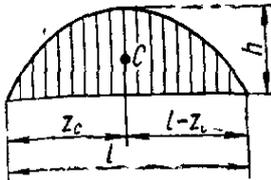
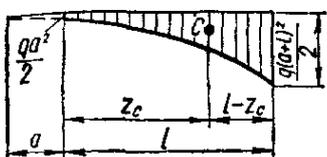
	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (3\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h (\bar{h}_2 - 3\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} (1 + \bar{\beta} + \bar{\beta}^2) l$
	$\frac{2}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{3} h (\bar{h}_2 - \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{3} (1 + \bar{\alpha} \bar{\beta}) h \bar{h} l$
	$\frac{2}{3} h \bar{h} l$	$\frac{5}{12} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (3\bar{h}_1 + 5\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h (5\bar{h}_2 - 3\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} (5 - \bar{\beta} - \bar{\beta}^2) h \bar{h} l$
	$\frac{2}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{4} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (5\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h (3\bar{h}_2 - 5\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} (5 - \bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2) h \bar{h} l$
	$\frac{1}{6} \bar{h} (h_1 + h_2 + h_3) l$	$\frac{1}{6} \bar{h} (h_2 + 2h) l$	$\frac{1}{6} (\bar{h}_1 h_1 + 4\bar{h} \bar{h}_0 + h_2 \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} (h_2 \bar{h}_2 + 4\bar{h} \bar{h}_0 - h_1 \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{6} [h_1 (1 + \bar{\beta}) + h_2 (1 + \bar{\alpha}) + 2h_3 (1 + \bar{\alpha} \bar{\beta})] \bar{h} l$

Таблица 30. Площади и координаты центров тяжести некоторых элементарных фигур

Эпюра M	Площадь S	Координаты центра тяжести	
		z_C	$l - z_C$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{(h_1 + h_2)}{2} l$	$\frac{h_1 + 2h_2}{3(h_1 + h_2)} l$	$\frac{h_2 + 2h_1}{3(h_1 + h_2)} l$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{a + l}{3}$	$\frac{b + l}{3}$
Квадратичная парабола 	$\frac{lh}{3}$	$\frac{3}{4}l$	$\frac{1}{4}l$
Кубическая парабола 	$\frac{lh}{4}$	$\frac{4}{5}l$	$\frac{1}{5}l$
Половина квадратичной параболы 	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

Эпюра M	Площадь Ω	Координаты центра тяжести	
		z_C	$l - z_C$
<p>Квадратичная парабола</p> 	$\frac{2}{3} lh$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{1}{2} l$
<p>Квадратичная парабола</p> 	$\frac{ql}{6} [l^2 + 3a(a+l)]$	$z_C = \frac{l}{4} \frac{6a^2l + 8al^2 + 3l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3};$	$l - z_C = \frac{l}{4} \frac{6a^2l + 4al^2 + l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3}$

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

13.1. Основные этапы расчета статически неопределимых систем

Статически неопределимыми называются системы, силовые факторы в элементах которых не могут быть определены только из уравнений равновесия твердого тела. В таких системах имеется больше связей, чем это необходимо для равновесия. Таким образом, часть связей в этом смысле является как бы лишней, а соответствующие усилия

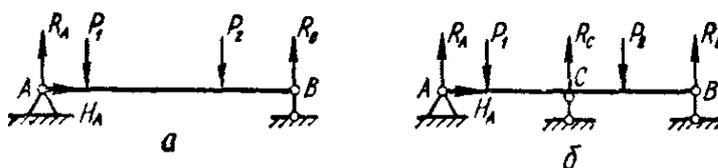


Рис. 259

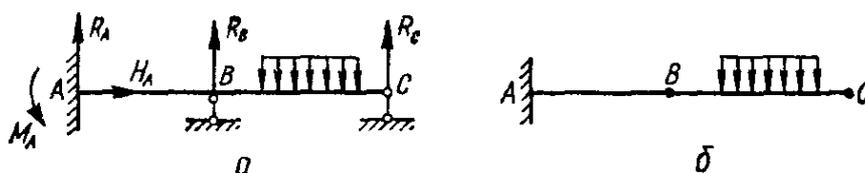


Рис. 260

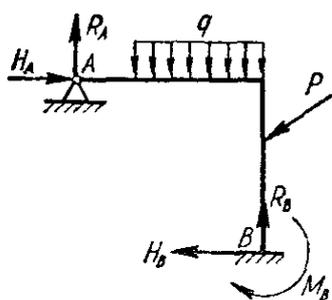


Рис. 261

являются лишними неизвестными. По числу лишних связей или лишних неизвестных усилий устанавливают степень статической неопределимости системы.

На рис. 259, а приведена статически определимая система, а на рис. 259, б — одна из статически неопределимых. На рис. 260, а показана дважды статически неопределимая балка, полученная из статически определимой системы (рис. 260, б) в результате установления двух шарнирных опор в точках В и С. На рис. 261 показана дважды статически неопределимая плоская рама.

Статическая неопределимость может быть результатом не только введения дополнительных связей, но также и условием образования системы. Примером может служить рама (рис. 262, а), в которой реакции опор R_A , H_A , R_B легко определяются из условий равновесия, но последние не позволяют найти все силовые факторы в ее элементах. Разрезав раму на две части и рассматривая равновесие одной из них (рис. 262, б), устанавливаем, что эта рама представляет собой систему шесть раз статически неопределимую, так как каждый замкнутый (без шарнирных) контур является три раза статически неопределимым.

Установка шарнира на оси стержня (рис. 263, а) (одиночный шарнир) обращает в нуль изгибающий момент в этом сечении и, следовательно, снижает степень статической неопределимости на единицу. Шарнир, включенный в узел (общий шарнир), где сходятся n стержней (см., например, рис. 263, б, в), снижает степень статической неопределимости на $n - 1$, так как заменяет собой столько же одиночных шарниров (рис. 263, г). Степень статической неопределимости плоских систем (s) может быть определена по формуле

$$s = 3k - u, \quad (13.1)$$

где k — число замкнутых контуров, u — число шарниров в пересчете на одиночные. Основание (земля) рассматривается как стержень бесконечной жесткости ($EJ = \infty$).

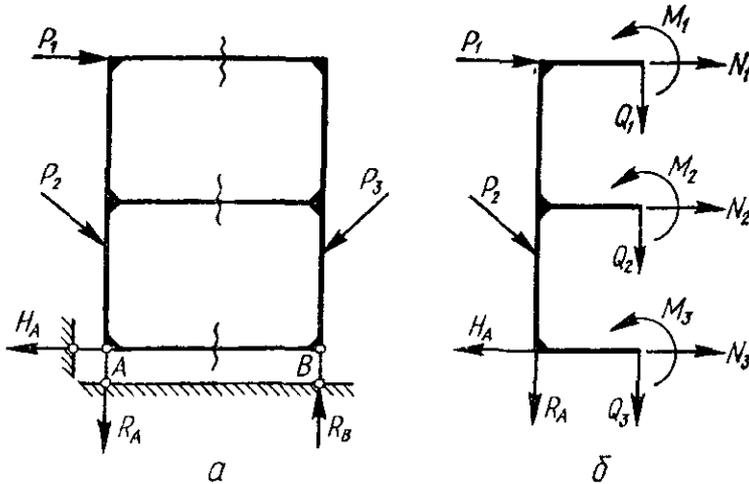


Рис. 262

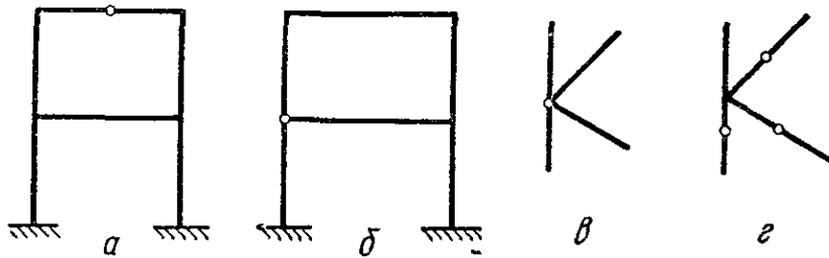


Рис. 263

При расчете статически неопределимых систем можно в качестве неизвестных принимать как силы или силовые факторы, так и перемещения или деформационные факторы. В первом случае имеем так называемый *метод сил*, во втором — *метод перемещений**.

Расчет по методу сил проводят в такой последовательности.

1. Устанавливают степень статической неопределимости.
2. Путем удаления лишних связей заменяют исходную систему статически определимой, называемой *основной системой*. Таких систем можно построить несколько, соблюдая при этом условие их геометрической неизменяемости.
3. Основную систему нагружают заданными внешними силами и лишними неизвестными усилиями, заменяющими действие удаленных связей, в результате чего получают *эквивалентную систему*.

* Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений / Под ред. А. А. Умаиского. — М.: Госстройиздат, 1960. — 1040 с.

4. Для обеспечения эквивалентности исходной и основной системы неизвестные усилия должны быть подобраны так, чтобы деформация основной системы не отличалась от деформации исходной статически неопределимой системы. Для этого перемещения точек приложения лишних неизвестных по направлению их действия приравняют к нулю. Из полученных таким образом уравнений определяют значения лишних неизвестных усилий. Определение перемещений соответствующих точек можно производить любым способом, однако лучше использовать при этом наиболее общий метод Мора.

5. После установления значений лишних неизвестных усилий производят определение реакций и построение эпюр внутренних усилий, подбор сечений и проверку прочности обычным способом.

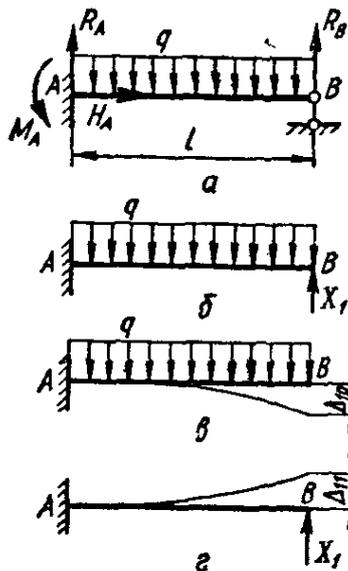


Рис. 264

Рассмотрим пример расчета статически неопределимой системы (рис. 264). Приняв реакцию опоры B за лишнее неизвестное X_1 , получим основную систему в виде консоли, нагружив которую распределенной нагрузкой q и ус

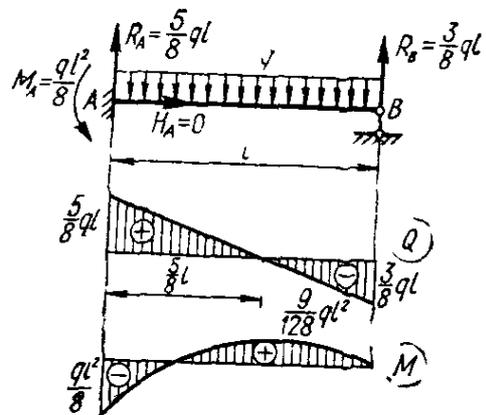


Рис. 265

лием X_1 , приходим к эквивалентной системе (рис. 264, б). Дополнительным уравнением перемещений будет равенство нулю прогиба в точке

$$\Delta_1 = 0. \quad (13.1)$$

Полный прогиб Δ_1 можно представить как сумму прогибов от внешней нагрузки (рис. 264, в)

$$\Delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EJ} \quad (13.2)$$

и от неизвестной реакции X_1 (рис. 264, г)

$$\Delta_{11} = \frac{X_1 l^3}{3EJ}. \quad (13.3)$$

Уравнение (13.2) можем записать в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0, \quad (13.4)$$

или

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{X_1 l^3}{3EJ} = 0.$$

Отсюда находим искомую реакцию

$$X_1 = \frac{3}{8} ql. \quad (13.6)$$

Из уравнения статики легко найти остальные реакции, а затем обычным способом построить эпюры Q и M , как это показано на рис. 265.

В табл. 31 приведены расчетные формулы для определения опорных реакций, поперечной силы Q , изгибающего момента M и перемещений для основных случаев нагружения статически неопределимых однопролетных балок, а в табл. 32 — для случаев смещения опор и неравномерного нагрева балок.

13.2. Канонические уравнения метода сил

Дополнительные уравнения перемещений, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных, удобно составлять в так называемой *канонической форме*, т. е. по определенной закономерности. Покажем это на примере решения простейшей статически неопределимой системы (рис. 266, а).

Выберем в качестве основной системы консоль в качестве эквивалентной системы получим консоль, нагруженную внешней силой P и лишней неизвестной X_1 (рис. 266, б). Дополнительное уравнение перемещений, выражающее равенство нулю перемещения точки B от сил P и X_1 , будет

$$\Delta_1 = \Delta(P, X_1) = 0. \quad (13.7)$$

На основании принципа независимости действия сил запишем

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11}, \quad (13.8)$$

где Δ_{1P} — перемещение от заданной нагрузки P (рис. 266, в); Δ_{11} — перемещение от силы X_1 . Обозначив перемещение от $X_1 = 1$ по ее направлению через δ_{11} (рис. 266, д), получим

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1.$$

Уравнение перемещений (13.8) примет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13.9)$$

Это каноническая форма уравнения перемещений для один раз статически неопределимой системы. Из формулы (13.9) имеем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (13.10)$$

Для системы, имеющей две лишние связи (рис. 267), канонические уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

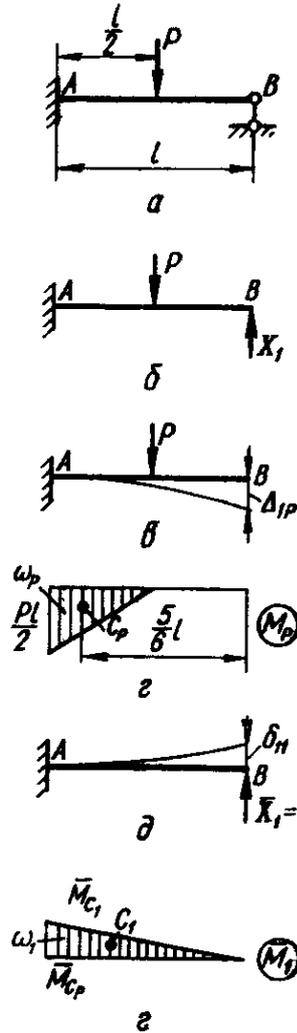
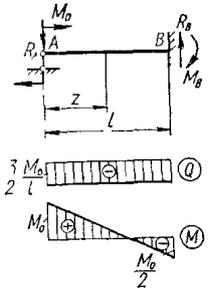
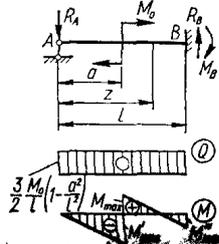


Рис. 266

Таблица 31. Опорные реакции, поперечные силы, изгибающие моменты и перемещения в статически неопределимых однопролетных балках

Схема нагружения балки Эпюры Q и M	Опорные реакции, поперечная сила Q , изгибающий момент M , координата опасного сечения z_0 , максимальный момент M_{\max}	Уравнения упругой линии $w(z)$, угол поворота θ концевого сечения, максимальный прогиб f (при постоянном EJ)
	$R_A = R_B = \frac{3M_0}{2l}, \quad M_B = \frac{1}{2} M_0$ $0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{3M_0}{2l}; \quad M = M_0 \left(1 - \frac{3z}{2l}\right)$ $z_0 = 0 \quad M_{\max} = M_0$	$w(z) = -\frac{M_0 l^2}{4EJ} \left(\frac{z^3}{l^3} - 2 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z}{l} \right)$ $f = -\frac{M_0 l^2}{27EJ} \quad \text{при } z = l/3$ $\theta = -\frac{M_0 l}{4EJ} \quad \text{при } z = 0$
	$R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{M_0}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right);$ $M_B = \frac{M_0}{2} \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right)$ $0 \leq z \leq l \quad Q = -\frac{3}{2} \frac{M_0}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$ $M_{\max} = \frac{3}{2} \frac{M_0}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$	$0 \leq z \leq a$ $w(z) = -\frac{M_0 l^2}{EJ} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \times \right.$ $\times \left(\frac{z^3}{l^3} - 3 \frac{z}{l} \right) + \left. \left(1 - \frac{a}{l}\right) \frac{z}{l} \right]$ $a \leq z \leq l$

$$a < z < l \quad M = M_0 \left[1 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} \right]$$

$$z_0 = a \quad M_{\max} = -\frac{3}{2} M_0 \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$M_{\max}'' = M_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \right]$$

$$z_0'' = l \quad M_{\max}''' = -\frac{1}{2} M_0 \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$$

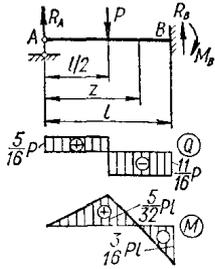
$$\text{при } a < 0,275l \quad |M'_{\max}| < |M_{\max}''|$$

$$\text{при } a = 0,577l \quad M_{\max}''' = 0$$

$$w(z) = -\frac{M_0 l^2}{EJ} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \left(\frac{z^3}{l^3} - 3 \frac{z}{l} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{l^2} + \frac{a^2}{l^2} \right) + \frac{z}{l} \right]$$

$$\theta = \frac{M_0 l}{EJ} \left(\frac{a}{l} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$\text{при } z = 0$$



$$R_A = \frac{5}{16} P; \quad R_B = \frac{11}{16} P; \quad M_B = \frac{3}{16} Pl$$

$$0 \leq z \leq l/2$$

$$Q = \frac{5}{16} P; \quad M = \frac{5}{16} Pz$$

$$l/2 \leq z \leq l$$

$$Q = -\frac{11}{16} P; \quad M = P \left(\frac{l}{2} - \frac{11}{16} z \right)$$

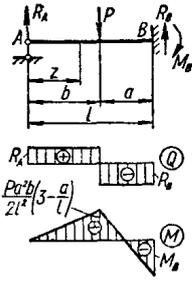
$$0 \leq z \leq l/2$$

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{96EJ} \left(3 \frac{z}{l} - 5 \frac{z^3}{l^3} \right)$$

$$l/2 \leq z \leq l$$

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{96EJ} \left[3 \frac{z}{l} - 5 \frac{z^3}{l^3} + \right.$$

$$\left. + 16 \frac{(z-l/2)^3}{l^3} \right] = -\frac{Pl^3}{96EJ} \left(15 \frac{z}{l} - 24 \frac{z^2}{l^2} + \right.$$

Схема нагружения балки. Эпюры Q и M	Опорные реакции, поперечная сила Q, изгибающий момент M, координата опасного сечения z ₀ , максимальный момент M _{max}	Уравнения упругой линии w(z), угол поворота θ конечного сечения, максимальный прогиб f (при постоянном EJ)
	$z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{3}{16} Pl$	$+ 11 \frac{z^3}{l^3} - 2)$ $f = -0,0093 \frac{Pl^3}{EJ} \text{ при } z = 0,447l$ $\theta = -\frac{Pl^2}{32EJ} \text{ при } z = 0$ $w = -\frac{7Pl^3}{768EJ} \text{ при } z = l/2$
	$R_A = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right); \quad R_B = \frac{P}{2} \frac{b}{l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right);$ $M_B = \frac{Pab}{2l^2} (l + b)$ $0 \leq z \leq b$ $Q = \frac{P}{2} \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right); \quad M = \frac{P}{2} \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right) z$ $b < z \leq l$ $Q = P \left[\frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right) - 1 \right];$ $M = Pa \left[\frac{az}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right) - \frac{z-b}{l} \right]$	$0 \leq z \leq b$ $w(z) = -\frac{Pl^2}{6EJ} \left[\frac{R_A}{P} \left(3 \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - 3 \frac{a^2 z}{l^3} \right]$ $w = -\frac{Pa^3 b^2 (3a + 4b)}{12l^3 EJ} \text{ при } z = b$ $b < z \leq l$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[\frac{R_A}{P} \left(3 \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - 3 \frac{a^2 z}{l^3} + \left(\frac{z}{l} - \frac{b}{l}\right)^3 \right]$

$$z'_0 = b \quad M'_{\max} = \frac{Pa^2b}{2l^2} \left(3 - \frac{a}{l} \right)$$

при $a = 0,634l$ наибольшее значение
 $M'_{\max} = 0,174Pl$

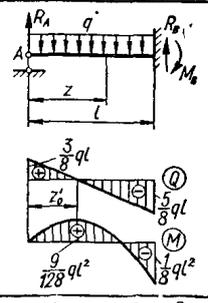
$$z''_0 = l \quad M''_{\max} = -\frac{Pab}{2l^2} (l + b)$$

при $a = 0,423l$ наибольшее значение
 $M''_{\max} = -0,193Pl$

при $a = 0,586l$ наибольший прогиб
 при $z = b$
 $f = -0,0098 \frac{Pl^3}{EJ}$

$$\theta = \frac{Pl^2}{4EJ} \left(\frac{a^3}{l^3} - \frac{a^2}{l^2} \right)$$

при $z = 0$



$$R_A = \frac{3}{8} ql; \quad R_B = \frac{5}{8} ql; \quad M_B = \frac{1}{8} ql$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$Q = ql \left(\frac{3}{8} - \frac{z}{l} \right); \quad M = qlz \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{l} \right)$$

$$z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{1}{8} ql^2$$

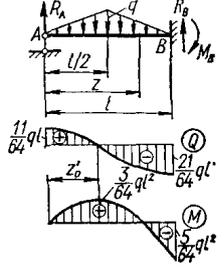
$$z'_0 = \frac{3}{8} l \quad M'_{\max} = \frac{9}{128} ql^2$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$w(z) = -\frac{ql^4}{48EJ} \left(2 \frac{z^4}{l^4} - 3 \frac{z^3}{l^3} + \frac{z}{l} \right)$$

$$f = -\frac{ql^4}{185EJ} \quad \text{при } z = 0,421l$$

$$\theta = \frac{ql^3}{48EJ} \quad \text{при } z = 0$$



$$R_A = \frac{11}{64} ql; \quad R_B = \frac{21}{64} ql; \quad M_B = \frac{5}{64} ql^2$$

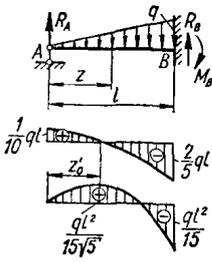
$$0 \leq z \leq l/2$$

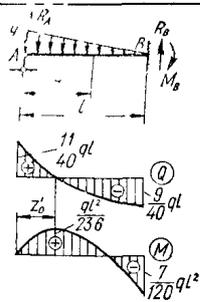
$$Q = ql \left(\frac{11}{64} - \frac{z^2}{l^2} \right); \quad M = qlz \left(\frac{11}{64} - \frac{1}{3} \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$1/2 \leq z \leq l$$

$$Q = ql \left[\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{64} \right]$$

$$f = -\frac{ql^4}{289,8EJ} \quad \text{при } z = 0,5l$$

Схема нагружения балки. Эпоры Q и M	Опорные реакции, поперечная сила Q , изгибающий момент M , координата опасного сечения z_0 , максимальный момент M_{\max}	Уравнения упругой линии $w(z)$, угол поворота θ в конце сечения, максимальный прогиб f (при постоянном EJ)
	$M = ql^2 \left[\frac{11}{64} \frac{z}{l} - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^3 \right]$ $z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{5}{64} ql^2$ $z'_0 = 0,415l \quad M'_{\max} \approx \frac{3}{64} ql^2$	
	$R_A = \frac{1}{10} ql; \quad R_B = \frac{2}{5} ql; \quad M_B = \frac{1}{15} ql^2$ $0 \leq z \leq l$ $Q = \frac{ql}{10} \left(1 - 5 \frac{z^2}{l^2} \right); \quad M = \frac{qlz}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{z^2}{l^2} \right)$ $z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{ql^2}{15}$ $z'_0 = 0,447l \quad M'_{\max} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}}$	$f = -\frac{ql^4}{419EJ} \quad \text{при } z = 0,447l$ $w = -\frac{ql^4}{426,6EJ} \quad \text{при } z = l/2$



$$R_A = \frac{11}{40} ql; \quad R_B = \frac{9}{40} ql; \quad M_B = \frac{7}{120} ql^2$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$Q = ql \left(\frac{11}{40} - \frac{z}{l} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{l^2} \right);$$

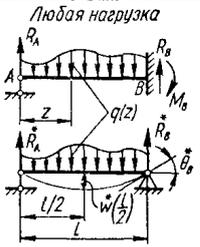
$$M = \frac{qlz}{2} \left(\frac{11}{20} - \frac{z}{l} + \frac{1}{3} \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{7}{120} ql^2$$

$$z'_0 = 0,329l \quad M'_{\max} = \frac{ql^2}{23,6}$$

$$f = -\frac{ql^4}{327,8EJ} \quad \text{при } z = 0,402l$$

$$w = -\frac{ql^4}{349EJ} \quad \text{при } z = l/2$$

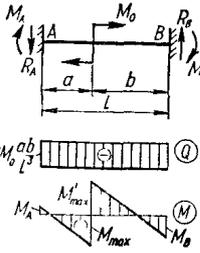


$$R_A = \dot{R}_A + \frac{M_B}{l}; \quad R_B = \dot{R}_B - \frac{M_B}{l};$$

$$M_B = 3 \frac{\dot{\theta}_B}{l} EJ$$

$$w = \dot{w} \left(\frac{l}{2} \right) + \frac{M_B l^2}{16EJ} \quad \text{при } z = l/2$$

параметры со знаком * соответствуют статически определимой балке на двух опорах (см. рисунок)



$$R_A = 6M_0 \frac{ab}{l^2}; \quad R_B = 6M_0 \frac{ab}{l^2};$$

$$M_A = M_0 \frac{b}{l^2} (2a - b); \quad M_B = M_0 \frac{a}{l^2} (2b - a)$$

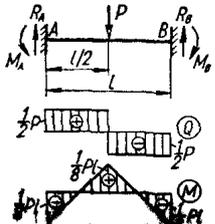
$$0 \leq z \leq a$$

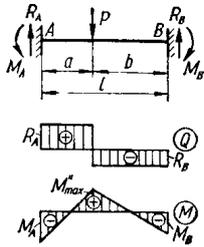
$$Q = -6M_0 \frac{ab}{l^2}; \quad M = M_0 \frac{ab}{l^2} \left(2 - \frac{b}{a} - 6 \frac{z}{l} \right)$$

$$0 \leq z \leq a$$

$$w(z) = \frac{l^3}{6EJ} \left[-R_A \frac{z^3}{l^3} + 3M_A \frac{z^2}{l^3} \right] =$$

$$= \frac{M_0 b^2 z^2}{2EJl} \left(2 \frac{a}{l} - \frac{b}{l} - 2 \frac{az}{l^2} \right)$$

Схема нагружения балки. Эпюры Q и M	Опорные реакции, поперечная сила Q , изгибающий момент M , координата опасного сечения z_0 , максимальный момент M_{\max}	Уравнения упругой линии $w(z)$, угол поворота θ конечного сечения, максимальный прогиб f (при постоянном EJ)
	$a < z < l$ $Q = -6M_0 \frac{ab}{l^3}; M = M_0 \frac{ab}{l^2} \left(2 - \frac{b}{a} - 6 \frac{z}{l} + \frac{l^2}{ab} \right)$ $z_0' = 0 \quad M_{\max}' = M_0 \frac{b}{l^2} (2a - b)$ $z_0'' = a \quad M_{\max}'' = -M_0 \left(1 - 4 \frac{a}{l} + 9 \frac{a^2}{l^2} - 6 \frac{a^3}{l^3} \right)$ $z_0''' = a \quad M_{\max}''' = M_0 \left(4 \frac{a}{l} - 9 \frac{a^2}{l^2} + 6 \frac{a^3}{l^3} \right)$ $z_0^{IV} = l \quad M_{\max}^{IV} = -M_0 \frac{a}{l^2} (2b - a)$	$l/3 < a < 2l/3$ $w_{\max} (>0) \text{ при } z = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{b}{a} \right) l$ $w_{\max} (<0) \text{ при } z = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{a}{b} \right) l$
	$R_A = R_B = \frac{1}{2} P; M_A = M_B = \frac{1}{8} Pl$ $0 < z < l/2$ $Q = \frac{1}{2} P; M = \frac{1}{8} P (4z - l)$ $l/2 < z < l$ $Q = -\frac{1}{2} P; M = \frac{1}{8} P (3l - 4z)$	$0 < z < l/2$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{48EJ} \left(3 \frac{z^2}{l^2} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$



$$z'_0 = l/2 \quad M_{\max} = \frac{1}{8} Pl$$

$$z'_0 = 0; \quad z''_0 = l \quad M''_{\max} = M'''_{\max} = -\frac{1}{8} Pl$$

$$f = -\frac{Pl^3}{192EJ} \quad \text{при } z = l/2$$

$$R_A = P \frac{b^2(3a+b)}{l^3}; \quad R_B = P \frac{a^2(3b+a)}{l^3};$$

$$M_A = Pa \frac{b^2}{l^2}; \quad M_B = Pb \frac{a^2}{l^2}$$

$$0 \leq z < a$$

$$Q = P \frac{b^2(3a+b)}{l^3}; \quad M = Pa \frac{b^2}{l^2} \left(\frac{3a+b}{al} z - 1 \right)$$

$$a \leq z \leq l$$

$$Q = -P \frac{a^2(3b+a)}{l^3};$$

$$M = Pa \frac{b^2}{l^2} \left[\frac{3a+b}{al} z - \frac{l^2(z-a)}{b^2a} - 1 \right]$$

$$z'_0 = 0 \quad M'_{\max} = -P \frac{ab^2}{l^2}$$

$$z''_0 = a \quad M''_{\max} = 2P \frac{a^2b^2}{l^3}$$

$$z'''_0 = l \quad M'''_{\max} = -P \frac{ba^2}{l^2}$$

если $a < b$ $|M'_{\max}| > M''_{\max} > |M'''_{\max}|$

если $a > b$ $|M'''_{\max}| > M''_{\max} > |M'_{\max}|$

наибольшее значение $|M'_{\max}| = \frac{4}{27} Pl$

$$\text{при } a = \frac{l}{3}$$

$$0 \leq z < a$$

$$w(z) = -\frac{Pab^2 z^2}{6EJ l^2} \left(3 - 3 \frac{z}{l} - \frac{b}{a} \frac{z}{l} \right)$$

$$a > b$$

$$f = -\frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \frac{a^3 b^2}{(3a+b)^2}$$

$$\text{при } z = \frac{2al}{3a+b}$$

$$a < b$$

$$f = -\frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \frac{a^2 b^3}{(3b+a)^2}$$

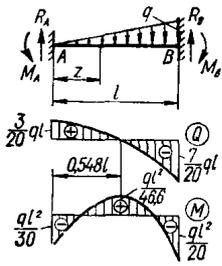
$$\text{при } z = l - \frac{2bl}{3b+a}$$

$$w = -\frac{Pa^3 b^3}{3EJ l^3} \quad \text{при } z = a$$

Схема нагружения балки. Эпюры Q и M	Опорные реакции, поперечная сила Q , изгибающий момент M , координата опасного сечения z_0 , максимальный момент M_{\max}	Уравнения упругой линии $w(z)$, угол поворота θ концевого сечения, максимальный прогиб f (при постоянном EJ)
	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}; M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $0 \leq z \leq l$ $Q = \frac{ql}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{l} \right); M = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{6} \right)$ $z'_0 = 0; z''_0 = l; M_{\max} = M''_{\max} = -\frac{ql^2}{12}$ $z'''_0 = l/2; M'''_{\max} = \frac{ql^2}{24}$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{ql^2 z^2}{24EJ} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2$ $f = -\frac{ql^4}{384EJ} \text{ при } z = l/2$
	$R_A = R_B = \frac{ql}{4}; M_A = M_B = \frac{5}{96} ql^2$ $0 \leq z \leq l/2$ $Q = ql \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{l^2} \right); M = \frac{ql^2}{4} \left(\frac{z}{l} - \frac{4}{3} \frac{z^3}{l^3} - \frac{5}{24} \right)$ $l/2 \leq z \leq l$ $Q = ql \left[\frac{(l-z)^2}{l^2} - \frac{1}{4} \right];$ $\left[1 - \frac{(z-l/2)^2}{l^2} - \frac{(z-l/2)^3}{l^3} \right]$	$f = -\frac{7ql^4}{3840EJ}$ $\text{при } z = l/2$

$$z_0' = 0; z_0'' = l \quad M_{\max}' = M_{\max}'' = -\frac{5}{96} ql^2$$

$$z_0''' = l/2 \quad M_{\max}''' = \frac{ql^2}{32}$$



$$R_A = \frac{3}{20} ql; R_B = \frac{7}{20} ql, M_A = \frac{ql^2}{30}; M_B = \frac{ql^2}{20}$$

$$0 < z < l$$

$$Q = \frac{1}{2} ql \left(\frac{3}{10} - \frac{z^2}{l^2} \right);$$

$$M = ql^2 \left(\frac{3}{20} \frac{z}{l} - \frac{1}{6} \frac{z^3}{l^3} - \frac{1}{30} \right)$$

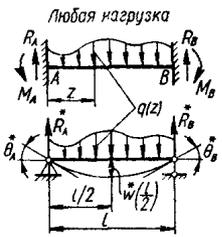
$$z_1' = 0 \quad M_{\max}' = -\frac{ql^2}{30};$$

$$z_1'' = l \quad M_{\max}'' = -\frac{ql^2}{20};$$

$$z_0''' = 0,548l \quad M_{\max}''' = \frac{ql^2}{46,6}$$

$$f = -\frac{ql^4}{764EJ} \text{ при } z = 0,525l$$

$$w = -\frac{ql^4}{768EJ} \text{ при } z = l/2$$



Любая нагрузка

$$R_A = \dot{R}_A - \frac{M_A - M_B}{l};$$

$$R_B = \dot{R}_B + \frac{M_A - M_B}{l}$$

$$M_A = \frac{2EJ}{l} (2\dot{\theta}_A - \dot{\theta}_B); M_B = \frac{2EJ}{l} (2\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_A)$$

$$w = \dot{w} \left(\frac{l}{2} \right) + \frac{(M_A + M_B) l^2}{16EI}$$

при $z = l/2$

Параметры со знаком * соответствуют статически определимой балке на двух опорах (см. рисунок)

Аналогично могут быть написаны в канонической форме уравнения перемещений для любой n раз статически неопределимой системы

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} (13.12)$$

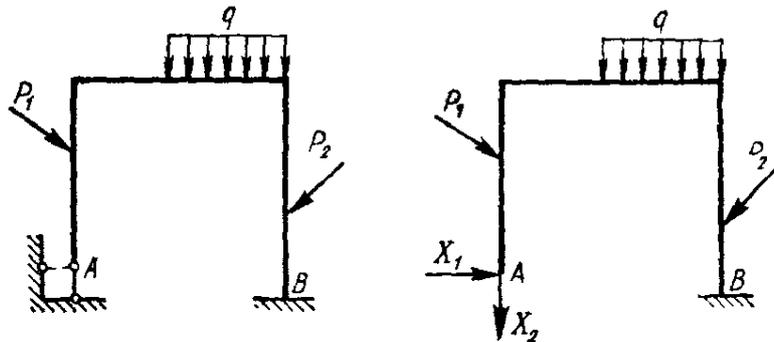


Рис. 267

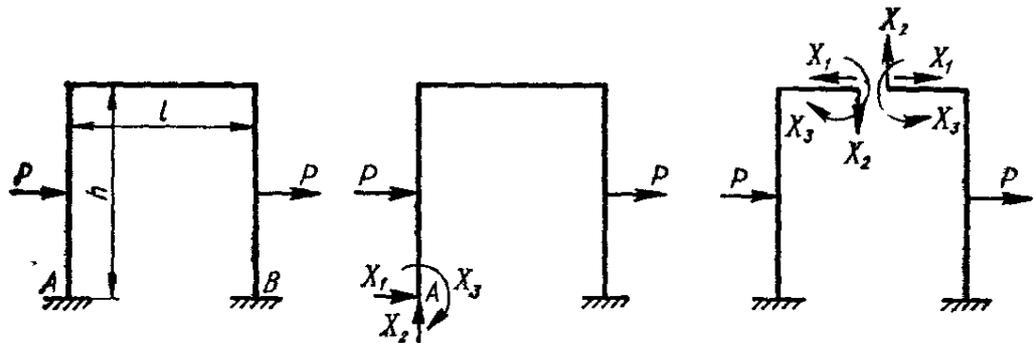


Рис. 268

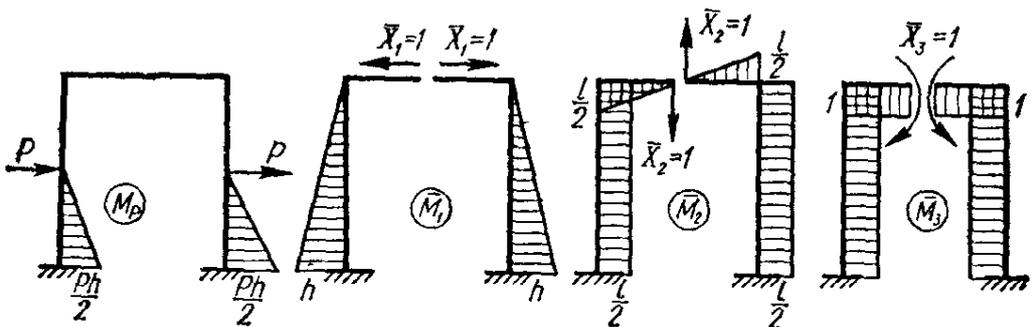


Рис. 269

Перемещения Δ_{iP} и δ_{ij} , входящие в канонические уравнения, следует определять по методу Мора. При расчете рам и балок, для которых отношение высоты стержня к его длине, как правило, меньше 0,1, в общей формуле Мора ограничиваются сохранением интегралов, учитывающих лишь изгибающие моменты. При этом прикладываем к основной системе единичные нагрузки $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ а также внешние нагрузки и строят соответствующие эпюры моментов как это показано применительно к трижды статически неопределимой системе (рис. 268) на рис. 269. Ординаты эпюр изгибающих моментов от заданной нагрузки P (состояние P) и каждой единичной силы $X_1 =$

(состояние 1), $\bar{X}_2 = 1$ (состояние 2) и т. д. обозначим соответственно через $M_P, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$. На основании (12.29) находим

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \Delta_{2P} = \int_s \frac{\bar{M}_2 M_P ds}{EJ}; \dots; \Delta_{nP} = \int_s \frac{\bar{M}_n M_P ds}{EJ}. \quad (13.13)$$

Удельные перемещения, имеющие одинаковые индексы (главные коэффициенты канонических уравнений), определяют по формулам

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}; \delta_{22} = \int_s \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \dots; \delta_{nn} = \int_s \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n ds}{EJ}, \quad (13.14)$$

а имеющие разные индексы (побочные коэффициенты), по формулам

$$\delta_{12} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \delta_{13} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3 ds}{EJ}; \dots; \delta_{ik} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}. \quad (13.15)$$

Эти перемещения могут быть положительными или отрицательными, а также равными нулю.

На основании теоремы о взаимности перемещений

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Для систем, состоящих из прямолинейных элементов, вычисления перемещений удобно производить по способу Верещагина. Например, для статически неопределимой системы (рис. 266, а) имеем (см. рис. 266, в, г, д, е)

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{\omega_P \bar{M}_{CP}}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{\omega_1 \bar{M}_{C1}}{EJ}; \\ \omega_P &= \frac{Pl^2}{8}; \quad \bar{M}_{CP} = \frac{5}{6} l; \\ \omega_1 &= \frac{l^2}{2}; \quad \bar{M}_{C1} = \frac{2}{3} l. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Из формулы (13.10) находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} P.$$

Если учитывать влияние разности температур, то порядок расчета сохранится прежним, а свободные члены канонических уравнений при этом будут представлять собой перемещения в основной системе не только от заданной нагрузки, но и от изменения температуры:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} &= 0; \\ \dots &\dots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

где Δ_{it} — перемещение в основной системе по направлению силы X_i , вызванное разностью температур.

После определения коэффициентов δ_{ij} и свободных членов Δ_{iP} и Δ_{iH} решаем систему канонических уравнений (13.16) и находим лишние неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n . Далее обычным способом строим эпюры внутренних сил (N, Q и M) Построения удобно производить методом суммирования по схеме

$$\left. \begin{aligned} M &= \bar{M}_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_P; \\ Q &= \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + Q_P; \\ N &= \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + N_P. \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

Отметим, что вид канонических уравнений остается неизменным при любом возможном варианте основной системы, изменяется лишь смысл лишних неизвестных и геометрический смысл перемещений.

В табл. 33, 34, 35 приведены расчетные формулы для определения изгибающего момента в характерных сечениях некоторых видов статически неопределимых рам для простейших случаев их нагружения.

13.3. Многоопорные неразрезные балки. Уравнение трех моментов

Неразрезными называются балки, лежащие более чем на двух опорах (см., например, рис. 270, а). Число лишних связей в неразрезной балке, а следовательно, и лишних реакций равно числу промежуточных опор. Иногда крайняя опора выполняется в виде защемления.

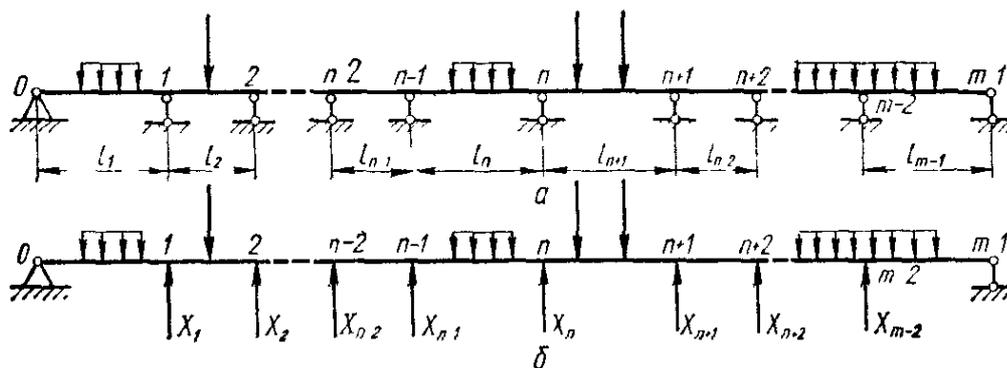


Рис. 270

В этом случае степень статической неопределимости балки увеличивается на единицу.

При выборе основной системы за лишние связи целесообразно принимать не промежуточные опоры и лишние неизвестные реакции в них (рис. 270, б), что привело бы к излишне громоздким вычислениям при определении лишних неизвестных, а изгибающие моменты на промежуточных опорах. В этом случае, очевидно, основной системой будет система однопролетных балок, соединенных на опорах шарнирами. Тогда эквивалентная система при расчете по методу сил будет представлять собой ряд простых шарнирно-опертых балок, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами по концам (рис. 271):

$$M_1 = X_1; M_2 = X_2; \dots; M_{n+1} = X_{n+1}; \dots$$

Дополнительное уравнение перемещений для каждой промежуточной опоры должно выражать условие равенства нулю взаимного

угла поворота опорных сечений смежных балок. Поскольку каждая из двухопорных балок основной системы под действием внешних нагрузок в пролете и концевых моментов деформируется независимо от другой, то торцы двух смежных балок, примыкающих к одной опоре, например n -й (рис. 272), могут поворачиваться на некоторый угол $\Delta_n^{\text{лев}}$ и $\Delta_n^{\text{прав}}$. Так как в исходной статически неопределимой неразрезной балке

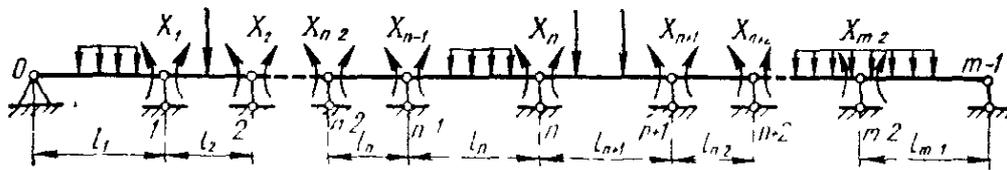


Рис. 271

каждая пара таких сечений представляет собой одно сечение, то из условий сплошности их взаимный угол поворота должен быть равен нулю. Отсюда для каждой промежуточной опоры

$$\Delta_n = \Delta_n^{\text{лев}} + \Delta_n^{\text{прав}} = 0. \quad (13.18)$$

Так как основная система состоит из отдельных, не связанных между собой однопролетных балок, то при раскрытии условия (13.18) достаточно рассмотреть примыкающие к n -й опоре два пролета l_n и l_{n+1} . Тогда условие (13.18), записанное в канонической форме, принимает вид

$$\delta_{n, n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n, n+1} X_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \quad (13.19)$$

В соответствии с построениями, приведенными на рис. 273, а, б, в, г,

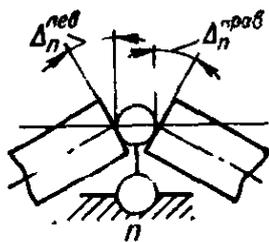


Рис. 272

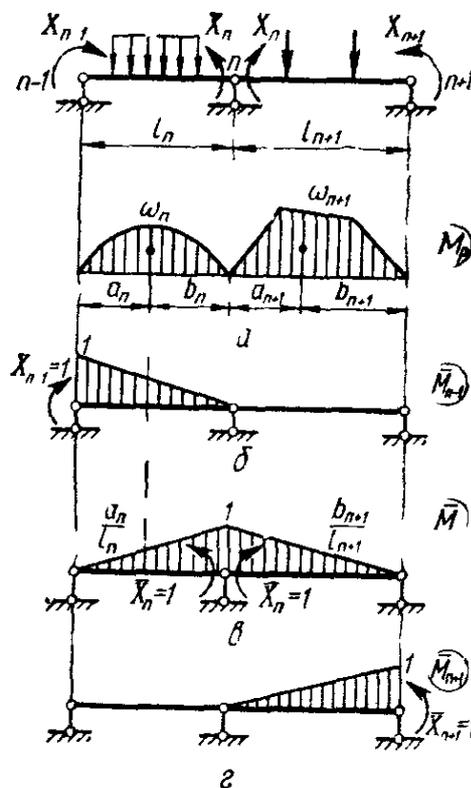


Рис. 273

$$\Delta_{nP} = \frac{1}{EJ_n} \omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EJ_{n+1}} \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \quad (13.20)$$

$$\delta_{n, n-1} = \frac{1}{EJ_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EJ_n}; \quad (13.21)$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{EJ_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}; \quad (13.22)$$

$$\delta_{n, n+1} = \frac{1}{EJ_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \quad (13.23)$$

Подставляя (13.20) — (13.23) в (13.19), получаем

$$X_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2X_n \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + X_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \quad (13.24)$$

Заменив обозначение лишних неизвестных X_i на M_i , получим уравнение трех моментов (уравнение Клапейрона)

$$M_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2M_n \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \quad (13.25)$$

При расчете неразрезных балок составляют столько уравнений трех моментов, сколько имеется промежуточных опор. Решив полученную систему уравнений, определяют лишние неизвестные моменты M_i на опорах. Зная конечные моменты эквивалентной системы, все дальнейшие расчеты выполняют обычным методом, как при расчете любой статически определимой системы.

Для балок постоянного сечения ($J = \text{const}$) уравнение трех моментов (13.25) упрощается:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right). \quad (13.26)$$

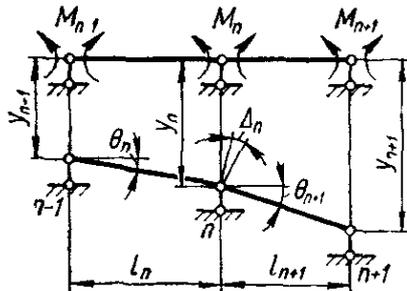


Рис. 274

Уравнения трех моментов для второй и предпоследней опор неразрезной балки, очевидно, будут содержать только два момента.

Уравнения трех моментов используются и при расчете неразрезной балки, один конец которой жестко заделан. В этом случае составляют уравнение трех моментов также и для заделанного конца, ставя там как бы промежуточную опору, и в сторону заделки вводят фиктивный пролет. Если заделан левый конец балки, в уравнении трех моментов должны быть положены равными нулю M_{n-1} , l_n , а член $6\omega_n a_n / l_n$ будет отсутствовать. Если не все опоры неразрезной балки находятся на одном уровне, а имеет место смещение некоторых опор, то в балке могут возникать значительные начальные напряжения. Эти напряжения зависят от разницы в уровнях опор и жесткости балки, увеличиваясь пропорционально указанным величинам.

Влияние смещения опор на напряженность неразрезной балки может быть оценено следующим образом. Пусть имеет место картина смещения опор, приведенная на рис. 274. Углы поворота левого и правого пролетов относительно опоры n будут

$$\theta_n = \frac{y_1 - y_{n-1}}{l_n}; \quad \theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}.$$

Угол поворота считаем положительным, если сечение поворачивается по часовой стрелке. Очевидно, взаимный угол поворота торцевых сечений на опоре n

$$\Delta_n = \theta_{n+1} - \theta_n \quad (13.27)$$

Теперь каноническое уравнение при расчете на смещение опор, в котором роль Δ_{nP} играет Δ_n , примет вид

$$\delta_{n, n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n, n+1} X_{n+1} + \Delta_n = 0. \quad (13.28)$$

В случае балки постоянной жесткости с учетом (13.21) — (13.23) и (13.27) уравнение трех моментов (13.28) окончательно можем записать в виде

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ(\theta_{n+1} - \theta_n). \quad (13.29)$$

Если кроме смещений опор действуют внешние нагрузки, в правой части уравнения (13.29) должны быть сохранены члены, содержащиеся в правой части уравнения (13.26).

13.4. Расчет статически неопределимых криволинейных стержней

При расчете статически неопределимых упругих систем, содержащих криволинейные стержни, так же, как и при расчете любых статически неопределимых систем, рекомендуется пользоваться каноническими уравнениями метода сил. При этом перемещения, входящие в канонические уравнения, следует вычислять по методу Мора.

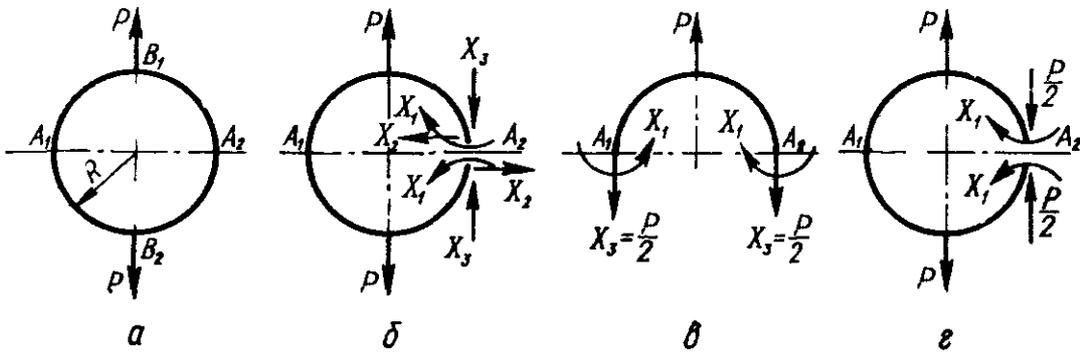


Рис. 275

В качестве примера рассмотрим круговое кольцо постоянного поперечного сечения, растягиваемое двумя равными и противоположно направленными силами P (рис. 275, а). Эта система, как и всякий замкнутый контур, является трижды статически неопределимой. Выберем основную систему, разрезав кольцо по сечению A_2 (рис. 275, б). Из условия симметрии следует, что поперечная сила в этом сечении $X_2 = 0$. Разрезав кольцо по диаметру A_1-A_2 (рис. 275, в), из условий равновесия отсеченной части находим значение нормальной силы $X_3 = P/2$. Неизвестный изгибающий момент X_1 найдем из рассмотрения эквивалентной системы (рис. 275, г).

Каноническое уравнение перемещений, выражающее равенство нулю взаимного угла поворота в сечении A_2 , будет

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (13.30)$$

где

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad (13.31)$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}. \quad (13.32)$$

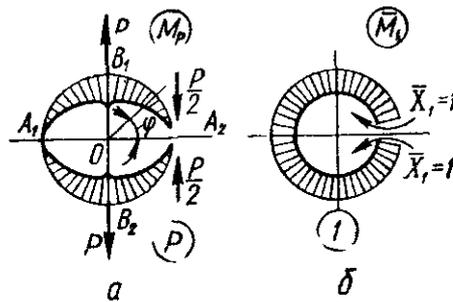


Рис. 276

При этом M_P и \bar{M}_1 согласно рис. 276, а, б могут быть выражены формулами

$$M_P = -\frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right); \quad \bar{M}_1 = -1.$$

Подставляя эти выражения для M_P и \bar{M}_1 в (13.31) и (13.32), получаем

$$\Delta_{1P} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{PR^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{2EJ} = \frac{2PR^2}{EJ} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$\delta_{11} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{Rd\varphi}{LJ} = \frac{2\pi R}{LJ}$$

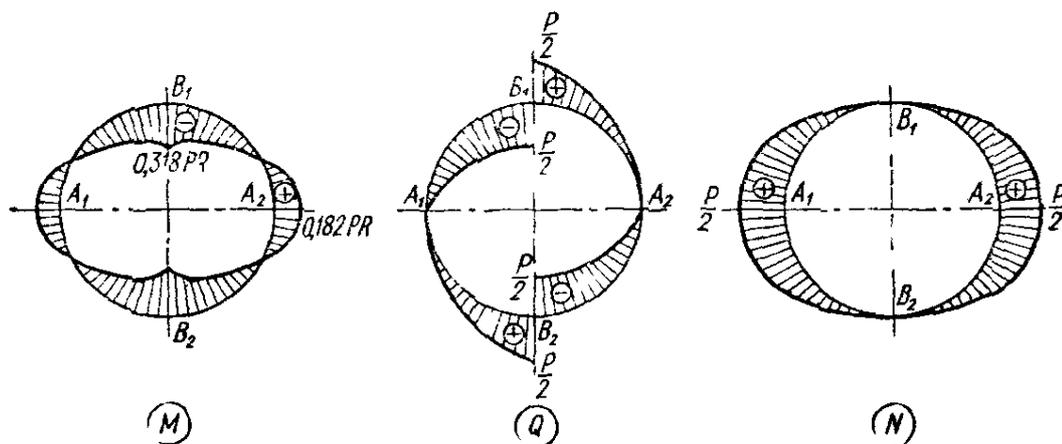


Рис. 277

Теперь уравнение (13.30) может быть переписано так:

$$\frac{2\pi R}{LJ} X_1 + \frac{2PR^2}{EJ} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{2PR^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{2\pi R} = -0,182PR. \quad (13.33)$$

Таким образом, изгибающий момент в сечении А

$$M_A = -0,182PR$$

и направлен в сторону, противоположную принятой ранее.

Изгибающий момент в произвольном сечении можно выразить формулой

$$M(\varphi) = -\frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) + M_A;$$

максимальный момент

$$M_{\max} = M_B = -0,318PR.$$

Поперечная сила в любом сечении выражается формулой $Q(\varphi) = 0,5P \sin \varphi$, осевая сила $N(\varphi) = 0,5P \cos \varphi$. На рис. 277 приведены эпюры M , Q и N .

В табл. 36 приведены расчетные формулы для определения усилий и перемещений в различных случаях нагружения кольца.

13.5. Определение перемещений в статически неопределимых системах

После определения значений лишних неизвестных усилий и построения эпюр перемещения в статически неопределимых системах можно найти обычными способами. При этом в каждом конкретном случае следует использовать тот метод, который наиболее просто приводит к результатам. Например, прогибы и углы поворота сечений статически неопределимых балок, несущих сложную нагрузку, рекомендуется определять по методу начальных параметров. Метод Мора, являющийся наиболее универсальным, обычно используют при определении перемещений в балках, рамах и фермах.

Используя формулу Мора

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_1 N_P ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_1 Q_P ds}{GF}, \quad (13.34)$$

следует рассматривать окончательные эпюры M , N , Q от силовых факторов статически неопределимой системы, а также эпюры \bar{M}_1 , \bar{N}_1 , \bar{Q}_1 от единичного силового фактора, соответствующего искомому перемещению. При этом для установления эпюр \bar{M}_1 , \bar{N}_1 и \bar{Q}_1 целесообразно единичную нагрузку прикладывать к основной статически определимой системе.

В качестве примера вычислим взаимные перемещения точек $A_1—A_2$ и $B_1—B_2$ соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях для статически неопределимой системы, представляющей собой одноконтурную раму, под действием сил P , приложенных по схеме, приведенной на рис. 278, а. Прежде всего определим лишние неизвестные этой трижды статически неопределимой системы. Выберем основную систему, разрезав одну из стоек по оси симметрии (рис. 278, б). Вследствие симметрии нагрузки в месте разреза поперечная сила $X_2 = 0$. Из рассмотрения условий равновесия половины рамы (рис. 278, в) найдем

$$2X_3 = P, \quad X_3 = \frac{P}{2}.$$

Лишний неизвестный момент X_1 определится из следующего канонического уравнения:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13.35)$$

Здесь Δ_{1P} — перемещение в направлении действия усилия X_1 от сил P и $X_3 = P/2$.

Для определения перемещений Δ_{1P} и δ_{11} строим соответствующие эпюры (рис. 278, г, д) и, пользуясь способом Верещагина, находим

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = \frac{2}{EJ_1} \frac{Pl_1^2}{8} = \frac{Pl_1^2}{4FJ_1}, \quad (13.36)$$

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ} = \frac{2l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{EJ_2}. \quad (13.37)$$

Подставив (13.36) и (13.37) в (13.35), получим

$$\frac{2}{E} \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) X_1 + \frac{Pl_1^3}{4EJ_1} = 0;$$

$$X_1 = - \frac{Pl_1^2}{4J_1} \left[2 \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) \right]^{-1}.$$

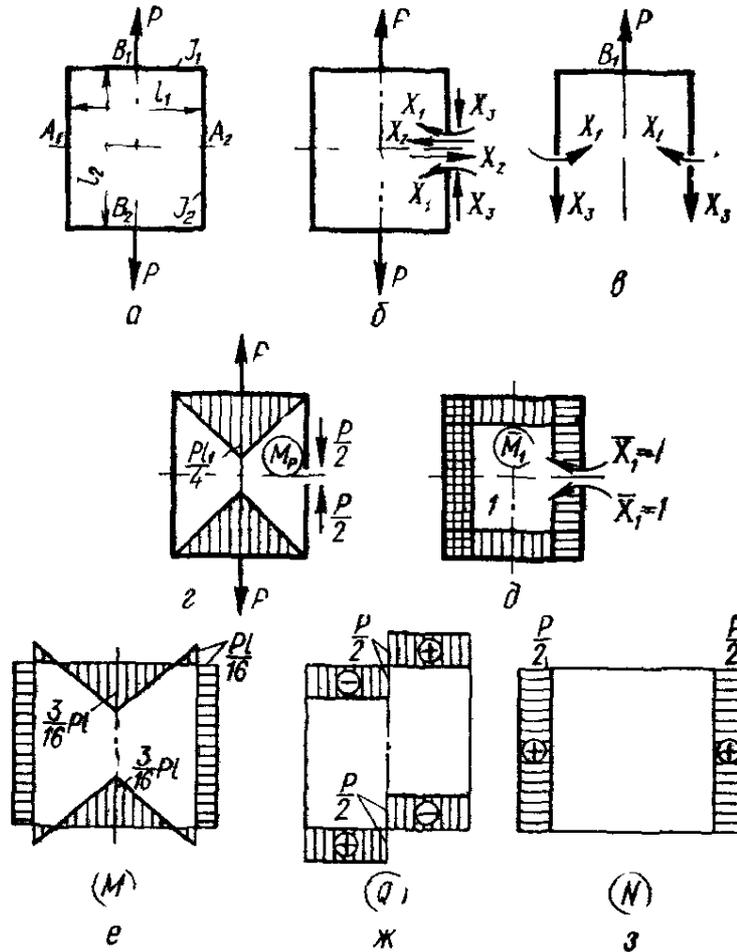


Рис. 278

При $l_1 = l_2 = l$ и $J_1 = J_2 = J$

$$X_1 = - \frac{Pl}{16}.$$

На рис. 278, *е, ж, в* построены эпюры M , Q и N для рассмотренной рамы.

Для определения взаимного перемещения точек A_1 — A_2 в горизонтальном направлении прикладываем к основной системе в этих точках единичные силы (рис. 279, б) $\bar{X}_1 = 1$. Перемножая эпюру M_p , которую удобнее представить в виде, показанном на рис. 279, а, на эпюру \bar{M} находим (при $l_1 = l_2 = l$ и $J_1 = J_2 = J$)

$$\Delta_{A_1, -A_2} = \Delta_l = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(- \frac{Pl^2 l}{16} + \frac{Pl^2 l}{8} - 2 \frac{Pl^2 l}{32} \right) = \frac{Pl^3}{64EJ}$$

Чтобы определить взаимное вертикальное перемещение точек $B_1 - B_2$, прикладываем к основной системе в этих точках единичные силы $\bar{X}_k = 1$ (рис. 279, в). Перемножая эпюры M_P и \bar{M}_k , находим

$$\Delta_{B_1-B_2} = \Delta_k = \sum_s \int \frac{\bar{M}_k M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl^2}{16} \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} \frac{l}{6} \cdot 2 + \frac{l^2}{8} \frac{Pl}{16} \cdot 2 \right) = \frac{5}{192} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

В случае действия на статически неопределимую систему температуры к перемещениям основной системы, нагруженной найденными лишними неизвестными, следует добавить температурные перемещения.

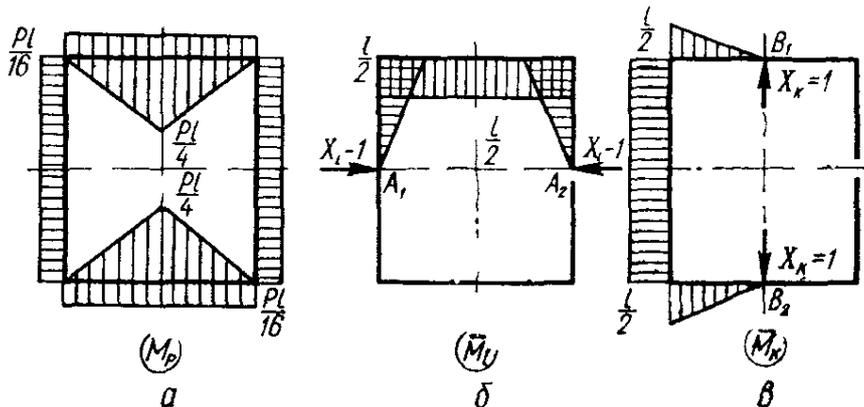


Рис. 279

При этом формула (13.34) с учетом (12.36) примет вид

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_i ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_i ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_i ds}{GF} + \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{(t_H + t_B)}{2} ds + \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{(t_H - t_B)}{h} ds, \quad (13.38)$$

где M_i, N_i, Q_i — эпюры от лишних неизвестных, обусловленных действием температуры.

В табл. 31, 32, 36 приведены выражения для перемещений в статически неопределимых однопролетных балках и кольце для различных случаев их нагружения.

13.6. О расчете пространственных рамных систем

Как известно, в самом общем случае в сечении стержня действуют шесть внутренних силовых факторов: N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y и M_z .

Для неподвижного закрепления сечения нужно наложить шесть связей, усилия в которых могут быть найдены из шести уравнений равновесия твердого тела.

Количество связей в пространственной системе, превышающее указанное число, дает степень статической неопределимости. Так, пространственная рама, показанная на рис. 280, а, является системой

шесть раз статически неопределимой, так как из уравнений равновесия можно определить лишь реакции одной жесткой опоры. Один из вариантов основной системы вышеуказанной рамы приведен на рис. 280, б. Для определения шести неизвестных усилий необходимо решить шесть канонических уравнений обычного вида

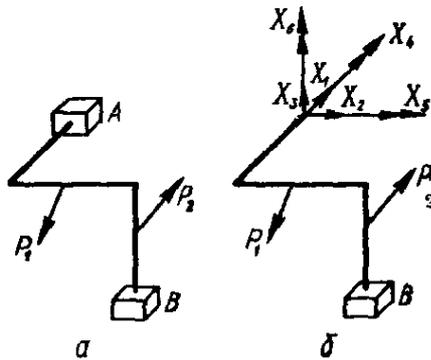


Рис. 280

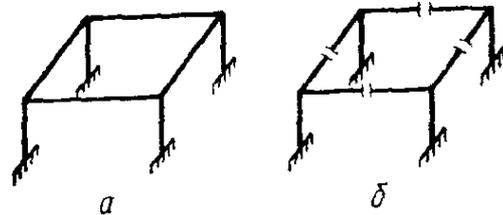


Рис. 281

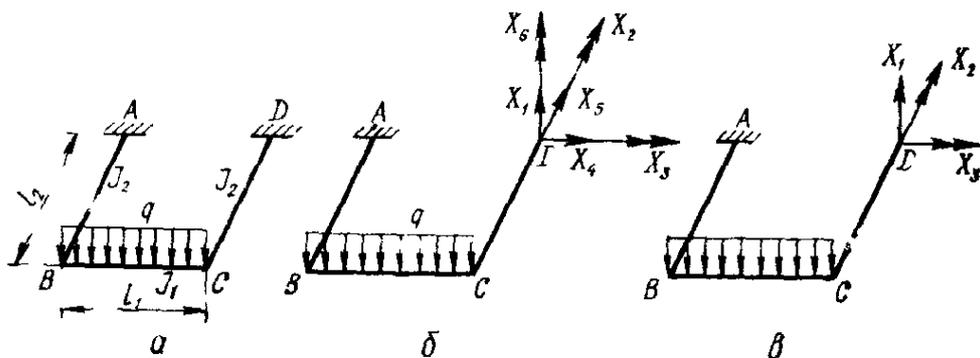


Рис. 282

Пространственная рама, показанная на рис. 281, а, является системой 24 раза статически неопределимой. Основная система (рис. 281, б) содержит четыре разреза, в каждом из которых имеем шесть неизвестных усилий.

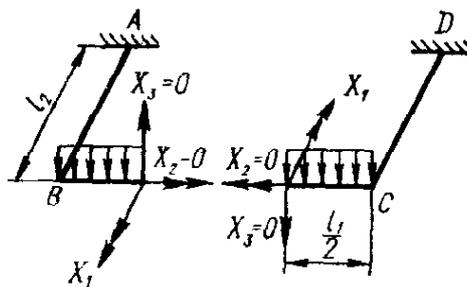


Рис. 283

В конструкциях встречаются плоские рамы, подверженные действию пространственных нагрузок. В плоских рамах, нагруженных перпендикулярно их плоскости (рис. 282, а), силовые факторы, характеризующие работу рамы в ее же плоскости, равны нулю. Следовательно, из шести неизвестных (рис. 282, б) три равны нулю, т. е. $X_4 = X_5 = X_6 = 0$. Это обстоятельство упрощает расчет плоских рам.

При расчетах плоских рам пространственные нагрузки раскладывают на составляющие, действующие в плоскости рамы и перпендикулярно к ней и, используя принцип независимости действия сил, рассматривают систему отдельно для каждой из нагрузок, действующих в разных плоскостях.

В качестве примера приведем расчет по методу сил рамы, показанной на рис. 282, а. Из соображений симметрии выберем основную систему в виде, приведенном на рис. 283. Этот вариант удобнее, чем приведенный на рис. 282, в, так как крутящий момент X_2 и поперечный

сила X_3 , т. е. кососимметричные силовые факторы, оказываются равными нулю. Неизвестный изгибающий момент X_1 легко определить из канонического уравнения

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13.39)$$

Для определения перемещений Δ_{1P} и δ_{11} строим эпюры изгибающих и крутящих моментов для P -го (рис. 284, а) и единичного $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 284, б) состояний. Эпюры крутящих моментов показаны штриховыми линиями.

Пренебрегая влиянием осевых и поперечных сил, формулы Мора для определения перемещений записываем в виде

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP} ds}{EJ_x} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP} ds}{EJ_y} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{z1} M_{zP} ds}{GJ_K}; \quad (13.40)$$

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x1} ds}{EJ_x} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1} ds}{EJ_y} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{z1} ds}{GJ_K}. \quad (13.41)$$

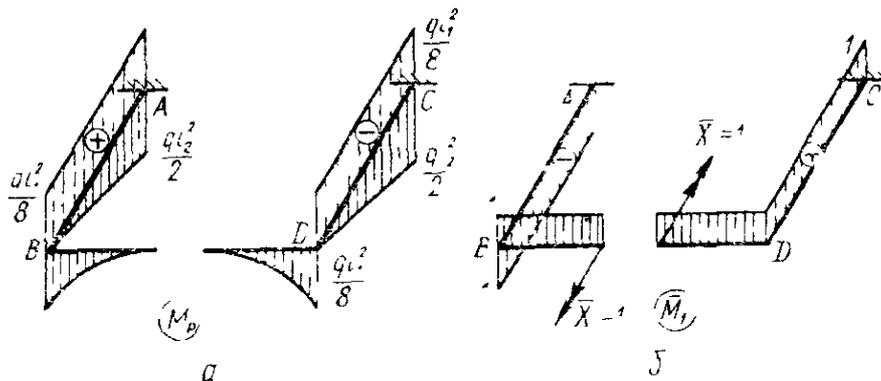


Рис. 284

Учитывая, что единичные эпюры ограничены прямыми линиями перемещения Δ_{1P} и δ_{11} можем определять по способу Верещагина

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EJ_1} \frac{ql_1^2}{8} \frac{1}{3} \frac{l_1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{GJ_K} \frac{ql_1^2}{8} l_2 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -\frac{ql_1^3}{24EJ_1} \left(1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1} \right); \\ \delta_{11} &= \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{GJ_K} = \frac{l_1}{EJ_1} \left(1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1} \right). \end{aligned}$$

На основании (13.39) найдем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql_1^2}{24} \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}} = \beta \frac{ql_1^2}{24},$$

где

$$\beta = \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}}$$

Окончательные эпюры M , $M_{кр}$ и Q приведены на рис. 285.

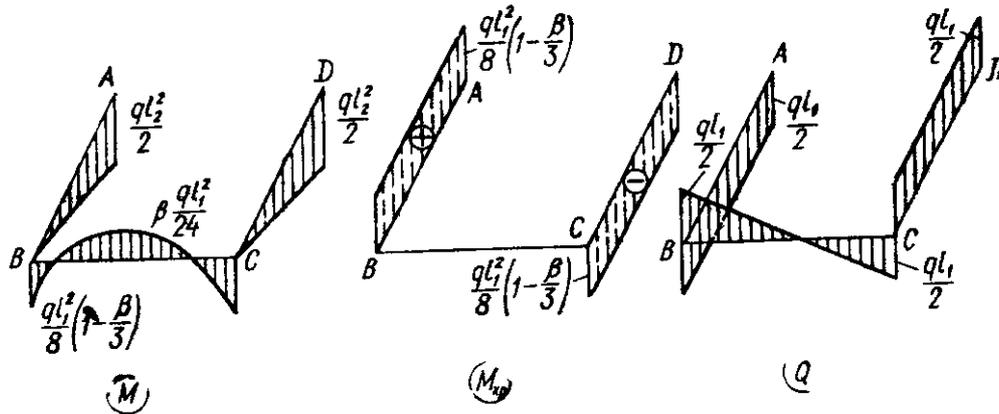


Рис. 285

Таблица 32. Расчетные формулы, учитывающие смещение опор и изменение температуры в статически неопределимых балках (при постоянном EJ)

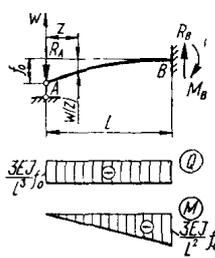
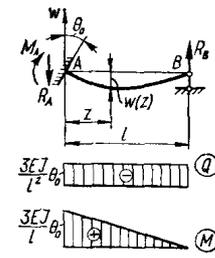
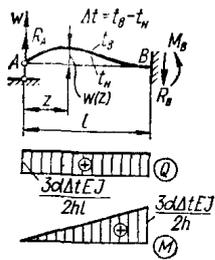
Схема балки	Опорные реакции, поперечная сила Q и изгибающий момент M , координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}	Уравнение упругой линии $w(z)$, угол поворота θ конечного сечения и максимальный прогиб f
	$R_A = \frac{3EJf_0}{l^3}; R_B = \frac{3EJf_0}{l^3}; M_B = \frac{3EJf_0}{l^2}$ $0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{3EJf_0}{l^3}; M = -\frac{3EJf_0}{l^3}z$ $z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{3EJf_0}{l^2}$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{f_0}{2} \left(2 - 3\frac{z}{l} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = -f_0 \text{ при } z = 0$ $\theta = \frac{3f_0}{2l} \text{ при } z = 0$
	$R_A = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}; R_B = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}, M_A = \frac{3EJ\theta_0}{l}$ $0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{3EJ\theta_0}{l^2}; M = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}(l-z)$ $z_0 = 0 \quad M_{\max} = \frac{3EJ\theta_0}{l}$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\theta_0 \frac{l}{2} \left(2\frac{z}{l} - 3\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = -0,193\theta_0 l \text{ при } z = 0,422l$ $\theta = -\theta_0 \text{ при } z = 0$ $\theta = \frac{1}{2}\theta_0 \text{ при } z = l$

Схема балки	Опорные реакции, поперечная сила Q и изгибающий момент M , координата опасного сечения z_0 и максимальный момент M_{\max}	Уравнение упругой линии $w(z)$, угол поворота θ концевого сечения и максимальный прогиб f
	$R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3} f_0; \quad M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2} f_0$ $0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{12EJ}{l^3} f_0; \quad M = \frac{6EJ}{l^2} f_0 \left(1 - 2\frac{z}{l}\right)$ $z'_0 = 0 \quad M'_{\max} = \frac{6EJ}{l^2} f_0$ $z''_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{6EJ}{l^2} f_0$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -f_0 \left[1 - \left(3 - 2\frac{z}{l}\right) \frac{z^2}{l^2}\right]$ $f = -f_0 \text{ при } z = 0$
	$R_A = R_B = \frac{6EJ\theta_0}{l^2}; \quad M_A = \frac{4EJ\theta_0}{l};$ $M_B = \frac{2EJ\theta_0}{l}$ $0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{6EJ\theta_0}{l^2}; \quad M = \frac{6EJ\theta_0}{l} \left(2 - 3\frac{z}{l}\right)$ $z'_0 = 0 \quad M_{\max} = \frac{4EJ\theta_0}{l}$ $z''_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{2EJ\theta_0}{l}$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\theta_0 l \left(\frac{z^3}{l^3} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z}{l}\right)$ $f = -\frac{4\theta_0}{27} l \text{ при } z = l/3$ $\theta = -\theta_0 \text{ при } z = 0$

По высоте сечения балки температура изменяется линейно



$$R_A = R_B = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2hl}, \quad M_B = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h}$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$Q = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2hl}; \quad M = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2hl} z$$

$$z_0 = l \quad M_{\max} = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h}$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$w(z) = \frac{\alpha\Delta t l^2}{4h} \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$$

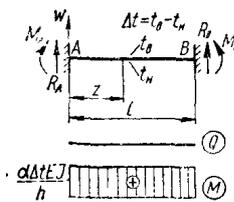
$$f = \frac{\alpha\Delta t l^2}{27h} \quad \text{при } z = l/3$$

$$\theta = \frac{\alpha\Delta t l}{4h} \quad \text{при } z = 0$$

(α — коэффициент линейного расширения материала балки;

Δt — разность температур верхнего и нижнего волокон балки)

По высоте сечения балки температура изменяется линейно



$$R_A = R_B = 0; \quad M_A = M_B = \frac{\alpha\Delta t E J}{h}$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$Q = 0 \quad M = \frac{\alpha\Delta t E J}{h} = \text{const}$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$w(z) = 0$$

(α — коэффициент линейного расширения материала балки;

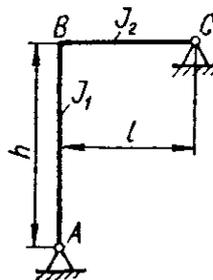
Δt — разность температур верхнего и нижнего волокон балки)

Таблица 33 Изгибающие моменты в Г-образной раме ($k = \frac{J_2 h}{J_1 l}$)

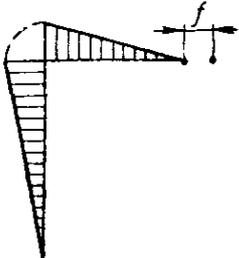
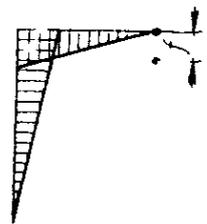
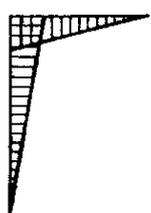
Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
--------------------------	--

Ригель и стойка шарнирно оперты

$$n = 1 + k$$



	$M_B = \frac{\alpha(1+\alpha)}{2n} aP$ $M_P = \alpha \left[1 - \frac{\alpha(1+\alpha)}{2n} \right];$ $\alpha = \frac{b}{l}$
	$M_B = \frac{ql^2}{8n}$
	$M_B = \frac{\alpha(2-\alpha)kb}{2n} P;$ $\alpha = \frac{a}{h}$
	$M_B = [3\alpha(2-\alpha) - 2] \frac{kM}{2n};$ $\alpha = \frac{a}{h}$
	$M_B = \frac{qkh^2}{8n}$

Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
 <p data-bbox="97 604 550 685">Горизонтальное смещение опоры C</p>	$M_B = 3 \frac{EJ_2 f}{nhl}$
 <p data-bbox="97 940 550 1037">Вертикальное смещение опоры C</p>	$M_B = 3 \frac{EJ_2 f}{nl^2}$
<p data-bbox="97 1064 550 1171">Вертикальное смещение опоры A</p>	<p data-bbox="550 1064 1260 1171">Значения M те же, что и при вертикальном смещении опоры C, но с противоположными знаками</p>
<p data-bbox="97 1187 550 1232">Нагрев на Δt</p>  <p data-bbox="97 1512 550 1637">α — коэффициент линейного расширения</p>	$M_B = 3 \frac{EJ_2}{nh} \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$

Ригель шарнирно оперт,
стойка заземлена

$$n = 4 + 3k$$

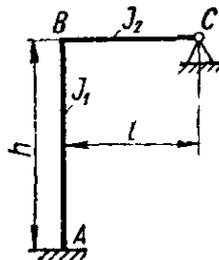


Схема нагрузки и энора M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
	$M_A = \frac{\alpha(1+\alpha)}{n} aP, \quad M_B = \frac{2\alpha(1+\alpha)}{n} aP$ $M_P = \alpha \left[1 - \frac{2\alpha(1+\alpha)}{n} \right] aP, \quad \alpha = \frac{b}{l}$
	$M_A = \frac{ql^2}{4n}; \quad M_B = \frac{ql^2}{2n}$
	$M_A = [2 + (2 + 3k)\alpha] \frac{\alpha b}{n} P$ $M_B = \frac{3\alpha k(1-\alpha)b}{n}$ $M_P = abP - \alpha M_A - (1-\alpha) M_B; \quad \alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = \left[\alpha(2-3\alpha) - \frac{2}{n}(1-\alpha)(3\alpha-1) \right] M$ $M_B = 3(1-\alpha)(3\alpha-1) \frac{kM}{n}, \quad \alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = \frac{q(2-k)h^2}{4n}; \quad M_B = \frac{qkh^2}{4n}$

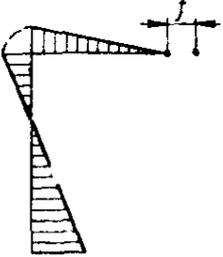
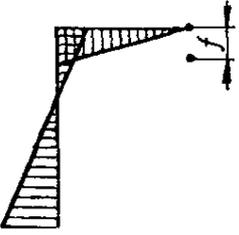
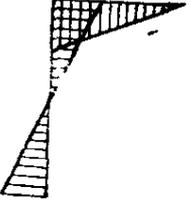
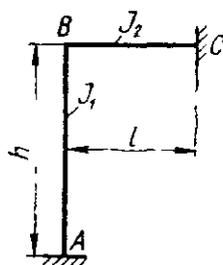
Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
<p>Горизонтальное смещение опоры C</p> 	$M_A = 6(2 + 3k) \frac{EJ_1 f}{nh^2}; \quad M_B = 18 \frac{EJ_2 f}{nhl}$
<p>Вертикальное смещение опоры C</p> 	$M_A = 6 \frac{EJ_2 f}{nl^2}; \quad M_B = 12 \frac{EJ_2 f}{nl^2}$
<p>Вертикальное смещение опоры A</p>	<p>Значения M те же, что и при вертикальном смещении опоры C, но с противоположными знаками</p>
<p>Поворот опоры A на угол θ</p> 	$M_A = 12(1 + k) \frac{EJ_1}{nh} \theta; \quad M_B = 6 \frac{EJ_2}{nl} \theta$
<p>Нагрев на Δt</p>  <p>α — коэффициент линейного расширения</p>	$M_A = 6 \frac{EJ_2}{nh} \left(3 + \frac{2}{k} + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$ $M_B = 6 \frac{EJ_2}{nh} \left(3 + 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$

Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
----------------------------	--

Ригель и стойка защемлены



$$n = 1 + k$$

	$M_A = \frac{\alpha^2 a}{2n} P; \quad M_B = \frac{\alpha^2 a}{n} P$ $M_C = [(2 - \alpha)k + 2(1 - \alpha)] \frac{\alpha a}{2n} P$ $M_P = \alpha a P - \alpha M_B - (1 - \alpha) M_C; \quad \alpha = \frac{b}{l}$
	$M_A = \frac{ql^2}{24n}; \quad M_B = \frac{ql^2}{12n}$ $M_C = (2 + 3k) \frac{ql^2}{24n}$
	$M_A = [1 + \alpha(1 + 2k)] \frac{\alpha b}{2n} P$ $M_B = \frac{\alpha k(1 - \alpha)b}{n} P$ $M_C = \frac{\alpha k(1 - \alpha)b}{2n} P; \quad \alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = \left[\alpha(2 - 3\alpha) - \frac{(1 - \alpha)(3\alpha - 1)}{2n} \right] M$ $M_B = (1 - \alpha)(3\alpha - 1) \frac{kM}{n}$ $M_C = (1 - \alpha)(3\alpha - 1) \frac{kM}{2n}; \quad \alpha = \frac{a}{h}$

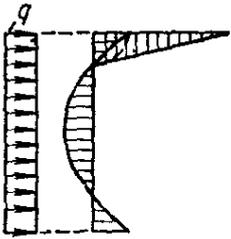
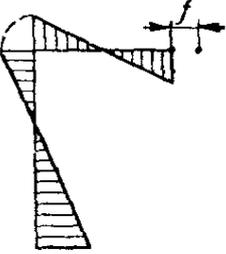
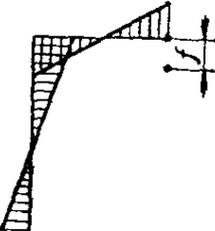
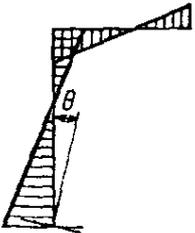
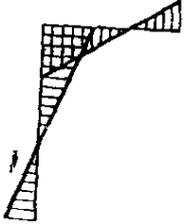
Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
	$M_A = \frac{q(3+2k)h^2}{24n}; \quad M_B = \frac{qkh^2}{12n}$ $M_C = \frac{qkh^2}{24n}$
 <p data-bbox="204 728 496 801">Горизонтальное смещение опоры C</p>	$M_A = 3(1+2k) \frac{EJ_1 f}{nh^2}; \quad M_B = 6 \frac{EJ_2 f}{nhl}$ $M_C = 3 \frac{EJ_2 f}{nhl}$
 <p data-bbox="204 1064 496 1137">Вертикальное смещение опоры C</p>	$M_A = 3 \frac{EJ_2 f}{nl^2}; \quad M_B = 6 \frac{EJ_2 f}{nl^2}$ $M_C = 3(2+k) \frac{EJ_2 f}{nl^2}$
<p data-bbox="204 1167 496 1240">Вертикальное смещение опоры A</p>	<p data-bbox="595 1155 1279 1261">Значения M те же, что и при вертикальном смещении опоры C, но с противоположными знаками</p>
<p data-bbox="209 1279 491 1352">Поворот опоры A на угол θ</p> 	$M_A = (3+4k) \frac{EJ_1}{nh} \theta$ $M_B = 2 \frac{EJ_2}{nl} \theta$ $M_C = \frac{EJ_2}{nl} \theta$
<p data-bbox="244 1608 459 1653">Нагрев на Δt</p>  <p data-bbox="148 1899 555 1973">α — коэффициент линейного расширения</p>	$M_A = \frac{3EJ_2}{nh} \left(2 + \frac{1}{k} + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$ $M_B = \frac{6EJ_2}{nh} \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$ $M_C = \frac{3EJ_2}{nh} \left[1 + (2+k) \frac{h^2}{l^2} \right] \alpha \Delta t$

Таблица 34. Изгибающие моменты в П-образной раме ($k = \frac{J_2 h}{J_1 l}$)

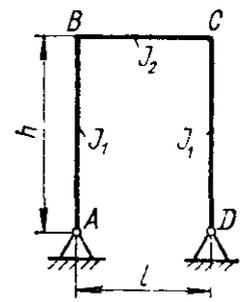
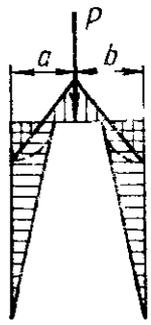
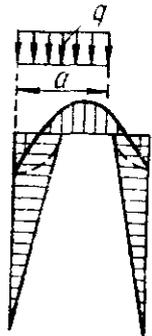
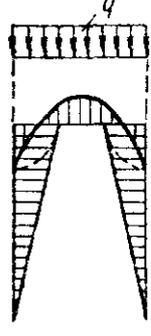
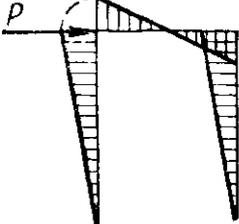
Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
<p>Стойки шарнирно оперты</p>  <p style="text-align: center;">$n = 3 + 2k$</p>	
	$M_B = M_C = \frac{3ab}{2nl} P; \quad M_P = \frac{(3 + 4k) ab}{2nl} P$
	$M_B = M_C = \frac{(3 - 2\alpha) \alpha^2 q l^2}{4n};$ $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_B = M_C = \frac{q l^2}{4n}$ $M_{\max} = (1 + 2k) \frac{q l^2}{8n}$
	$M_B = M_C = \frac{1}{2} h P$

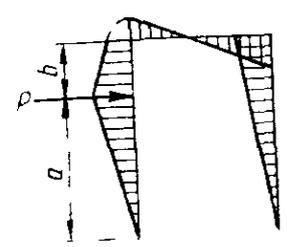
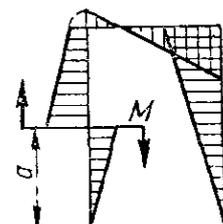
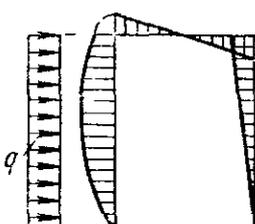
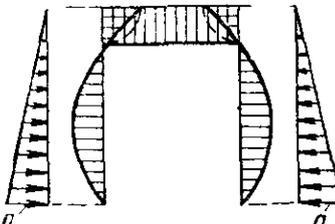
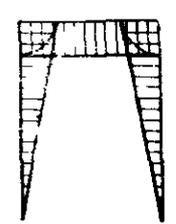
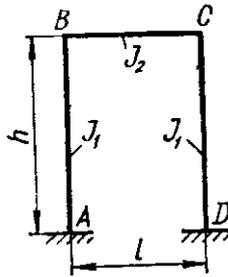
Схема нагрузки и люра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
	$M_B = \left[1 - \frac{(2 - \alpha) \alpha k}{n} \right] \frac{a}{2} P$ $M_C = \left[1 + \frac{(2 - \alpha) \alpha k}{n} \right] \frac{a}{2} P$ $M_P = (1 - \alpha) (Pb + M_B);$ $\alpha = \frac{b}{h}$
	$M_B = \frac{3 + (1 + 3\alpha^2) k}{2n} M$ $M_C = \frac{3 [1 + (1 - \alpha^2) k]}{2n} M;$ $\alpha = \frac{a}{h}$
	$M_B = (2 + k) \frac{3qh^2}{8n}$ $M_C = (6 + 5k) \frac{qh^2}{8n}$
	$M_B = M_C = \frac{7kqh^2}{60n}$
<p>Нагрев на Δt</p>  <p>α — коэффициент линейного расширения</p>	$M_B = M_C = \frac{3EJ_2\alpha\Delta t}{nh}$

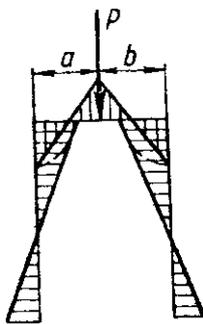
Схема нагрузки и эпюра M

Изгибающий момент M в характерных сечениях

Стойки
закреплены



$$n_1 = 2 + k \quad n_2 = 1 + 6k$$



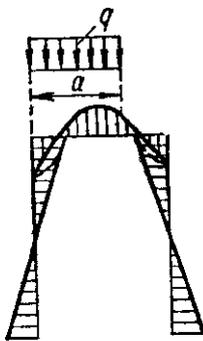
$$M_A = \left(\frac{1}{2n_1} - \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$$

$$M_B = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$$

$$M_C = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$$

$$M_D = \left(\frac{1}{2n_1} + \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P;$$

$$\alpha = \frac{b}{l}$$



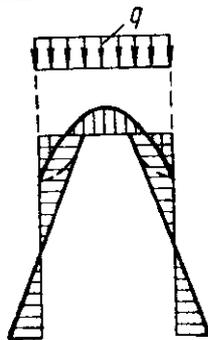
$$M_A = \alpha^2 \left[\frac{3 - 2\alpha}{n_1} - \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$$

$$M_D = \alpha^2 \left[\frac{3 - 2\alpha}{n_1} + \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$$

$$M_C = \alpha^2 \left[\frac{2(3 - 2\alpha)}{n_1} - \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$$

$$M_B = \alpha^2 \left[\frac{2(3 - 2\alpha)}{n_1} + \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$$

$$\alpha = \frac{a}{l}$$



$$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12n_1}; \quad M_B = M_C = \frac{ql^2}{6n_1}$$

$$M_{\max} = \frac{2 + 3k}{24n_1} ql^2$$

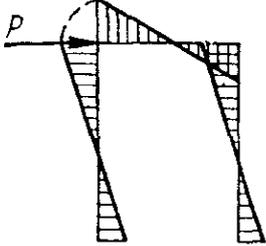
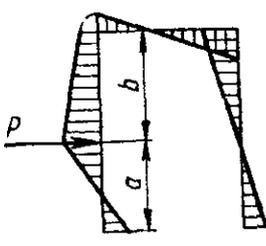
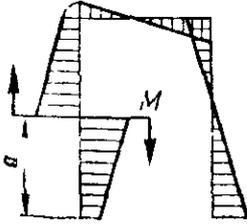
Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
	$M_A = M_D = \frac{1 + 3k}{2n_2} hP$ $M_B = M_C = \frac{3k}{2n_2} hP$
	$M_A = \left\{ 1 - \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} + \frac{\alpha[1 + \alpha(1+k)]}{n_1} \right\} \frac{a}{2} P$ $M_B = \left[\frac{3(1-\alpha)k}{n_2} - \frac{\alpha(1-\alpha)k}{n_1} \right] \frac{a}{2} P$ $M_D = \left\{ 1 - \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} - \frac{\alpha[1 + \alpha(1+k)]}{n_1} \right\} \frac{a}{2} P$ $M_C = \left[\frac{3(1-\alpha)k}{n_2} + \frac{\alpha(1-\alpha)k}{n_1} \right] \frac{a}{2} P;$ $\alpha = \frac{b}{h}$
	$M_A = \left[-\frac{3\alpha(2-\alpha)}{2} + 1 - \frac{\alpha(2-3\alpha)k}{2n_1} - \left(\frac{6\alpha k}{n_2} - 1 \right) \right] \frac{M}{2}$ $M_B = \alpha k \left(-\frac{2-3\alpha}{2n_1} + \frac{3}{n_2} \right) M$ $M_C = \alpha k \left(\frac{2-3\alpha}{2n_1} + \frac{3}{n_2} \right) M$ $M_D = \left[\frac{3\alpha(2-\alpha)}{2} - 1 + \frac{\alpha(2-3\alpha)k}{2n_1} - \left(\frac{6\alpha k}{n_2} - 1 \right) \right] \frac{M}{2};$ $\alpha = \frac{a}{h}$

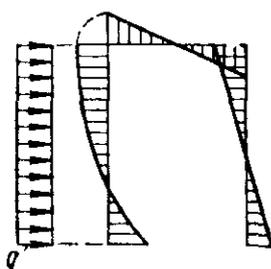
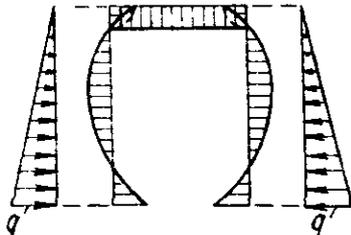
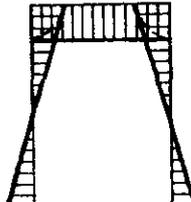
Схема нагрузки и эпюра M	Изгибающий момент M в характерных сечениях
	$M_A = \left(\frac{k+3}{6n_1} + \frac{1+4k}{n_2} \right) \frac{qh^2}{4}$ $M_B = \left(\frac{2}{n_2} - \frac{1}{6n_1} \right) k \frac{qh^2}{4}$ $M_C = \left(\frac{1}{6n_1} + \frac{2}{n_2} \right) k \frac{qh^2}{4}$ $M_D = \left(\frac{1+4k}{n_2} - \frac{3+k}{6n_1} \right) \frac{qh^2}{4}$
	$M_A = M_D = \frac{8+3k}{n_1} \frac{qh^2}{60}$ $M_B = M_C = \frac{qh^2}{30n_1}$
<p>Нагрев на Δt</p>  <p>α — коэффициент линейного расширения</p>	$M_A = M_D = \frac{3(1+k)EJ_2\alpha\Delta t}{kn_1h}$ $M_B = M_C = \frac{3EJ_2\alpha\Delta t}{n_1h}$

Таблица 35. Изгибающие моменты в замкнутой раме

$$\left(k = \frac{J_2 h}{J_1 l}; p = \frac{J_2}{J_3}; n = 1 + p + 6k; m = (2 + k) + \frac{p}{k}(3 + 2k) \right)$$

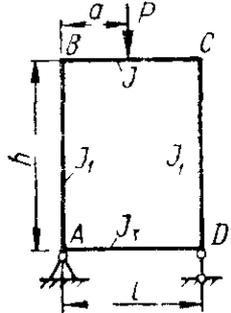
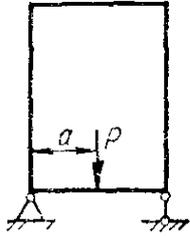
Схема нагрузки	Изгибающие моменты в узлах рамы (положительные моменты вызывают растяжение с внутренней стороны рамы)
	$M_{A, D} = \alpha(1 - \alpha) \left(\frac{1}{m} \mp \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2}$ $M_{B, C} = -\alpha(1 - \alpha) \left(\frac{2k + 3p}{km} \pm \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2}$ $\alpha = \frac{a}{l}$

Схема нагрузки

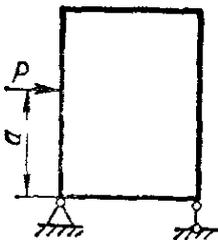
Изгибающие моменты в узлах рамы
(положительные моменты вызваны растяжением
внутренней стороны рамы)



$$M_{A, D} = \alpha(1 - \alpha) p \left(\frac{3 + 2k}{km} \pm \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2}$$

$$M_{B, C} = -\alpha(1 - \alpha) p \left(\frac{1}{m} \mp \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2};$$

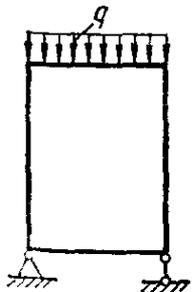
$$\alpha = \frac{a}{l}$$



$$M_{A, D} = \left\{ \frac{1 - \alpha}{m} [\alpha(1 + k) - (2 + k)] \mp \frac{1}{n} [1 + 3k(2 - \alpha)] \right\} \frac{Ph}{2}$$

$$M_{B, C} = \alpha \left\{ -\frac{1 - \alpha}{m} [\alpha(k + p) + p] \pm \frac{1}{n} (3\alpha k + p) \right\} \frac{Ph}{2};$$

$$\alpha = \frac{a}{h}$$



$$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12m};$$

$$M_B = M_C = -\frac{ql^2}{12} \frac{2k + 3p}{km}$$

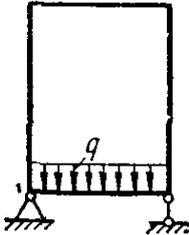
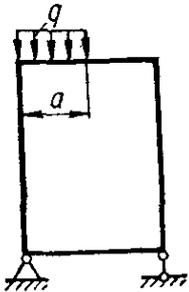
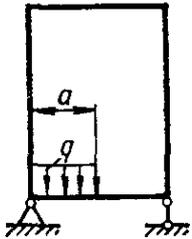
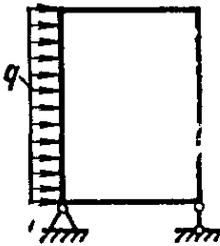
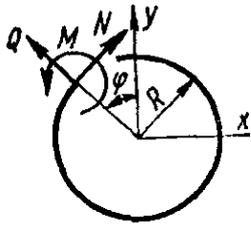
Схема нагрузки	Изгибающие моменты в узлах рамы (положительные моменты вызывают растяжение с внутренней стороны рамы)
	$M_A = M_D = \frac{3 + 2k}{km} p \frac{ql^2}{12};$ $M_B = M_C = -\frac{p}{m} \frac{ql^2}{12}$
	$M_{A, D} = \alpha^2 \left[\frac{3 - 2\alpha}{m} \pm \frac{3(1 - \alpha)^2}{n} \right] \frac{ql^2}{12}$ $M_{B, C} = -\alpha^2 \left[\frac{1}{km} (3 - 2\alpha) (2k + 3p) \pm \frac{3}{n} (1 - \alpha)^2 \right] \frac{ql^2}{12}; \quad \alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A, D} = \alpha^2 p \left[\frac{1}{km} (3 - 2\alpha) (2k + 3) \pm \frac{3}{n} (1 - \alpha)^2 \right] \frac{ql^2}{12}$ $M_{B, C} = -\alpha^2 p \left[\frac{3 - 2\alpha}{m} \pm \frac{3(1 - \alpha)^2}{n} \right] \frac{ql^2}{12};$ $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A, D} = -\left(\frac{3 + k}{6m} \pm \frac{1 + 4k}{n} \right) \frac{qh^2}{4}$ $M_{B, C} = -\left(\frac{k + 3p}{6m} \pm \frac{2k + p}{n} \right) \frac{qh^2}{4}$

Схема нагрузки	Изгибающие моменты в узлах рамы (положительные моменты вызывают растяжение с внутренней стороны рамы)
	$M_A = M_B = M_C = M_D = - \frac{1 + k \frac{h^2}{l^2}}{1 + k} \frac{ql^2}{12}$ <p style="text-align: center;">при $J_2 = J_3$</p>
	$M_A = M_D = - \frac{8 + 3k}{m} \frac{qh^2}{60}$ $M_B = M_C = - \frac{7 + 2k}{m} p \frac{qh^2}{60}$
	$M_{A, D} = - \left(\frac{1}{m} \mp \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$ $M_{B, C} = \left(\frac{3p + 2k}{km} \pm \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$
	$M_{A, D} = -p \left(\frac{3 + 2k}{km} \pm \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$ $M_{B, C} = -p \left(\frac{2 + k}{km} \mp \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$

Таблица 56 Усилия и перемещения при нагружении кольца в его



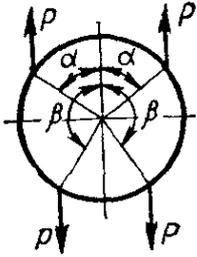
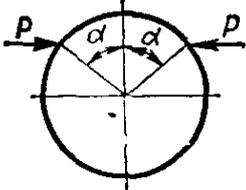
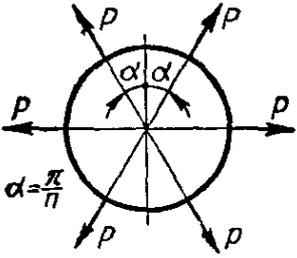
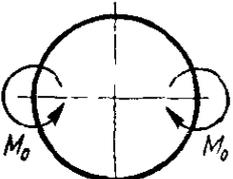
N, Q, M — нормальная и поперечная силы и изгибающий момент
 положительные направления для усилий, действующих
 δ_x, δ_y — изменения диаметра кольца в направлении x, y
 E — модуль упругости материала, F, J — площадь и момент инерции

Схема	N	Q
	qR	0
	$\frac{1}{2} P \sin \varphi$	$\frac{1}{2} P \cos \varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ $P (0,3183 \cos \varphi + \sin \varphi)$ $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ $P \cdot 0,3183 \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ $-P (0,3183 \sin \varphi - \cos \varphi)$ $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ $-P \cdot 0,3183 \sin \varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $P (0,3183 \sin^2 \alpha \cos \varphi + \sin \varphi)$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $P \cdot 0,3183 \sin^2 \alpha \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $P (\cos \varphi - 0,3183 \sin^2 \alpha \sin \varphi)$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $-P \cdot 0,3183 \sin^2 \alpha \sin \varphi$

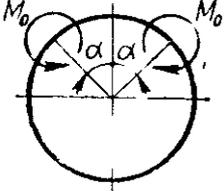
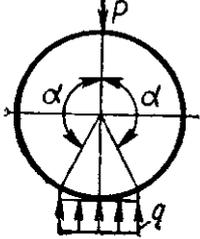
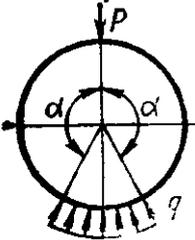
ПЛОСКОСТИ

момент в сечении кольца, определяемом углом φ (на рисунке показаны напереди лежащее сечение кольца в направлении возрастания угла φ), осей x и y (положительное значение соответствует увеличению диаметра), момент инерции сечения кольца

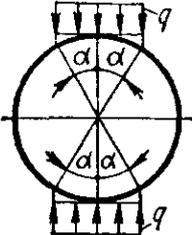
M	δ
0	$\delta_x = \delta_y = \frac{qR^2}{EF}$
$-PR \left(0,3183 - \frac{1}{2} \sin \varphi \right)$	$\delta_x = -0,137 \frac{PR^3}{EJ}$ $\delta_y = 0,149 \frac{PR^3}{EJ}$
$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ $PR (0,3183 \cos \varphi + \sin \varphi - 0,8183)$ $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ $PR (0,1817 + 0,3183 \cos \varphi)$	$\delta_x = -0,1366 \frac{PR^3}{EJ}$ $\delta_y = 0,1488 \frac{PR^3}{EJ}$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $PR [0,3183 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi - 1) - \sin \alpha + \sin \varphi]$ $0 \leq \varphi \leq \pi$ $PR [0,3183 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi - 1)]$	$\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + 2) + 0,6366 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) - 2 \sin \alpha \right]$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) + 0,6366 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) - \sin \alpha \right]$

Схема	N	Q
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $P [0,3183 \cos \varphi (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)]$ $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ $P [0,3183 \cos \varphi (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) + \sin \varphi]$ $\beta \leq \varphi \leq \pi$ $P [0,3183 \cos \varphi (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)]$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $P [0,3183 \sin \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)]$ $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ $P [0,3183 \sin \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) + \cos \varphi]$ $\beta \leq \varphi \leq \pi$ $P [0,3183 \sin \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)]$
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $P [0,3183 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - 1] \cos \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $P \cdot 0,3183 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $P [0,3183 (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) + 1] \sin \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $P \cdot 0,3183 (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \sin \varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $\frac{P}{2 \sin \alpha} \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $\frac{P}{2 \sin \alpha} \sin \varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $\frac{M_0}{R} 0,6366 \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $-\frac{M_0}{R} 0,6366 \sin \varphi$

M	δ
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $PR [0,3183 (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \varphi + \sin^2 \beta \cos \varphi) - \sin \beta + \sin \alpha]$ $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ $PR [0,3183 (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \varphi + \sin^2 \beta \cos \varphi) - \sin \beta + \sin \varphi]$ $\beta \leq \varphi \leq \pi$ $PR [0,3183 (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \sin^2 \alpha \times \cos \varphi + \sin^2 \beta \cos \varphi)]$	$\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \right] + 0,6366 (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + 1 - 2 \sin \beta$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (\sin \beta \cos \beta + \beta - \sin \alpha \cos \alpha - \alpha) + 0,6366 (\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \alpha - \sin \beta \right]$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $PR [0,3183 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi) - \cos \varphi + \cos \alpha]$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $PR \cdot 0,3183 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi)$	$\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[0,6366 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \frac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \right]$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[0,6366 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right]$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $\frac{PR}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$ <p>при $\varphi = 0, 2\alpha, 4\alpha, \dots$</p> $M_{\max}^{(+)} = \frac{PR}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$ <p>при $\varphi = \alpha, 3\alpha, \dots$</p> $M_{\max}^{(-)} = -\frac{PR}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right)$	<p>Радиальное перемещение точки приложения силы от центра</p> $\frac{PR^3}{2EJ} \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} \right]$ <p>Радиальное перемещение в точках $\varphi = 0, 2\alpha, 4\alpha, \dots$ (к центру)</p> $\frac{PR^3}{2EJ} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)$
$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ $M_0 \left(0,6366 \cos \varphi - \frac{1}{2} \right)$ $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ $M_0 \left(0,6366 \cos \varphi + \frac{1}{2} \right)$	$\delta_x = 0$ $\delta_y = 0$

Схема	N	Q
	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $\frac{M_0}{R} 0,6366 \sin \alpha \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $-\frac{M_0}{R} 0,6366 \sin \alpha \sin \varphi$
<p data-bbox="277 846 501 882">$P = 2qR \sin \alpha$</p> 	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR \left(\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cos \varphi + \right.$ $\left. + \sin \alpha \sin \varphi \right)$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $-qR \left(\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cos \varphi + \right.$ $\left. + \sin^2 \varphi \right)$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $qR \left(\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \sin \varphi - \right.$ $\left. - \sin \alpha \cos \varphi \right)$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $qR \left(\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \sin \varphi - \right.$ $\left. - \sin \varphi \cos \varphi \right)$
<p data-bbox="280 1552 501 1588">$P = 2qR \sin \alpha$</p> 	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR [\sin \alpha \sin \varphi +$ $+ (1 + \cos \alpha) \cos \varphi] -$ $- N(\pi) \cos \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $-qR (1 + \cos \varphi) -$ $- N(\pi) \cos \varphi$ $N(\pi) = -\frac{qR}{\pi} (\pi -$ $- \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR [\sin \alpha \cos \varphi -$ $- (1 + \cos \alpha) \sin \varphi] +$ $+ N(\pi) \sin \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $qR \sin \varphi + N(\pi) \sin \varphi$

M	δ
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M_0 [0,3183 (2 \cos \varphi \sin \alpha + \alpha) - 1]$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M_0 [0,3183 (2 \cos \varphi \sin \alpha + \alpha)]$	$\delta_x = \frac{M_0 R^2}{EJ} (0,6366\alpha - \sin \alpha)$ $\delta_y = \frac{M_0 R^2}{EJ} (0,6366\alpha + \cos \alpha - 1)$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M(0) - qR^2 \left[\sin \alpha \sin \varphi - \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha (1 - \cos \varphi) \right]$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M(0) + qR^2 \left[\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) \right]$ $M(0) = qR^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{\pi} \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} - \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{4} \right) \right]$	$\delta_x = \frac{2qR^4}{EJ} \left[\frac{1}{4} - \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{\sin^3 \alpha}{12} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{4} - \sin \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \alpha \right) \right]$ $\delta_y = -\frac{2qR^4}{EJ} \left[\frac{1}{12} + \frac{\sin^2 \alpha}{4} - \frac{\alpha \sin \alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{12} - \frac{\cos \alpha}{6} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha \sin^2 \alpha}{2} + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha}{4} - \sin \alpha \right) \right]$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $qR^2 \left[\sin \alpha \sin \varphi + (1 + \cos \alpha) \times \right.$ $\left. \times \cos \varphi - \frac{1}{\pi} (\pi - \alpha + \sin \alpha) \right] +$ $+ N(\pi) R \cos \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $qR^2 \left[\cos \varphi - \frac{1}{\pi} (\sin \alpha - \alpha) \right] +$ $+ N(\pi) R \cos \varphi$	$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ $\delta_x = -\frac{qR^4}{EJ} \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2 \sin \alpha}{\pi} - \frac{3 \sin \alpha}{2} - \frac{\pi \cos \alpha}{2} + \frac{\alpha \cos \alpha}{2} \right)$ $0 \leq \alpha \leq \pi$ $\delta_y = \frac{qR^4}{EJ} \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2 \sin \alpha}{\pi} - \frac{\alpha \sin \alpha}{2} - \cos \alpha \right)$

Схема	N	Q
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR \sin^2 \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ $-qR \sin \alpha \sin \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $qR \sin \varphi \cos \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ $qR \sin \alpha \cos \varphi$

M	δ
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M(0) = \frac{qR^2}{2} \sin^2 \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ $M(0) = qR^2 \left(\sin \alpha \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)$ $M(0) = qR^2 \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{2} + \alpha \sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right]$	$\delta_x = \frac{qR^4}{EJ} \left[-\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} + \frac{1}{\pi} (\alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \sin^2 \alpha) \right]$ $\delta_y = -\frac{qR^4}{EJ} \left[\sin^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{3} - \alpha \sin \alpha - \frac{2 \cos \alpha}{3} + \frac{2}{3} + \frac{\pi \sin \alpha}{2} - \frac{1}{\pi} (2\alpha \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha) \right]$

14.1. Определение напряжений в брусках большой кривизны

К кривым брускам относятся грузоподъемные крюки, проушины, звенья цепей, ободы шкивов и колес, арки и т. п. Оси этих брусков являются плоскими кривыми. В поперечных сечениях плоского кривоного бруса в общем случае действуют три внутренних силовых фактора M , Q и N , правило определения которых такое же, как и в брусках с прямой осью. Дифференциальные зависимости между M , Q и a были приведены в разделе 3.9.

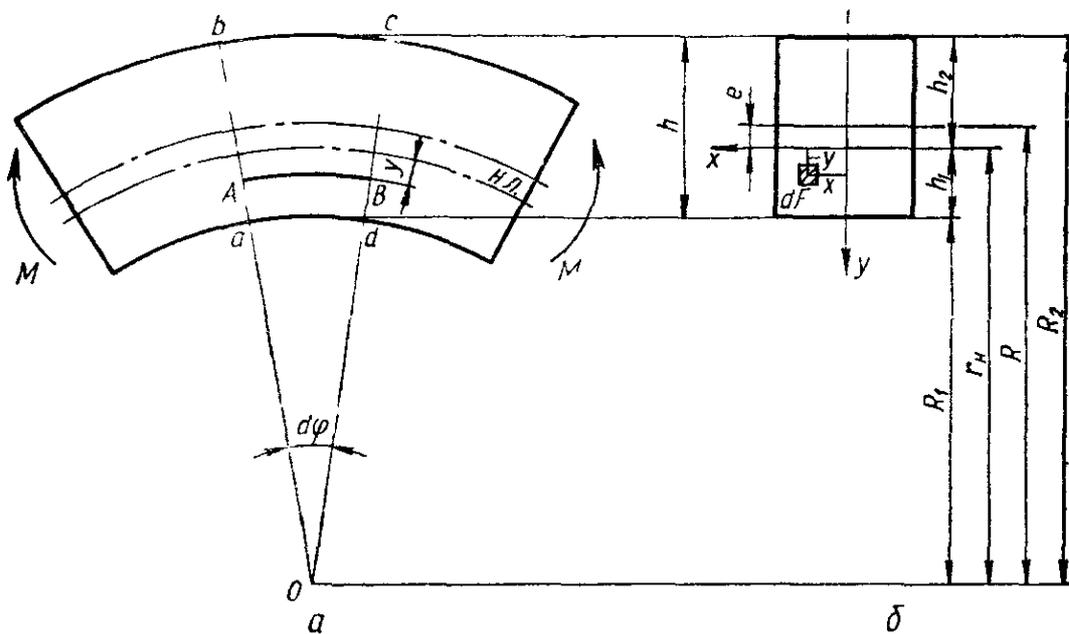


Рис 286

Представляют большой практический интерес кривые бруска, имеющие продольную плоскость симметрии (рис 286, а, б), в которой обычно действуют внешние нагрузки.

Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях кривых брусков иное, чем в брусках с прямой осью. Это различие при прочих равных условиях тем больше, чем больше кривизна бруса, характеризуемая отношением высоты поперечного сечения h кривоного стержня к радиусу кривизны R его оси. В связи с этим принято различать бруска малой кривизны, у которых $h/R < 1/5$, и бруска большой кривизны, у которых $h/R \geq 1/5$.

При изгибе брусков малой кривизны нормальные напряжения с достаточной степенью точности можно определять по формуле Навье (10.6), выведенной для балок с прямой осью. Максимальные напряжения, подсчитанные по формуле Навье для бруса прямоугольного сечения с отношением $h/R = 1/15$, отличаются на 2% от напряжений

вычисленных по формулам для бруса большой кривизны; при $h/R = 1/10$ — на 3,5 %, при $h/R = 1/5$ — на 7 %

Рассмотрим случай чистого изгиба бруса большой кривизны ($h/R \geq 1/5$) (рис. 286). Предполагаем, что радиус r_n нейтрального слоя неизвестен и не совпадает с радиусом R оси стержня.

При выводе формулы для определения нормальных напряжений в брус большой кривизны исходят из тех же гипотез, что и при выводе формулы Навье, т. е. пользуются гипотезой плоских сечений и гипотезой о том, что продольные волокна материала не дают одно на другое. Выбираем направление осей сечения x и y , как показано на

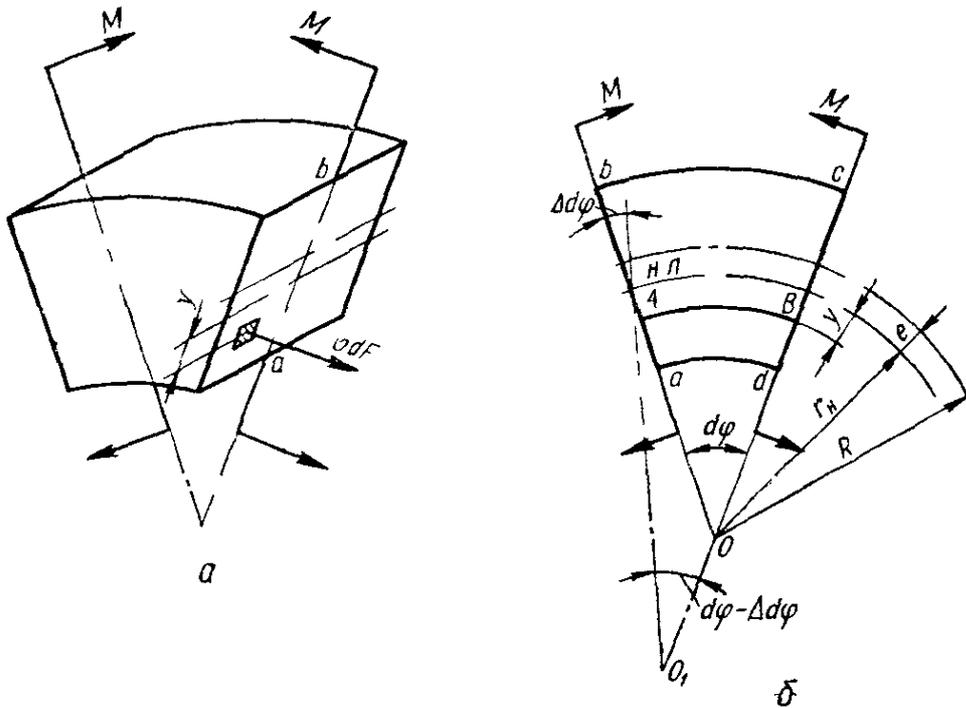


Рис. 287

рис. 286 (при этом ось x считается совпадающей с нейтральной линией, положение которой пока неизвестно). Направление y к центру кривизны принято за положительное

Рассмотрим *статическую сторону задачи* и запишем условие равновесия применительно к элементу бруса (рис. 287, а), оставшемся после удаления отсеченных частей. Для нашего случая, когда в сечении действует один силовой фактор M_x , будем иметь

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad (14.1)$$

$$\int_F \sigma y dF = M. \quad (14.2)$$

В силу симметрии F

$$M_y = \int_F \sigma x dF = 0.$$

Рассмотрим *геометрическую сторону задачи*. Относительное удлинение произвольно выделенного элементарного участка AB , находя-

шегося на расстоянии y от нейтральной линии (рис. 287, б) и получившего в результате деформации удлинение $y\Delta d\varphi$, равно

$$\varepsilon = \frac{y\Delta d\varphi}{(r_n - y) d\varphi}, \quad (14.3)$$

где $(r_n - y) d\varphi$ — длина элемента до деформации.

Из рассмотрения физической стороны задачи, определяемой законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r_n - y}, \quad (14.4)$$

условие (14.1) перепишем в виде

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0$$

Так как

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \neq 0,$$

то

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0. \quad (14.5)$$

Из (14.2) находим

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = M \quad (14.6)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} &= \int_F \frac{y^2 + r_n y - r_n y}{r_n - y} dF = - \int_F \left(y - \frac{r_n y}{r_n - y} \right) dF = \\ &= - \int_F y dF + r_n \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = -S_x + 0, \end{aligned}$$

или

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = -S_x = -(-e) F = eF, \quad (14.7)$$

можем представить (14.6) так:

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} eF = M.$$

Отсюда

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{eF}, \quad (14.8)$$

где e — расстояние от нейтральной линии до центра тяжести; площадь поперечного сечения

Подставив (14.8) в (14.4), найдем формулу для определения нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M y}{eF (r_n - y)}, \quad (14.9)$$

или

$$\sigma = - \frac{My}{S_x (r_n - y)}. \quad (14.10)$$

Здесь M — изгибающий момент в сечении; S_x — статический момент площади сечения кривого бруса относительно нейтральной линии.

Из анализа (14.9) или (14.10) видно, что нормальные напряжения по высоте распределяются по гиперболическому закону (рис. 288, б). Абсолютные величины напряжений в крайних волокнах сечения бруса согласно (14.9) определяются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{FeR_1}; \quad \sigma_2 = \frac{Mh_2}{FeR_2}, \quad (14.11)$$

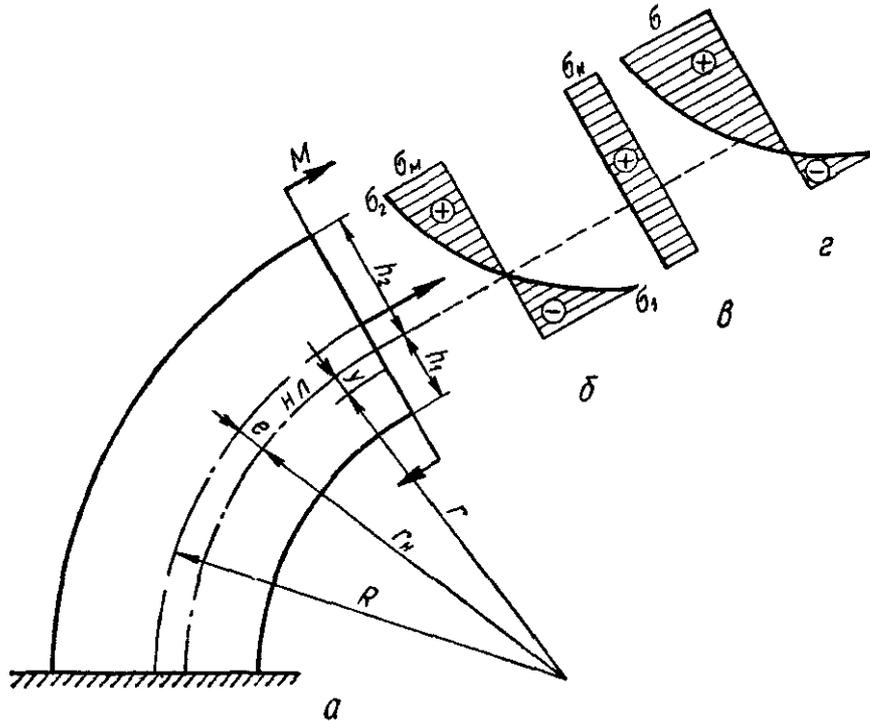


Рис. 288

где R_1 и R_2 — соответственно радиусы кривизны внутренних и внешних волокон кривого бруса; h_1 и h_2 — расстояния от нейтральной линии до этих волокон. Знак напряжений определяется по направлению изгибающего момента в сечении.

Формулы (14.9) — (14.11) могут быть использованы, если известна входящая в эти формулы величина e или радиус нейтрального слоя r_n , поскольку

$$e = R - r_n, \quad (14.12)$$

где R — радиус слоя, в котором расположены центры тяжести сечения бруса. Радиус r_n определим из уравнения (14.5).

Произведя замену переменных $r = r_n - y$ или $y = r_n - r$, перепишем уравнение (14.5) в следующем виде:

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = \int_F \frac{r_n - r}{r} dF = 0,$$

$$r_H \int_F \frac{dF}{r} - F = 0.$$

Отсюда

$$r_H = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \quad (14.12)$$

Так как для прямоугольного сечения $F = bh$ (h — высота сечения; b — ширина сечения); $dF = bdr$, формула (14.13) может быть записана в виде

$$r_H = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bdr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \quad (14.13)$$

Воспользовавшись рядом

$$\begin{aligned} \ln \frac{R_2}{R_1} &= \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}} = \\ &= \frac{h}{R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

получим

$$e = R - r_H = R - \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots}.$$

В первом приближении

$$e = R \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2} \right) \approx \frac{h^2}{12R}. \quad (14.14)$$

Во втором приближении

$$e = \frac{h^2}{12R} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 \right]. \quad (14.15)$$

На основании (14.13) аналогичным путем можно получить формулы для e в случае других форм поперечного сечения. В табл. 38 приведены радиусы кривизны r_H нейтрального слоя для сечений различной формы. Из (14.12) по известным r_H могут быть определены величины e . Для некоторых форм поперечного сечения e можно определить по табл. 38.

14.2. Расчет на прочность

Условие прочности для стержня малой кривизны, когда в его сечении действуют изгибающий момент и нормальная сила (рис. 288, а) имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (14.17)$$

где F — площадь сечения; W — момент сопротивления сечения (см. раздел 2.8).

Для стержня большой кривизны на основании (14.9) условие прочности будет

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{Fe(r_n - y)} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (14.18)$$

При этом нужно рассматривать точки сечения, в которых суммарные напряжения от изгиба и растяжения будут наибольшими (рис. 288, б, в, г). Для этих точек в формулу (14.18) следует подставлять $y = h_1$ или $y = h_2$ и соответственно $r_n - y = R_1$ или $r_n - y = R_2$.

Если брус большой кривизны изготовлен из материала, для которого допустимые напряжения на растяжение $[\sigma_+]$ и сжатие $[\sigma_-]$ различны (некоторые чугуны, пластмассы и др.), то условия прочности должны выполняться для крайних точек сечения как в растянутой, так и в сжатой области.

14.3. Определение перемещений

Для определения перемещений в стержнях любой кривизны удобно пользоваться методом Мора (раздел 12.6)

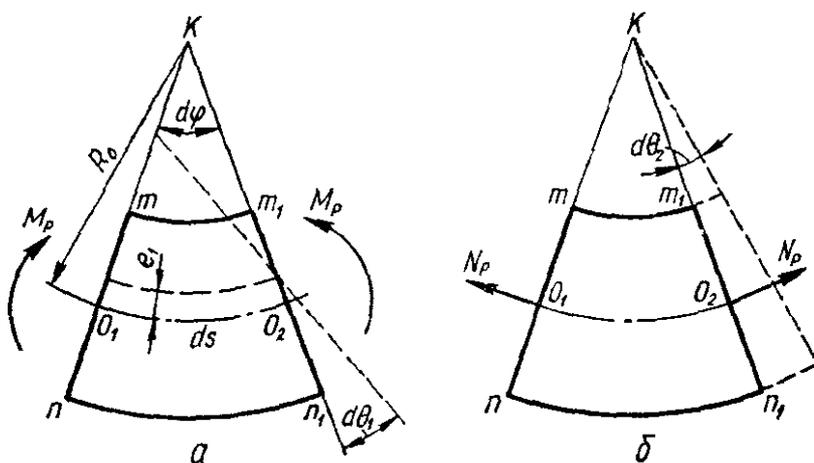


Рис 289

В стержнях малой кривизны можно пренебречь продольной деформацией и деформацией сдвига. Тогда в случае плоского изгиба можно пользоваться формулой Мора в виде

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (14.19)$$

При плоском изгибе бруса большой кривизны деформации элемента от действия усилий M_P и N_P гоже состоят из удлинения $\Delta(ds)$ отрезка

ds оси и относительного поворота $d\theta$ сечений, ограничивающих элемент (рис. 289, а, б). Взаимный угол поворота сечений $\Delta d\varphi = d\theta_1$, вызванный изгибающим моментом, можно определить из (14.8),

$$d\theta_1 = \frac{M_P d\varphi}{ES} = \frac{M_P ds}{ESR_0}.$$

где $S = |S_x| = eF$.

Угол поворота сечений, вызванный осевыми силами вследствие неодинаковой длины волокон элемента (рис. 289, б), равен

$$d\theta_2 = \frac{N_P ds}{EFR_0}.$$

Полный угол поворота

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_P ds}{ESR_0} + \frac{N_P ds}{EFR_0}. \quad (14.20)$$

Удлинение элемента в результате действия осевых сил

$$\Delta(ds)_1 = \frac{N_P ds}{EF}.$$

Удлинение, вызванное поворотом сечения на угол $d\theta_1$,

$$\Delta(ds)_2 = ed\theta_1 = \frac{M_P ds}{ESR_0} e = \frac{M_P ds}{EFR_0}.$$

Полное удлинение осевого волокна

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{N_P ds}{EF} + \frac{M_P ds}{EFR_0}. \quad (14.21)$$

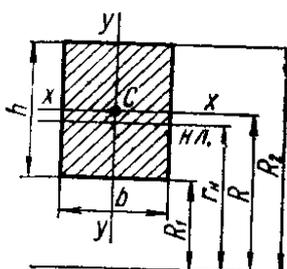
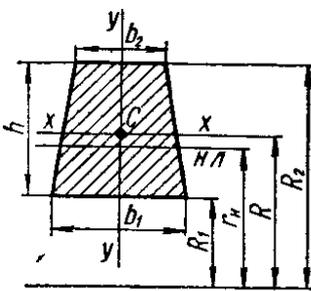
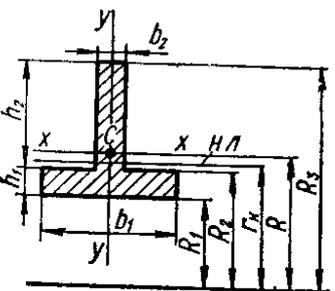
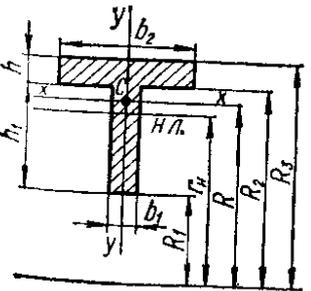
Подставляя (14.20) и (14.21) в формулу возможных перемещений (12.27), находим общую формулу для определения перемещений большой кривизны

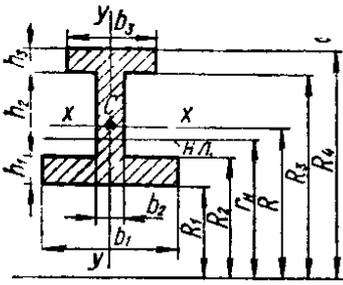
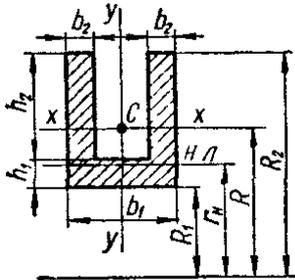
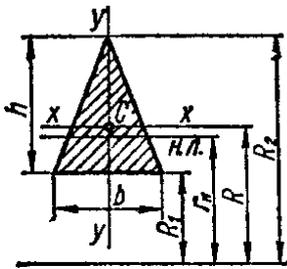
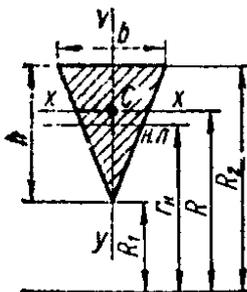
$$\Delta_{iP} = \int_s \left[\frac{\bar{M}_i M_P}{ESR_0} + \frac{\bar{N}_i M_P + \bar{M}_i N_P}{EFR_0} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} + \right. \\ \left. + k \frac{\bar{Q}_i Q_P}{GF} \right] ds. \quad (14.22)$$

Обычно на практике пренебрегают влиянием поперечной сдвига в результате чего последнее слагаемое в (14.22) не учитывается.

В табл. 39, 40 приведены выражения для определения перемещений свободного конца консольного кругового стержня постоянного поперечного сечения при различных схемах его нагружения, а в табл. 41 — значения определенных интегралов, часто встречающихся при определении перемещений в кривых стержнях.

Таблица 37. Радиус кривизны нейтрального слоя r_n для сечений различной формы

Сечение (C — центр тяжести)	Формула для определения r_n
<p>Прямоугольник</p> 	$\frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{\ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}}$ $\ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{h}{R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right]$
<p>Трапеция</p> 	$2 \left[\frac{h(b_2 + b_1)}{b_1 R_2 - b_2 R_1} \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2) \right]$
<p>Тавр</p> 	$\frac{b_2 h_2 + b_1 h_1}{b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$
<p>Тавр</p> 	$\frac{b_2 h_2 + b_1 h_1}{b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$

(сечение (C — центр тяжести))	Формула для определения r_H
<p>Двутавр</p> 	$\frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3}}$
<p>Корытное сечение</p> 	$\frac{b_1 h_1 + 2b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_2 - h_2}{R_1} + 2b_2 \ln \frac{R_2}{R_2 - h_2}}$
<p>Треугольник</p> 	$\frac{h}{2 \left[\frac{R_2}{h} \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right]}$
<p>Треугольник</p> 	$2 \left[1 - \frac{R_1}{R_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$

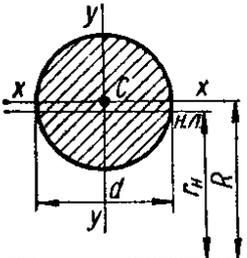
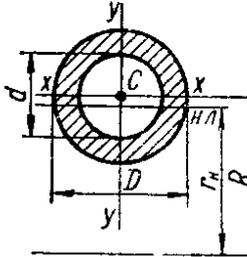
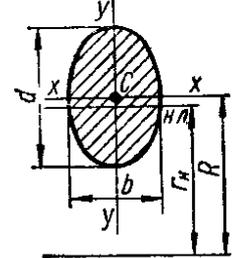
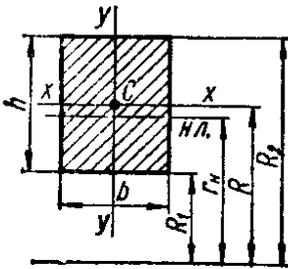
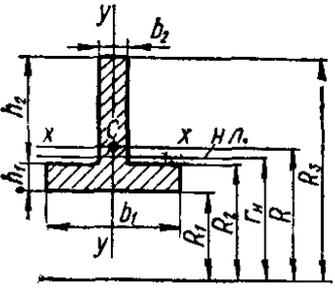
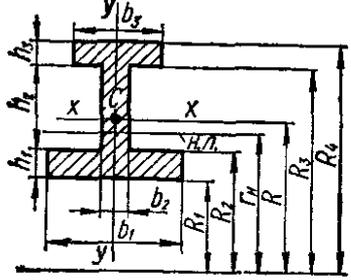
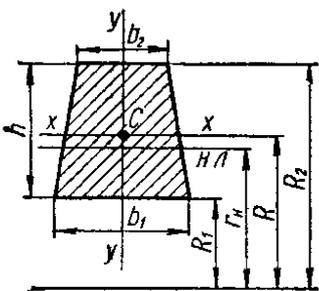
Сечение (C — центр тяжести)	Формула для определения r_H
<p>Круг</p> 	$\frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$
<p>Кольцевое сечение</p> 	$\frac{\sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R^2 - D^2}}{4} =$ $= \frac{D^2 - d^2}{4(\sqrt{4R^2 - d^2} - \sqrt{4R^2 - D^2})}$
<p>Овальное сечение</p> 	$\frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$

Таблица 38. Значение коэффициента k в формуле $e = kR$

Сечение	R/a	k
<p>Прямоугольник</p>  <p>$a = R - R_1 = h/2$</p>	1,2	0,305
	1,4	0,204
	1,6	0,149
	1,8	0,112
	2,0	0,090
	2,2	0,077
	2,4	0,065
	2,6	0,055
	2,8	0,047
	3,0	0,041
	3,5	0,028
	4,0	0,021
	6,0	0,0093
8,0	0,0052	
10,0	0,0033	

Сечение	R/a	k
<p>Тавр</p>  <p>$b_1 = 4b_2; h_1 = 1,5b_2; h_2 = 4,5b_2;$ $a = R - R_1 = 2,04b_2$</p>	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,418 0,299 0,229 0,183 0,149 0,125 0,106 0,091 0,079 0,069 0,052 0,040 0,018 0,010 0,0065</p>
<p>Двутавр</p>  <p>a) $b_1 = 6b_2; b_3 = 4b_2,$ $h_1 = 2b_2; h_2 = 3b_2; h_3 = b_2;$ $a = R - R_1 = 2,34b_2$</p>	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,409 0,292 0,224 0,178 0,144 0,120 0,103 0,089 0,077 0,067 0,049 0,038 0,018 0,010 0,0065</p>
<p>б)</p> <p>$b_1 = b_3 = 3b_2; h_1 = h_3 = b_2;$ $h_2 = 4b_2;$ $a = R - R_1 = 3b_2$</p>	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,408 0,285 0,208 0,160 0,127 0,104 0,088 0,077 0,067 0,058 0,041 0,030 0,013 0,0076 0,0048</p>

Сечение	R/a	k		
в) $b_1 = b_3 = 6b_2;$ $h_1 = h_3 = b_2; \quad h_2 = 4b_2;$ $a = R - R_1 = 3b_2$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,453 0,319 0,236 0,183 0,147 0,122 0,104 0,090 0,078 0,067 0,048 0,036 0,016 0,0089 0,0057		
	Трапеция  а) $b_1 = 2b_2; \quad h = (1 \div 3) b_2;$ $a = R - R_1 = \frac{4}{9} h$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,336 0,229 0,168 0,128 0,102 0,084 0,071 0,061 0,053 0,046 0,033 0,024 0,011 0,0060 0,0039	
		б) $b_1 = 4b_2; \quad h = 5b_2;$ $a = R - R_1 = 2b_2 = 0,4h$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,352 0,243 0,179 0,138 0,110 0,092 0,078 0,067 0,058 0,050 0,037 0,028 0,012 0,0060 0,0039

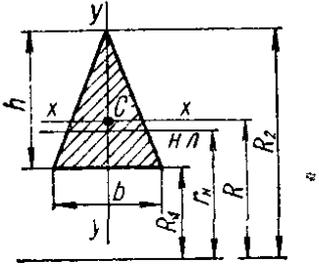
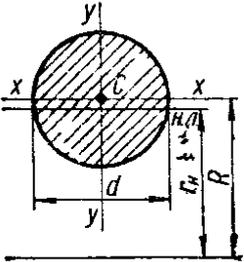
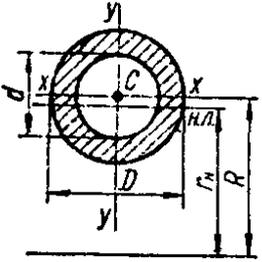
Сечение	R/a	k
<p>Треугольник, у которого</p> $h = \frac{3}{5} b;$ $a = R - R_1 = \frac{h}{3} = \frac{b}{5}$ 	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,361 0,251 0,186 0,144 0,116 0,096 0,082 0,070 0,060 0,052 0,038 0,029 0,013 0,0060 0,0039</p>
<p>Круг</p>  $a = \frac{d}{2}$	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,224 0,151 0,108 0,084 0,069 0,058 0,049 0,042 0,036 0,030 0,022 0,016 0,0070 0,0039 0,0025</p>
<p>Кольцевое сечение</p>  $D = 2d; \quad a = \frac{D}{2} = d$	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,269 0,182 0,134 0,104 0,083 0,068 0,057 0,049 0,043 0,038 0,028 0,020 0,0087 0,0049 0,0031</p>

Таблица 39. Перемещения свободного конца консольного кругового стержня постоянного сечения при нагружении в его плоскости (w , v , θ — вертикальное, горизонтальное и угловое перемещения соответственно)

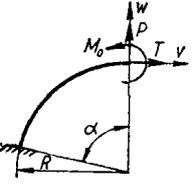
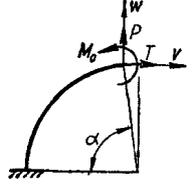
Схема	w	v	θ
	$\frac{R^2}{EJ} \left[M_0 (1 - \cos \alpha) + PR \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - TR \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2} \right]$	$\frac{R^2}{EJ} \left[-M_0 (\alpha - \sin \alpha) - PR \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2} + TR \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \right]$	$\frac{R}{EJ} [M_0 \alpha + PR (1 - \cos \alpha) - TR (\alpha - \sin \alpha)]$
	$\frac{R^2}{EJ} \left[M_0 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + PR \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right) - TR \left(\cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) \right]$	$\frac{R^2}{EJ} \left[-M_0 (\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) - PR \left(\cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) + TR \left(\alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha + \frac{3}{4} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha \right) \right]$	$\frac{R}{EJ} [M_0 \alpha + PR (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - TR (\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha)]$

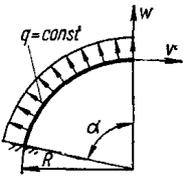
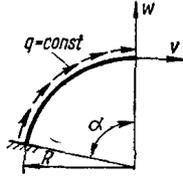
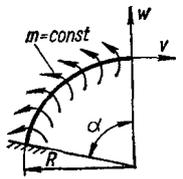
Схема	w	v	θ
	$\frac{qR^4}{EJ} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$-\frac{qR^4}{EJ} \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{qR^3}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$
	$\frac{qR^4}{EJ} \left(\frac{\alpha}{2} + \alpha \cos \alpha - \sin \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{qR^4}{EJ} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$	$\frac{qR^3}{EJ} \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right)$
	$\frac{mR^3}{EJ} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$	$\frac{mR^3}{EJ} (1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha)$	$\frac{mR^2}{EJ} \frac{\alpha^2}{2}$

Таблица 40. Перемещения свободного конца консольного кругового стержня постоянного сечения при нагружении в перпендикулярной плоскости (λ — отношение жесткостей сечения при изгибе EJ и кручении GJ_k)

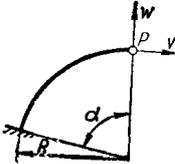
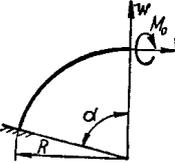
Схема	Перемещение, перпендикулярное к плоскости ω	Угол поворота вокруг оси ν	Угол поворота вокруг оси ω
	$\frac{PR^3}{EJ} \left(\frac{1+3\lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda-1}{4} \times \right. \\ \left. \times \sin 2\alpha - 2\lambda \sin \alpha \right)$	$\frac{PR^2}{EJ} \left(\frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha + \right. \\ \left. + \frac{1+\lambda}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right)$	$\frac{PR^2}{EJ} \left[\frac{1-\lambda}{4} \sin^2 \alpha + \right. \\ \left. + \lambda (1 - \cos \alpha) \right]$
	$\frac{M_0 R^2}{EJ} \left(\frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha + \right. \\ \left. + \frac{1+\lambda}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right)$	$\frac{M_0 R}{EJ} \left(\frac{1+\lambda}{2} \alpha + \right. \\ \left. + \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha \right)$	$\frac{M_0 R}{EJ} \frac{\lambda-1}{2} \sin^2 \alpha$

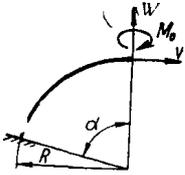
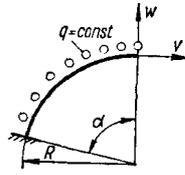
Схема	Перемещение, перпендикулярное к плоскости wv	Угол поворота вокруг оси v	Угол поворота вокруг оси w
	$\frac{M_0 R^2}{EJ} \left[\frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha + \lambda (1 - \cos \alpha) \right]$	$\frac{M_0 R}{EJ} \frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha$	$\frac{M_0 R}{EJ} \left(\frac{1 + \lambda}{2} \alpha - \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha \right)$
	$\frac{q R^4}{EJ} [(1 - \cos \alpha)^2 + \lambda (\alpha - \sin \alpha)^2]$	$\frac{q R^3}{EJ} \left[(\lambda + 1) (1 - \cos \alpha) - \frac{\lambda - 1}{4} (1 - \cos 2\alpha) - \lambda \alpha \sin \alpha \right]$	$\frac{q R^3}{EJ} \left[(\lambda + 1) \left(\sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha - \lambda \alpha \cos \alpha \right]$

Таблица 41. Значения определенных интегралов, часто встречающихся при определении перемещений в кривых стержнях

Интеграл	Пределы интегрирования			
	от 0 до α	от 0 до $\pi/4$	от 0 до $\pi/2$	от 0 до π
$\int \sin \varphi d\varphi$	$1 - \cos \alpha$	0,293	1	2
$\int \cos \varphi d\varphi$	$\sin \alpha$	0,707	1	0
$\int \sin^2 \varphi d\varphi$	$-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,143	0,785	1,571
$\int \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,643	0,785	1,571
$\int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^3 \alpha}{3}$	0,118	0,333	0
$\int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$	$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{3}$	0,216	0,333	0,667
$\int \sin 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$	0,5	1	0
$\int \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$	0,5	0	0
$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^2 \alpha}{2}$	0,25	0,5	0
$\int \varphi \sin \varphi d\varphi$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$	0,152	1	3,141
$\int \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1$	0,262	0,571	-2
$\int \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4} (\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha) - \frac{1}{8} (\cos 2\alpha - 1)$	0,0833	0,868	2,47
$\int \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4} (\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha) + \frac{1}{8} (\cos 2\alpha - 1)$	0,226	0,368	2,47
$\int \varphi \sin 2\varphi d\varphi$	$\frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$	0,25	0,785	-1,571
$\int \varphi \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{4} (\cos 2\alpha - 1) + \frac{\alpha \sin 2\alpha}{2}$	0,143	-6,5	0
$\int \sin (\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\alpha \cos \alpha}{2}$	0,076	0,5	1,571
$\int \cos (\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{\alpha \sin \alpha}{2}$	0,278	0,785	0

**РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ
И ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ**

**15.1. Толстостенный цилиндр, подверженный внутреннему
и наружному давлению**

Цилиндр считается толстостенным, если толщина его стенки больше одной десятой его среднего радиуса.

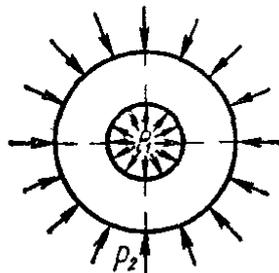
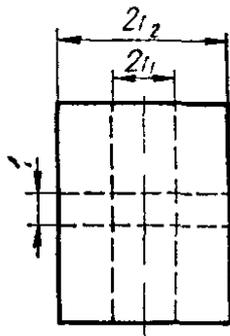


Рис 290

Рассмотрим цилиндр, находящийся под действием внутреннего p_1 и наружного p_2 давлений (рис 290), r_1 и r_2 — внутренний и наружный радиусы цилиндра. Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации в цилиндре будут также симметричны относительно его оси.

Двумя сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра, выделим кольцо единичной длины (рис. 290). Из этого кольца вырежем элемент $abcd$ (рис. 291, а) двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и образующими между собой угол $d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$ (рис. 291, б). По граням этого элемента будут действовать радиальные σ_r и тангенциальные σ_θ напряжения, заменяющие воздействие отброшенной части цилиндра и удовлетворяющие условиям равновесия элемента. Очевидно σ_θ и σ_r будут главными напряжениями.

Определение $\sigma_r = f(p_1, p_2, r)$ и $\sigma_\theta = f(p_1, p_2, r)$ начнем из рассмотрения *статической стороны задачи* и составим уравнения статики в соответствии с принятой системой координат (рис. 291, в)

$$\sum X = 0; \sum Y = 0.$$

Вследствие симметрии элемента второе условие удовлетворяется тождественно, а первое после подстановки выражений для усилий принимает вид

$$\sum X = -\sigma_r r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r) (r + dr) d\theta - 2 \left(\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} \right) = 0.$$

Принимая $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ и отбрасывая величины второго порядка малости, получаем

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \tag{15.1}$$

Это уравнение содержит два неизвестных напряжения σ_θ и σ_r . Для определения необходимо рассмотреть *геометрическую и физическую стороны задачи*, что позволит представить уравнение (15.1) в перемещениях

Обозначим радиальное перемещение цилиндрической поверхности радиусом r через u (рис. 291, *г*); тогда перемещение цилиндрической поверхности радиусом $r + dr$ будет $u + du$. Относительное удлинение элемента длиной dr выразится формулой

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (15.2)$$

Относительное удлинение в тангенциальном (окружном) направлении будет

$$\epsilon_\theta = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}. \quad (15.3)$$

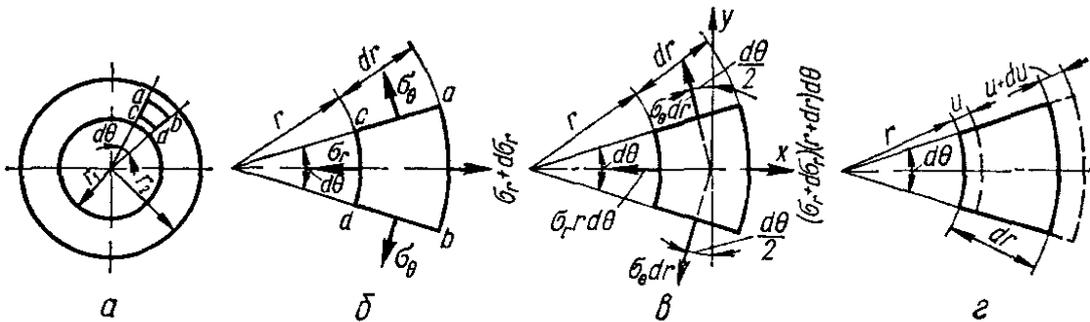


Рис 291

Рассматривая физическую сторону задачи, представим зависимости между напряжениями и деформациями в соответствии с обобщенным законом Гука (5.22) применительно к плоскому напряженному состоянию в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r).$$

Учитывая (15.2) и (15.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Подставив (15.4) в (15.1), получим дифференциальное уравнение в перемещениях

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (15.5)$$

Записав это уравнение в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0,$$

после двукратного его интегрирования найдем общее решение

$$u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}, \quad (15.6)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. В нашем случае граничными условиями будут

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma_r)_{r=r_2} = -p_2.$$

Подставляя (15.6) в (15.4), находим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) C_1 - \frac{1-\mu}{r^2} C_2 \right]; \quad (15.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) C_1 + \frac{1-\mu}{r^2} C_2 \right]. \quad (15.8)$$

После подстановки граничных условий в (15.7) получаем

$$-p_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) C_1 - \frac{1-\mu}{r_1^2} C_2 \right];$$

$$-p_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) C_1 + \frac{1-\mu}{r_2^2} C_2 \right].$$

Решив совместно эти уравнения, найдем

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Подставив значения постоянных C_1 и C_2 в (15.6) — (15.8), найдем окончательные формулы для определения радиального перемещения u и напряжений (формулы Ляме):

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}; \quad (15.9)$$

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}; \quad (15.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}. \quad (15.11)$$

Складывая (15.10) и (15.11), убеждаемся, что

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const},$$

следовательно,

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const},$$

т. е. поперечные сечения цилиндра при деформации остаются плоскими. Формулы (15.9) — (15.11) справедливы для бесконечно длинного цилиндра и пригодны для использования в сечениях цилиндра, достаточно удаленных от дна, если таковые имеются.

При наличии осевых нагрузок N , действующих на цилиндр, в частности при наличии днищ, в его стенках возникают осевые напряжения

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (15.12)$$

При этом в (15.9) появляется слагаемое

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r, \quad (15.13)$$

а напряжения σ_r и σ_θ не изменяются.

В частном случае, когда *отсутствует наружное давление* ($p_2 = 0$, $p_1 = p$), формулы для определения напряжений и перемещений в толстостенном цилиндре можно записать в виде

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (15.14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (15.15)$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}. \quad (15.16)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{\max} &= (\sigma_r)_{r=r_1} = -p; \\ (\sigma_\theta)_{\max} &= (\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p, \end{aligned} \right\} \quad (15.17)$$

где

$$k = \frac{r_1}{r_2}.$$

Радиальное перемещение внутренней поверхности, т. е. увеличение внутреннего радиуса, равно

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \mu \right) p. \quad (15.18)$$

Для наружной поверхности цилиндра

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{2k^2}{1 - k^2} p; \quad (15.19)$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \frac{2k^2}{1 - k^2} p. \quad (15.20)$$

Эпюры напряжений для рассматриваемого случая при $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ приведены на рис. 292, а. Напряжения вдоль радиуса изменяются по гиперболическому закону. Опасные точки (точки наибольших напряжений) находятся на внутренней поверхности цилиндра при $r = r_1$.

Из анализа (15.17) следует, что при $r_2 \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 0$

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p; (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p.$$

Используя третью теорию прочности, получаем

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (15.21)$$

В рассматриваемом предельном случае ($k \rightarrow 0$)

$$\sigma_1 = (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p; \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p$$

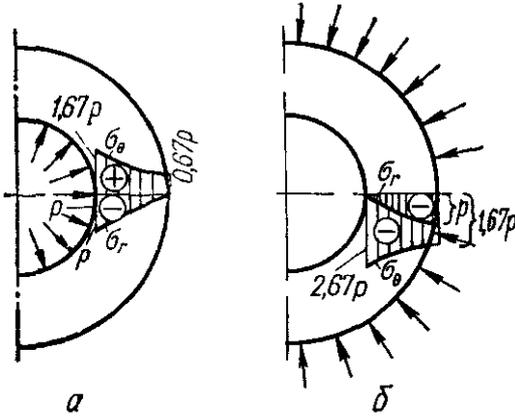


Рис 292

условие прочности (15.21) принимает вид

$$2p \leq [\sigma],$$

откуда

$$p \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Таким образом, цилиндр с весьма толстой стенкой не допускает внутреннего давления, большего определенной величины, т. е. увеличение толщины стенки цилиндра не всегда является эффективным способом увеличения прочности.

Рассмотрим частный случай, когда отсутствует внутреннее давление ($p_1 = 0, p_2 = p$). Формулы (15.9) — (15.11) примут вид

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}; \quad (15.22)$$

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) p; \quad (15.23)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) p. \quad (15.24)$$

Как видно из (15.23) и (15.24), оба напряжения в этом случае сжимающие, причем $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$. На внутренней поверхности

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; \quad (15.25)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2} p; \quad (15.26)$$

$$(u)_{r=r_1} = -\frac{r_1}{E} \frac{2}{1-k^2} p. \quad (15.27)$$

На наружной поверхности цилиндра

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = -\frac{1+k^2}{1-k^2} p; \quad (15.28)$$

$$(u)_{r=r_2} = -\frac{r_2}{E} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu\right) p. \quad (15.29)$$

Эпюры напряжений σ_r и σ_θ при $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ приведены на рис.

292, б Наибольшее по абсолютной величине напряжение σ_θ оказывается на внутренней поверхности цилиндра; эти точки и являются опасными. Положив в формуле (15.22) $r_1 = 0$ и $r = r_2$, получим величину перемещения наружной поверхности для сплошного цилиндра:

$$(\Delta)_{r=r_2} = -\frac{pr_2}{E}(1-\mu). \quad (15.30)$$

В табл. 42 приведены расчетные формулы для толстостенных цилиндров при различных схемах нагружения.

15.2. Расчет составных цилиндров

С целью получения более равномерного распределения напряжений по толщине стенки и разгрузки внутренних слоев за счет лучшего использования наружных цилиндры делают составными путем одевания с натягом одного цилиндра на другой (обычно с помощью горячей посадки). В таких цилиндрах величина допускаемого внутреннего давления может быть значительно больше, чем в цельном цилиндре, что используется при изготовлении орудийных стволов.

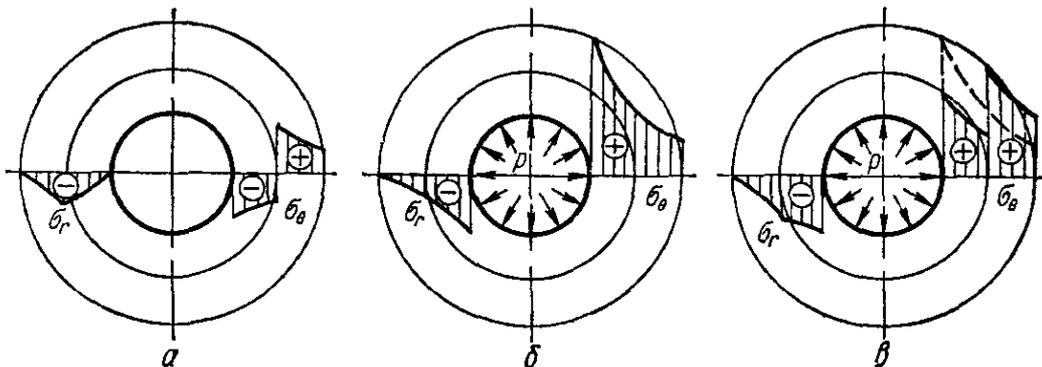


Рис. 293

При посадке одного цилиндра на другой с натягом окружные напряжения во внутреннем цилиндре являются сжимающими, а в наружных — растягивающими. Эпюра напряжений, возникающих после посадки, представлена на рис. 293, а

Под действием внутреннего давления в таком составном цилиндре возникают напряжения, определяемые по формулам (15.14) и (15.15) как для цельного цилиндра и характеризуются эпюрами, показанными на рис. 293, б. Просуммировав эпюры напряжений, приведенные на рис. 293, а и рис. 293, б, получим действительную эпюру (рис. 293, в), имеющую место в составном цилиндре при внутреннем давлении

Из суммарной эпюры видно, что напряжения в стенке составного цилиндра распределены более равномерно, чем в сплошной стенке (эпюра показана штрихами), поэтому в составных цилиндрах имеет место более рациональное использование материала, чем в сплошных цилиндрах.

При расчете составных цилиндров основным является установление величины давления p_c на поверхности их контакта при заданном натяге δ , представляющем собой разность между наружным диаметром внутреннего цилиндра I и внутренним диаметром наружного цилиндра

II (рис. 294). Очевидно, уменьшение наружного радиуса внутреннего цилиндра u_I и увеличение внутреннего радиуса наружного цилиндра u_{II} равны половине натяга:

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2}. \quad (15.31)$$

Учитывая, что натяг δ весьма мал по сравнению с радиусом поверхности контакта, считаем, что $r_{2I} = r_{1II} = r_c$ (r_c — радиус поверхности контакта составного цилиндра).

Контактное давление p_c будет наружным для внутреннего цилиндра и внутренним для наружного цилиндра.

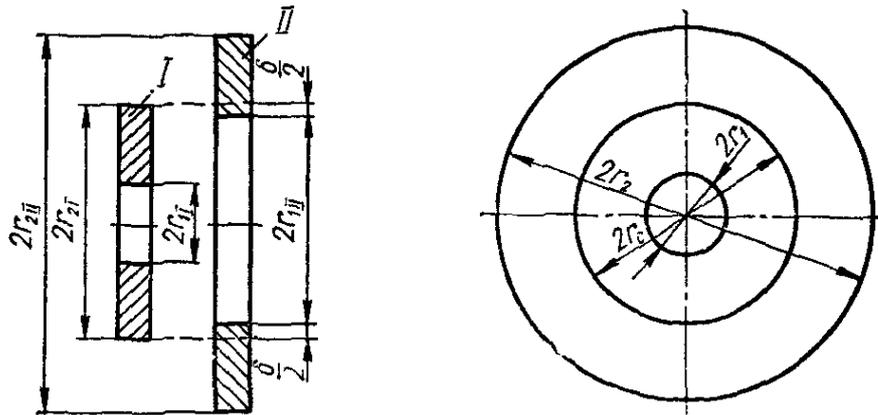


Рис. 294

Обозначим

$$k_1 = \frac{r_1}{r_c}; \quad k_2 = \frac{r_c}{r_2}.$$

Радиальное перемещение контактной поверхности внутреннего цилиндра определяем по формуле (15.29):

$$u_I = -\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) p_c, \quad (15.32)$$

наружного — по формуле (15.18):

$$u_{II} = \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right) p_c. \quad (15.33)$$

Подставляя абсолютные значения этих перемещений в (15.31), получаем

$$\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) p_c + \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right) p_c = \frac{\delta}{2},$$

откуда, решая уравнение относительно p_c , находим

$$p_c = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)}. \quad (15.34)$$

Если составляющие цилиндры изготовлены из одного материала, формула упрощается и принимает вид

$$p_c = \frac{\delta E}{2r_c} \frac{(1 - k_1^2)(1 - k_2^2)}{(1 + k_1^2)(1 - k_2^2) + (1 + k_2^2)(1 - k_1^2)}. \quad (15.35)$$

По найденному значению $p_c = f(\delta)$ определяют начальные напряжения во внутреннем (формулы (15.23), (15.24)) и наружном (формулы (15.14) и (15.15)) цилиндрах. Формулы (15.34) и (15.35) справедливы, если напряжения не превышают предела пропорциональности. При появлении при посадке пластических деформаций фактически условия p_c будут меньше расчетных.

15.3. Температурные напряжения в толстостенных цилиндрах

В случае неравномерного нагрева толстостенных цилиндров в них развиваются температурные напряжения. При расчете температурных напряжений полученные ранее уравнения равновесия (15.11) и геометрические соотношения (15.2) и (15.3) останутся без изменений, а физические зависимости будут несколько иными.

Обозначив через $t(r)$ повышенные температуры, зависящие от текущего радиуса r , через α — коэффициент термического расширения, и приняв значения модуля E и коэффициента Пуассона μ соответствующими средней температуре стенки, запишем обобщенный закон Гука в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r) = \text{const}; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_z - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_z - \mu\sigma_r) + \alpha t(r). \end{aligned} \right\} \quad (15.36)$$

Решив эти уравнения относительно напряжений, получим

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1 + \mu)\alpha t(r)]; \quad (15.37)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z - (1 + \mu)\alpha t(r)]; \quad (15.38)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1 + \mu)\alpha t(r)]. \quad (15.39)$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (15.40)$$

после подстановки в уравнение (15.1) выражений (15.38) и (15.39) находим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr}. \quad (15.41)$$

Зная закон изменения температуры $t = f(r)$, из уравнения (15.41) можно определить перемещение.

Переписав (15.41) в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr},$$

после двукратного интегрирования этого уравнения получим

$$u = \frac{1}{r} \frac{1+\mu}{1-\mu} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (15.42)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из условий для σ_r на внутренней и наружной поверхностях цилиндра

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; (\sigma_r)_{r=r_2} = 0. \quad (15.43)$$

Внося (15.40) и (15.42) в (15.38), будем иметь

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left[-\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{C_1}{1-2\mu} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_z \right].$$

Подставив это выражение в (15.43) и решив полученную при этом систему двух уравнений относительно постоянных интегрирования, найдем

$$C_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \mu \varepsilon_z;$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr.$$

После подстановки (15.40) в (15.37) — (15.39) с учетом (15.42) и найденных значений C_1 и C_2 получим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr \right]; \quad (15.44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{r^2 + r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \alpha t(r) \right]; \quad (15.45)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr + (1-\mu) \varepsilon_z - \alpha t(r) \right]. \quad (15.46)$$

Неизвестная величина ε_z , входящая в последнюю формулу, в случае свободного расширения цилиндра может быть найдена из условия отсутствия в поперечном сечении цилиндра продольной силы:

$$N = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr d\varphi = 0 \quad (15.47)$$

или

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для σ_z (15.46), находим

$$\epsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr.$$

С учетом полученного выражения ϵ_z формула (15.46) принимает вид

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu} \left[\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \alpha t(r) \right]. \quad (15.48)$$

Вычислить интеграл $\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr$ и определить напряжения возможно, если

известен закон изменения температуры $t(r)$ по толщине стенки.

При линейном законе изменения температуры

$$t(r) = T \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \quad (15.49)$$

где $T = t_1 - t_2$; t_1 и t_2 — температура на внутренней и наружной поверхностях цилиндра соответственно.

Подставив (15.49) в (15.44), (15.45) и (15.48), после интегрирования найдем

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (15.50)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha t}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (15.51)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (15.52)$$

Напряжения у внутренней поверхности цилиндра при $r = r_1$ будут

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r_1 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \right\} (15.53)$$

У наружной поверхности при $r = r_2$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r_2 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \right\} (15.54)$$

Эпюры распределения температурных напряжений по толщине стенки цилиндра с отношением $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ при $\mu = 0,3$ приведены на рис. 295, а.

В случае логарифмического закона изменения температуры в стенке толстостенного цилиндра

$$t(r) = \frac{T}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}. \quad (15.55)$$

После подстановки (15.55) в (15.44), (15.45) и (15.48) и выполнения интегрирования формулы для определения напряжений σ_r , σ_θ и σ_z соответственно будут

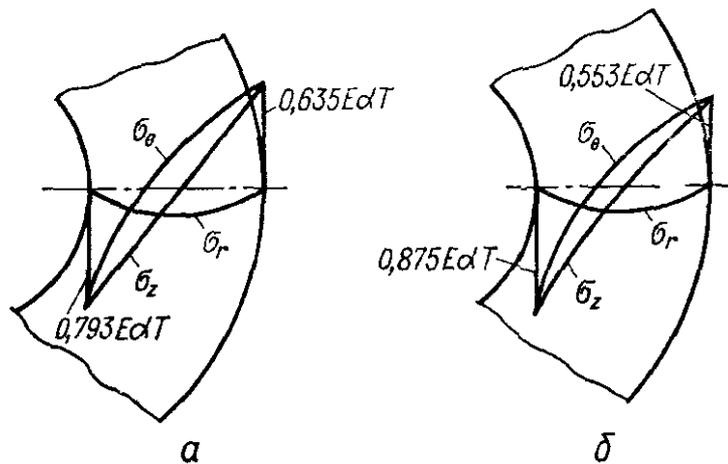


Рис. 295

$$\sigma_r = - \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[\ln \frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (15.56)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (15.57)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - 2 \ln \frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (15.58)$$

У внутренней поверхности цилиндра при $r = r_1$

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \end{aligned} \quad (15.59)$$

У наружной поверхности при $r = r_2$

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \end{aligned} \quad (15.60)$$

Эпюры распределения температурных напряжений по толщине стенки цилиндра с отношением $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ при $\mu = 0,3$ в случае изменения температуры по логарифмическому закону представлены на рис. 295, б.

Вблизи торцов цилиндра напряжения, определяемые с помощью приведенных формул, могут иметь место лишь в том случае, если торцы будут нагружены поверхностной нагрузкой, изменяющейся в соответствии с формулой для σ_z .

15.4. Расчет вращающихся дисков

Вращающийся диск обычно испытывает растяжение под действием центробежных сил, являющихся для него основной нагрузкой, а также изгиб. При неравномерном нагреве в нем могут возникнуть и температурные напряжения. Обычно нагрузка и температурное поле симметричны относительно оси диска, вследствие чего напряжение является функцией расстояния от оси вращения.

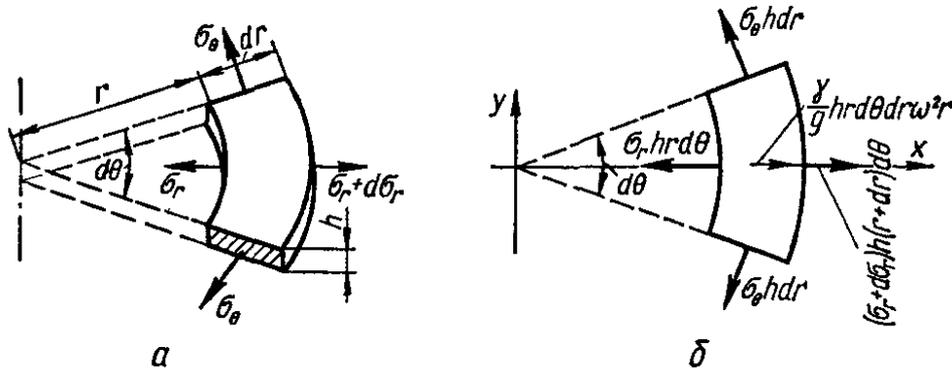


Рис. 296

Рассматривая тонкий плоский диск постоянной толщиной h , можно считать, что напряжения по его толщине распределены равномерно, а напряжения, параллельные оси диска, отсутствуют ($\sigma_z = 0$). Таким образом, задача определения напряжений в диске сводится к так называемой плоской задаче теории упругости, а именно к задаче о плоском напряженном состоянии.

Если диск, удельная масса которого равна γ/g , вращается с угловой скоростью ω , то массовые силы, действующие на выделенный элемент диска (рис. 296, а) могут быть представлены равнодействующей (рис. 296, б), лежащей в срединной плоскости элемента и равной

$$\frac{\gamma}{g} h r d\theta dr \cdot \omega^2 r.$$

Запишем условие равновесия элемента, спроектировав все силы на ось x

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = 0. \quad (15.61)$$

Геометрические и физические уравнения при расчете дисков будут такие же, как и в задаче Ляме ((15.2) — (15.4)). Поэтому дифференциальное уравнение (15.61) в перемещениях с учетом (15.4) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \quad (15.62)$$

Переписав (15.62) в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = - \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r$$

и проинтегрировав его последовательно дважды, найдем

$$u = \bar{C}_1 r + \frac{\bar{C}_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3. \quad (15.63)$$

Подставив (15.63) в (15.4), получим

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (15.64)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (15.65)$$

где

$$C_1 = \frac{E}{1-\mu} \bar{C}_1; \quad C_2 = - \frac{E}{1+\mu} \bar{C}_2. \quad (15.66)$$

Постоянные C_1 и C_2 (следовательно, \bar{C}_1 и \bar{C}_2) определяются из граничных условий. Для диска с центральным отверстием в общем случае имеем следующие условия на внутреннем ($r = r_1$) и внешнем ($r = r_2$) контурах:

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_{r_1};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = \sigma_{r_2}.$$

В соответствии с (15.64) эти условия дают два уравнения

$$\sigma_{r_1} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2;$$

$$\sigma_{r_2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2.$$

Решая совместно эту систему уравнений, находим

$$C_1 = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} + \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (15.67)$$

$$C_2 = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (15.68)$$

В случае, когда $\sigma_{r_2} = 0$ и $\sigma_{r_1} = 0$,

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (15.69)$$

$$C_2 = - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (15.70)$$

Подставив последние значения C_1 и C_2 в (15.64) и (15.65), получим

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \quad (15.71)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[(3+\mu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu)r^2 \right]. \quad (15.72)$$

Обозначив

$$\frac{r_1}{r_2} = k; \quad \frac{r}{r_2} = \rho; \quad \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2 = c; \quad \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} = m, \quad (15.73)$$

мы можем записать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c \left[1 + k^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - \rho^2 \right]; \\ \sigma_\theta &= c \left[1 + k^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) - m\rho^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.74)$$

Напряжение σ_r положительно и достигает наибольшей величины при $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$:

$$(\sigma_r)_{\max} = c(1 - k)^2. \quad (15.75)$$

Напряжение σ_θ также положительно при всех значениях ρ и достигает максимума при $\rho = k$:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = c[2 + (1 - m)k^2]. \quad (15.76)$$

Из сопоставления (15.75) и (15.76) следует, что всегда имеет место неравенство $(\sigma_\theta)_{\max} > (\sigma_r)_{\max}$. Поэтому условие прочности должно быть записано (например, по IV теории) в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = (\sigma_\theta)_{\max} = c[2 + (1 - m)k^2] \leq [\sigma]. \quad (15.77)$$

В случае хрупкого материала следует пользоваться теорией Кулона — Мора, которая при $\sigma_z = \sigma_r = 0$ приводит к той же формуле (15.77).

Формулы для определения напряжений в сплошном диске ($r_1 = 0$) на основании (15.64) и (15.65) будут иметь вид

$$\sigma_r = C_1 - \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (15.78)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{1 + 3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2. \quad (15.79)$$

Если внешняя нагрузка на наружном контуре ($r = r_2$) отсутствует, т. е. $\sigma_{r_2} = 0$, то согласно (15.78) находим

$$C_1 = \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2 = c. \quad (15.80)$$

Подставив (15.80) в (15.78) и (15.79), получим

$$\sigma_r = c(1 - \rho^2); \quad (15.81)$$

$$\sigma_\theta = c(1 - m\rho^2). \quad (15.82)$$

Оба напряжения положительны и увеличиваются с приближением к центру диска. В центре диска при $\rho = 0$

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = c = \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \quad (15.83)$$

Согласно (15.3) радиальное перемещение

$$u = \varepsilon_{\theta} r. \quad (15.84)$$

Так как

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \mu \sigma_r),$$

то

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_{\theta} - \mu \sigma_r) \quad (15.85)$$

Для определения перемещения на наружном контуре диска в формулу (15.85) необходимо подставить значения $r = r_2$, $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta_2}$; $\sigma_r = \sigma_{r_2}$.

В случае неравномерного нагрева диска к напряжениям, вызванным центробежными силами и контурными нагрузками (если таковые имеются), следует прибавить температурные напряжения. Температурные напряжения определяются так же, как и в толстостенном цилиндре, поэтому уравнение равновесия (15.61) при $\omega = 0$ будет совпадать с уравнением (15.1).

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_{\theta} = 0. \quad (15.86)$$

Относительные деформации с учетом температурного расширения определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_{\theta}) + \alpha t(r); \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \mu \sigma_r) + \alpha t(r). \end{aligned} \right\} \quad (15.87)$$

Решая совместно эти уравнения относительно напряжений, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_r + \mu \varepsilon_{\theta} - (1 + \mu) \alpha t(r)]; \\ \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_{\theta} + \mu \varepsilon_r - (1 + \mu) \alpha t(r)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.88)$$

Учитывая (15.2) и (15.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1 + \mu) \alpha t(r) \right]; \\ \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1 + \mu) \alpha t(r) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.89)$$

При линейном изменении температуры вдоль радиуса диска $t(r) = T \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$ последние выражения принимают вид

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1 + \mu) \alpha T \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right], \quad (15.90)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1 + \mu) \alpha T \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right]. \quad (15.91)$$

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ полагаем постоянными, не зависящими от температуры, и равными их значениям при средней температуре диска

Подставляя (15.90) и (15.91) в уравнение равновесия (15.86), находим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1 + \mu}{r_2 - r_1} \alpha T. \quad (15.92)$$

Записав это уравнение в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1 + \mu}{r_2 - r_1} \alpha T,$$

после двойного интегрирования получим выражение для перемещения

$$u = \bar{B}_1 r + \frac{\bar{B}_2}{r} + \frac{1 + \mu}{3(r_2 - r_1)} \alpha T r^2. \quad (15.93)$$

Подставив (15.93) в (15.90) и (15.91), для напряжений найдем

$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{T}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r, \quad (15.94)$$

$$\sigma_\theta = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{T}{r_2 - r_1} \alpha E r, \quad (15.95)$$

где

$$B_1 = \frac{E}{1 - \mu} \left(\bar{B}_1 + \frac{\alpha T r_1}{r_2 - r_1} \right);$$

$$B_2 = \frac{E}{1 + \mu} \bar{B}_2$$

Постоянные B_1 и B_2 могут быть определены из граничных условий $(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_r = 0$ при $r = r_1$; $(\sigma_r)_{r=r_2} = \sigma_r = 0$ при $r = r_2$

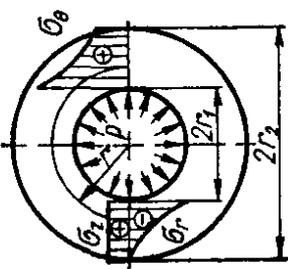
Напряжения от центробежных сил и температурные напряжения следует просуммировать. В случае линейного изменения температуры вдоль радиуса, сложив правые части выражений (15.64) и (15.94), а также (15.65) и (15.95), получим

$$\sigma_r = D + \frac{L}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{T}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r;$$

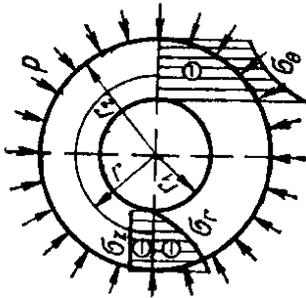
$$\sigma_\theta = D - \frac{L}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{2}{3} \frac{T}{r_2 - r_1} \alpha E r,$$

где $D = C_1 + B_1$; $L = C_2 + B_2$ — новые постоянные, которые надлежит определить из граничных условий

Таблица 42. Расчетные формулы для толстостенных цилиндров

Схема нагружения. Эпюры напряжений	Главные напряжения в точках цилиндрической поверхности радиусом r	Радиальное перемещение точек цилиндрической поверхности радиусом r	Главные напряжения в опасной точке, эквивалентное напряжение для опасной точки ($k = r_1/r_2$)
Цилиндр под действием внутреннего давления p 	$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right)$ $\sigma_\theta = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right)$ $\sigma_z = 0 \text{ — открытый цилиндр}$ $\sigma_z = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ — закрытый цилиндр}$	$u = \frac{pr_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - \mu)r + (1 + \mu) \frac{r_2^2}{r} \right]$ $u = \frac{pr_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - 2\mu)r + (1 + \mu) \frac{r_2^2}{r} \right]$	$r = r_1$ $\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p$ $\sigma_2 = \sigma_z = 0 \text{ — открытый цилиндр}$ $\sigma_2 = \sigma_z = \frac{k^2}{1 - k^2} p \text{ — закрытый цилиндр}$ $\sigma_3 = \sigma_r = -p$ $\sigma_{\text{экв III}} = \frac{2p}{1 - k^2}$ $\sigma_{\text{экв M}} = p \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \frac{ \sigma_+ }{ \sigma_- } \right)$

Цилиндр под действием наружного давления p



$$\sigma_r = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ — открытый цилиндр}$$

$$\sigma_z = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ — закрытый цилиндр}$$

Открытый цилиндр

$$u = -\frac{pr_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - \mu) r + (1 + \mu) \frac{r_1^2}{r} \right]$$

Закрытый цилиндр

$$u = -\frac{pr_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - 2\mu) r + (1 + \mu) \frac{r_1^2}{r} \right]$$

$$r = r_1$$

$$\sigma_r = \sigma_r = 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0 \text{ — открытый цилиндр}$$

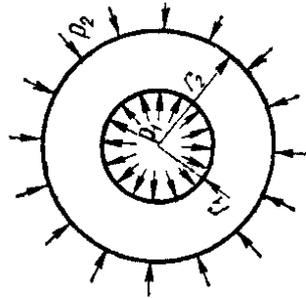
$$\sigma_2 = \sigma_z = -\frac{p}{1 - k^2} \text{ — закрытый цилиндр}$$

$$\sigma_3 = \sigma_\theta = -\frac{2p}{1 - k^2}$$

$$\sigma_{\text{экв III}} = \frac{2p}{1 - k^2}$$

$$\sigma_{\text{экв M}} = \frac{2p}{1 - k^2} \begin{bmatrix} \sigma_+ \\ \sigma_- \end{bmatrix}$$

Цилиндр под действием внутреннего p_1 и наружного p_2 давлений



Открытый цилиндр

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}$$

Закрытый цилиндр

$$u = \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}$$

$$r = r_1$$

$$\sigma_r = -p_1$$

$$\sigma_\theta = \frac{(1 + k^2) p_1 - 2p_2}{1 - k^2}$$

$$\sigma_z = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2}$$

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

16.1. Расчет тонкостенных оболочек по безмоментной теории

К тонким оболочкам могут быть отнесены цистерны, водонапорные резервуары, воздушные и газовые баллоны, купола зданий, герметические перегородки в самолетах и судах, аппараты химического машиностроения, части корпусов турбин и реактивных двигателей и т. п.

Рассмотрим элемент оболочки, показанный на рис. 297, а, б. В общем случае в сечениях, которым выделен элемент, будут действовать погонные (отнесенные к единице длины сечения) усилия (рис. 297, а)

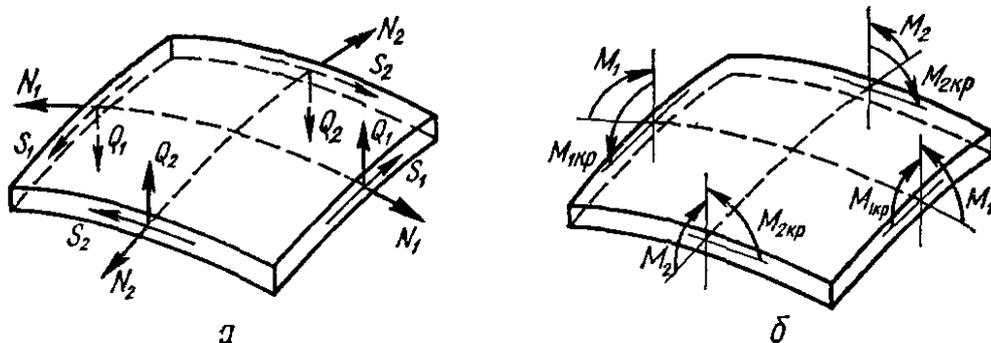


Рис. 297

и моменты (рис. 297, б): нормальные усилия N_1 и N_2 ; касательные (сдвигающие) усилия S_1 и S_2 ; поперечные силы Q_1 и Q_2 ; изгибающие моменты M_1 и M_2 ; крутящие моменты $M_{1кр}$ и $M_{2кр}$.

Учет всех перечисленных силовых факторов при расчете оболочек приводит к весьма сложным исходным дифференциальным уравнениям, решение которых даже для простых случаев сопряжено с большими математическими трудностями. Во многих случаях исходные уравнения могут быть существенно упрощены. Этого можно достичь исходя из самого характера задачи. Во-первых, если оболочка представляет собой тело вращения и нагрузка симметрична относительно оси оболочки, то задача называется *осесимметричной* и в этом случае для всех сечений, образованных плоскостями, проходящими через ось симметрии, и ортогональных им сечений справедливы равенства

$$M_{1кр} = M_{2кр} = S_1 = S_2 = 0; Q_1 = 0 \text{ (или } Q_2 = 0).$$

Во-вторых, если по виду оболочки, характеру нагрузки и закреплений можно по тем или иным соображениям прийти к выводу, что какие-либо усилия или моменты всюду малы по сравнению с остальными усилиями или моментами, то принимают допущения, что эти усилия и моменты равны нулю. Например, часто полагают, что

$$M_1 = M_2 = M_{1кр} = M_{2кр} = 0; Q_1 = Q_2 = 0,$$

и в результате приходят к так называемой *безмоментной теории оболочек*.

В частности, безмоментной теорией оболочек пользуются при определении напряжений в резервуаре (рис. 298), представляющем собой осесимметричную оболочку. Будем считать, что меридиональные сечения срединной поверхности оболочки образуют плавные кривые, а толщина оболочки h мала по сравнению с радиусами кривизны. Тогда в случае закрепления краев резервуара таким образом, что на них могут действовать только усилия, касательные к меридиональным кривым, можно считать, что оболочка находится в безмоментном напряженном состоянии.

Резервуар, показанный на рис. 298, заполненный (полностью или частично) газом, жидкостью или сыпучим веществом, в котором давление одинаково во всех точках плоскости, перпендикулярной к оси резервуара, представляет собой оболочку, находящуюся не только в безмоментном, но и в осесимметричном напряженном состоянии.

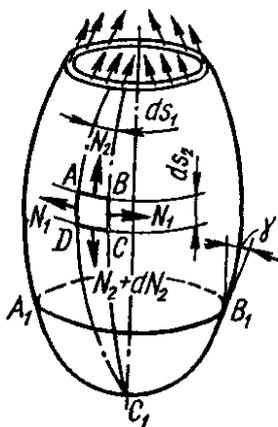


Рис. 298

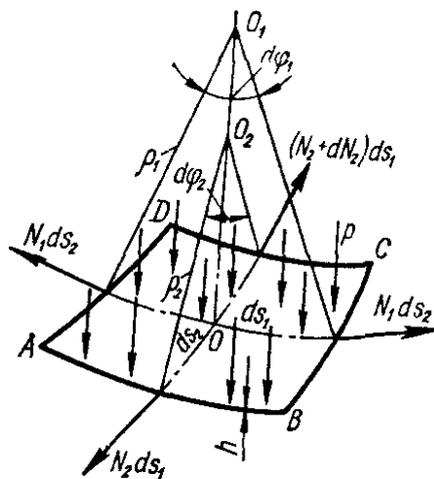


Рис. 299

Выделим из рассматриваемой оболочки прямоугольный криволинейный элемент $ABCD$, проведя два близких осевых сечения и два ортогональных к ним и к поверхности оболочки сечения. Обозначим длины граней элемента через ds_1 и ds_2 (рис. 299). В гранях элемента соответственно будут действовать растягивающие усилия (в случае внутреннего давления) $N_2 ds_1$ и $N_1 ds_2$. Здесь N_1 и N_2 — соответственно нормальные усилия, приходящиеся на единицу длины контура элемента:

$$N_1 = \sigma_t h; \quad N_2 = \sigma_m h, \quad (16.1)$$

где σ_t — окружное (шпротное или кольцевое) нормальное напряжение, направленное по касательной к окружности радиусом $\rho_t = \rho_1$; σ_m — меридиональное нормальное напряжение, направленное по касательной к меридиану радиусом $\rho_m = \rho_2$.

Рассмотрим условие равновесия элемента, спроектировав на нормаль OO_1 (рис. 299) внутренние усилия, действующие по контуру элемента, а также давление p , действующее на выделенный элемент площадью $ds_1 \times ds_2$:

$$2N_1 ds_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} + N_2 ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + (N_2 + dN_2) ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} - p ds_1 ds_2 = 0.$$

Учитывая малость углов $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ и пренебрегая величинами второго порядка малости, находим

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \quad (16.2)$$

Учитывая также (16.1) и то, что $\rho_t = \rho_1$ и $\rho_m = \rho_2$, на основании (16.2) получаем

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}. \quad (16.3)$$

Уравнение (16.3) называется *уравнением Лапласа*. Для определения двух неизвестных σ_t и σ_m одного уравнения Лапласа не достаточно. Второе уравнение легко можно получить из рассмотрения условий равновесия нижней части оболочки радиусом r , отсеченной конической поверхностью $A_1D_1B_1$ (рис. 300):

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - Q_{\text{ж}} - Q_{\text{р}} = 0,$$

где $Q_{\text{ж}}$ — вес жидкости или сыпучего тела, находящейся в рассматриваемой части резервуара; $Q_{\text{р}}$ — собственный вес рассматриваемой части резервуара. Отсюда погонное усилие в рассматриваемом сечении стенки будет

$$N_2 = \frac{pr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q_{\text{ж}} + Q_{\text{р}}}{2\pi r \cos \alpha}. \quad (16.4)$$

Зная N_2 , меридиональное нормальное напряжение σ_m согласно (16.1) определим из формулы

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q_{\text{ж}} + Q_{\text{р}}}{2\pi r h \cos \alpha}. \quad (16.5)$$

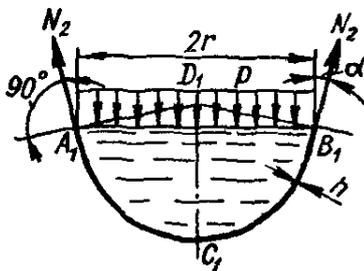


Рис. 300

Так как задача определения напряжений в стенках резервуара решалась в предположении, что напряжения по толщине стенки распределены равномерно, не было необходимости рассматривать геометрическую и физическую стороны задачи, т. е. в принятой постановке задача о расчете тонкостенных сосудов оказалась статически определяемой.

Нормальные напряжения σ_t и σ_m , действующие в площадках, где отсутствуют касательные напряжения, очевидно, являются главными. Что касается третьего главного напряжения, направленного по нормали к поверхности оболочки, то оно на внутренней поверхности равно p , а на наружной — нулю (при внутреннем давлении). Поскольку в тонкостенных оболочках $\sigma_1 = \sigma_t$ и $\sigma_2 = \sigma_m$ значительно больше p , последним по сравнению с σ_t и σ_m пренебрегают, т. е. σ_3 полагают равным нулю.

Следовательно, будем полагать, что материал оболочки находится в плоском напряженном состоянии. Поэтому при расчете на прочность в зависимости от состояния материала следует пользоваться соответствующей теорией прочности. Так, по IV теории прочности условие прочности (6.17) будет иметь вид

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t \sigma_m} \leq [\sigma]. \quad (16.6)$$

Ниже приведены расчетные формулы для резервуаров различных форм.

Сферический баллон заполняя газом, давление которого равно p . Подставляя в (16.3) $\rho_m = \rho_t = R$; $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$, находим

$$2 \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h},$$

или
$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}. \quad (16.7)$$

Условия прочности по I, III и IV теориям прочности приводятся к такому:

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \frac{pR}{2h} \ll [\sigma]. \quad (16.8)$$

Цилиндрический баллон заполнен газом, давление которого равно p (рис. 301). В этом случае

$$\rho_t = R; \rho_m = \infty.$$

Из (16.3) находим

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (16.9)$$

Напряжение σ_m в стенке баллона, отдаленной от его торцов, определим по формуле (16.5), положив $Q_{\text{ж}} = Q_p = 0; \alpha = 0:$

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}, \quad (16.10)$$

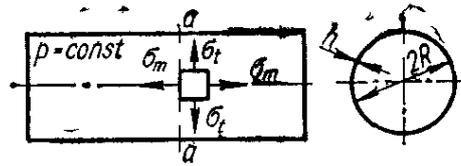


Рис. 301

или

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_t.$$

Сферический резервуар (рис. 302) наполнен жидкостью или сыпучим телом с плотностью γ . В этом случае

$$\rho_t = \rho_m = R; r = R \sin \varphi; H = R (\cos \varphi - \cos \beta);$$

$$p = \gamma H = \gamma R (\cos \varphi - \cos \beta).$$

Из уравнения Лапласа (16.3) находим

$$\sigma_t + \sigma_m = \frac{pR}{h} = \frac{\gamma R^2}{h} (\cos \varphi - \cos \beta). \quad (16.11)$$

Воспользовавшись формулой (16.5), в которой

$$Q_{\text{ж}} = \gamma V_{ABC} = \gamma \cdot \frac{1}{3} \pi H_C^2 (3R - H_C) =$$

$$= \frac{\pi \gamma}{3} R^3 (1 - \cos \varphi)^2 (2 + \cos \varphi), \quad (16.12)$$

положим в ней $Q_p = 0$ и $\alpha = 90^\circ - \varphi$, найдем

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]. \quad (16.13)$$

Затем из (16.11) определим

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 1}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]. \quad (16.14)$$

Максимальное напряжение будет в точке C, где $\varphi = 0:$

$$\sigma_{m \max} = \sigma_{t \max} = \frac{\gamma R^2 (1 - \cos \beta)}{2h}. \quad (16.15)$$

На краю оболочки, при $\varphi = \beta$

$$\sigma_m(\beta) = -\sigma_t(\beta) = \frac{\gamma R^2}{6h} \frac{2 - \cos \beta - \cos^2 \beta}{1 + \cos \beta}. \quad (16.16)$$

Сферический купол радиусом R и толщиной стенки h изготовлен из материала с плотностью γ (рис. 303). Вес единицы площади оболочки $q = \gamma h$. Нормальная составляющая

$$q_n = q \cos \varphi = \gamma h \cos \varphi$$

играет роль давления, приложенного к поверхности, и в уравнении Лапласа (16.3) следует полагать $p = -q_n$, а в уравнении (16.5) $p = 0$. Учитывая, что $\rho_t = \rho_m = R$, из уравнения Лапласа находим

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = -\gamma R \cos \varphi. \quad (16.17)$$

Используя формулу (16.5), в которой

$$Q_p = qS_{ABC} = \gamma h S_{ACB} = \gamma h 2\pi R H_C = \gamma h 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi),$$

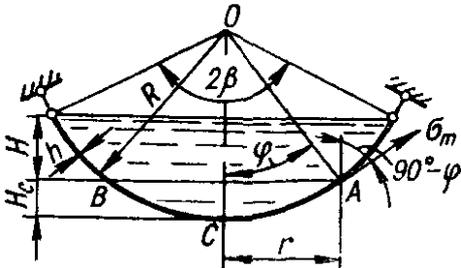


Рис. 302

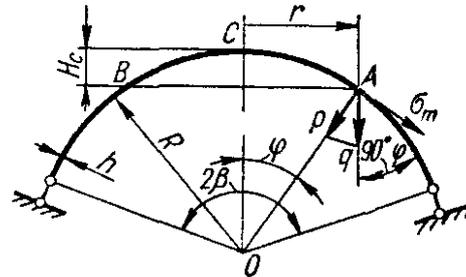


Рис. 303

т. е.

$$Q_p = 2\pi\gamma h R^2 (1 - \cos \varphi);$$

$$r = R \sin \varphi; \quad \alpha = 90^\circ - \varphi; \quad p = 0,$$

а также учитывая, что в сечении AB вес части ACB вызывает сжатие, находим

$$\sigma_m = -\frac{\gamma R}{1 + \cos \varphi}. \quad (16.18)$$

Тогда из уравнения (16.17) получаем

$$\sigma_t = \gamma R \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (16.19)$$

Меридиональные напряжения всюду сжимающие и возрастают по мере удаления от вершины купола к краю. Кольцевые напряжения в верхней части купола отрицательные (сжимающие); при $\varphi = 51^\circ 50'$ они обращаются в нуль, а при $\varphi > 51^\circ 50'$ становятся растягивающими. Приведенные результаты верны, если устройство купола таково, что в нем могут возникнуть реакции, направленные по касательной к меридиональной кривой.

16.2. Распорные кольца в оболочках

Если в некотором сечении AA_1 оболочки (рис. 304) имеется перелом, то касательные к меридиональной кривой слева и справа от точки A образуют между собой угол $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Погонные усилия, вызванные меридиональными напряжениями σ_{m_1} и σ_{m_2} (рис. 305) в сечениях BB_1 и CC_1 , бесконечно близких к AA_1 (образованных коническими поверхностями O_1BB_1 и O_2CC_1 , нормальными к срединной поверхности

оболочки), будут равны $\sigma_{m_1} h_1$ и $\sigma_{m_2} h_2$, где h_1 и h_2 — толщина частей оболочки 1 и 2.

Из условия равновесия кольца BB_1C_1C имеем

$$\sigma_{m_1} h_1 \cos \alpha_1 \cdot 2\pi r = \sigma_{m_2} h_2 \cos \alpha_2 \cdot 2\pi r,$$

или

$$\sigma_{m_1} h_1 \cos \alpha_1 = \sigma_{m_2} h_2 \cos \alpha_2.$$

Таким образом, проекции этих усилий на ось оболочки взаимно уравновешиваются. В то же время сумма проекций указанных усилий на плоскость AA_1 (рис. 306) дает погонное радиальное усилие

$$q = \sigma_{m_1} h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m_2} h_2 \sin \alpha_2, \quad (16.20)$$

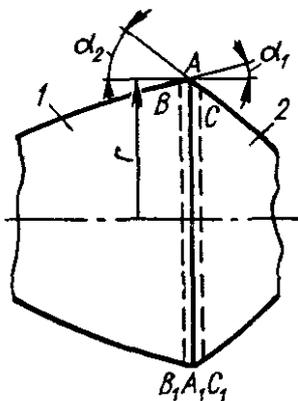


Рис. 304

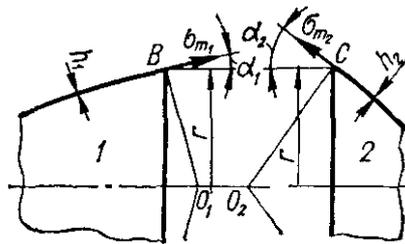


Рис. 305

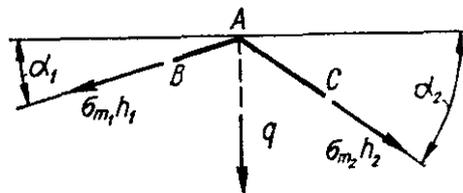


Рис. 306

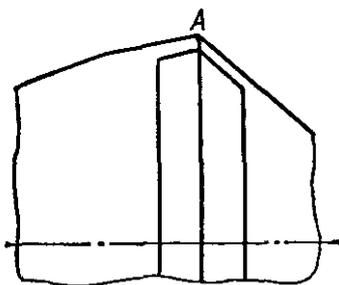


Рис. 307

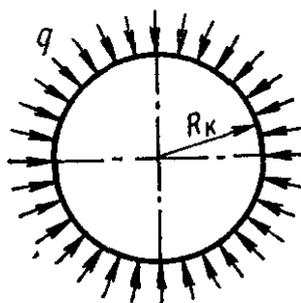


Рис. 308

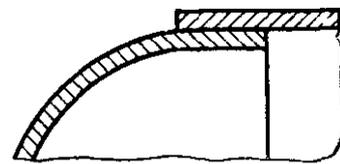


Рис. 309

которое можно рассматривать как местную нагрузку, сжимающую оболочку и могущую вызвать в оболочке значительный изгиб.

Чтобы уменьшить изгиб, в резервуарах часто устанавливают кольца жесткости, или распорные кольца (рис. 307), которые и принимают на себя радиальные усилия q по схеме, приведенной на рис. 308. В кольце возникают только сжимающие напряжения, и условие прочности для кольца принимает вид

$$\frac{qR_k}{F_k} \leq [\sigma], \quad (16.21)$$

где R_k — радиус срединной поверхности кольца; F_k — площадь поперечного сечения кольца; q — погонная нагрузка, действующая на кольцо, определяемая по формуле (16.20).

Иногда вместо распорного кольца в месте излома создают местное утолщение оболочки, загибая края днища резервуара внутрь оболочки, или, например, так, как показано на рис. 309

В табл. 43 приведены расчетные формулы для определения напряжений и перемещений в тонкостенных оболочках.

Таблица 43. Расчетные формулы для определения напряжений и перемещений в тонкостенных оболочках

p — давление; q — погонная нагрузка; σ_m и σ_t — меридиональное и окружное нормальные напряжения (положительные при растяжении); h — толщина оболочки; R — радиус срединной поверхности в поперечном сечении оболочки; E , μ , γ_M — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и удельный вес материала оболочки; ω — перемещение в направлении нормали к поверхности (направление от оси или центра оболочки считается положительным); γ — удельный вес жидкости.

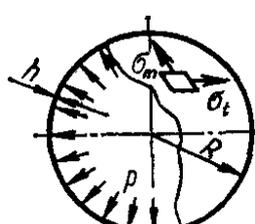
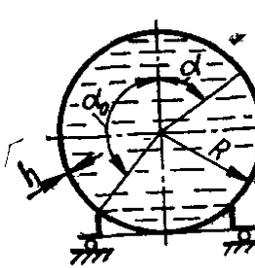
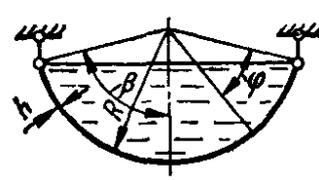
Схема	Формулы
<p>Сферическая оболочка. Равномерное внутреннее давление</p> 	$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}; \quad \omega = \frac{pR^3}{2Eh}(1 - \mu)$
<p>Сферическая оболочка, полностью заполненная жидкостью и опертая по кольцу радиусом $R \sin \alpha_0$</p> 	<p>Внутреннее давление $p = \gamma R (1 - \cos \alpha)$ $\alpha \leq \alpha_0$</p> $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{6h} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{6h} \left(5 - 6 \cos \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)$ <p>$\alpha > \alpha_0$</p> $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{6h} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{6h} \left(1 - 6 \cos \alpha - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$
<p>Сферический резервуар, наполненный жидкостью. Кромки свободно оперты</p> 	<p>Внутреннее давление $p = \gamma R (\cos \varphi - \cos \beta)$</p> $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{-1 + 2 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]$ <p>при $\varphi = 0$</p> $\sigma_m = \sigma_t = \frac{\gamma R}{h} \frac{1 - \cos \beta}{2} = \sigma_{\max}$

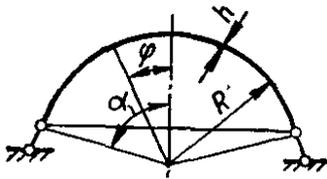
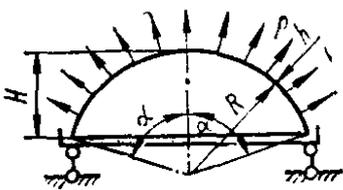
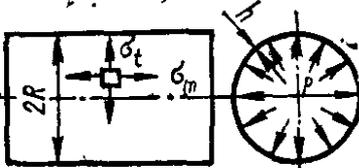
Схема	Формулы
	<p>при $\varphi = \beta$</p> $\sigma_m = -\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \frac{2 - \cos \beta - \cos^2 \beta}{6(1 + \cos \beta)}$ <p>Изменение радиуса круга на контуре</p> $\Delta = -\frac{\gamma R^3 \sin \beta}{Eh} \frac{(1 + \mu)(2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{6(1 + \cos \alpha)}$
<p>Сферический купол под действием собственного веса. Кромки свободно оперты</p> 	$\sigma_m = -\frac{\gamma_M R}{1 + \cos \varphi};$ $\sigma_t = \gamma_M R \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}$ <p>$\sigma_t = 0$ при $\varphi = 51^\circ 50'$</p> <p>$\sigma_t < 0$ при $0 < \alpha < 51^\circ 50'$</p> <p>$\sigma_t > 0$ при $\alpha > 51^\circ 50'$</p>
<p>Сферический купол. Равномерное нормальное давление. Кромки шарнирно оперты на упругое кольцо. Материалы оболочки и кольца одинаковы</p> 	<p>Вдали от краев при $H \geq 10h$</p> $\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}$ <p>Напряжения в опорном кольце</p> $\sigma_k = -\frac{pR^2 \sin \alpha}{2} \left[\frac{\left(\cos \alpha - 0,39 \frac{\sqrt{Rh}}{R \sin \alpha} \right)}{F + 0,39h \sqrt{Rh}} \right],$ <p>где F — площадь сечения опорного кольца</p>
<p>Длинная цилиндрическая оболочка с днищами. Равномерное внутреннее давление</p> 	<p>Вдали от краев</p> $\sigma_m = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{pR}{h} = \sigma_{\max}$ $w = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)$

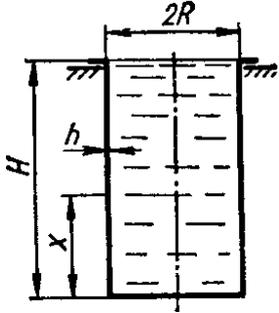
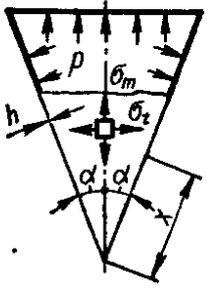
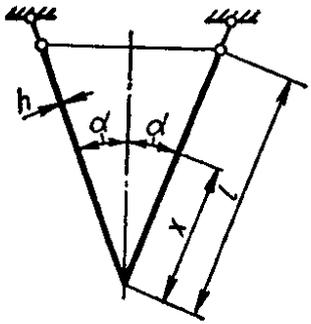
Схема	Формулы
<p>Цилиндр, заполненный жидкостью. Верхние края свободно оперты</p> 	$\sigma_m = \frac{\gamma H R}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{\gamma (H - x) R}{h}$
<p>Длинная коническая оболочка. Равномерное внутреннее давление</p> 	<p>Вдали от краев</p> $\sigma_m = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{h}$ $\omega = \frac{3px^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4hE}$
<p>Коническая оболочка под действием собственного веса. Края свободно оперты</p> 	<p>Вдали от краев</p> $\sigma_m = \frac{\gamma_M x}{2 \cos \alpha}; \quad \sigma_t = \frac{\gamma_M x \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$ <p>Радиальное перемещение края ($x = l$)</p> $\Delta = \frac{\gamma_M l^2}{E} \operatorname{tg} \alpha \left(\sin^2 \alpha - \frac{\mu}{2} \right)$ <p>При $\sin \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \quad \Delta = 0$</p>

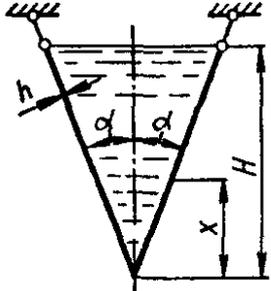
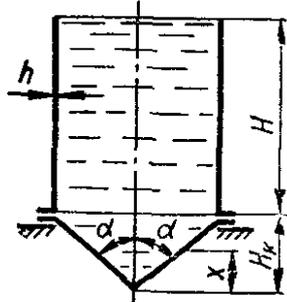
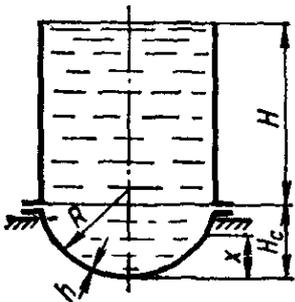
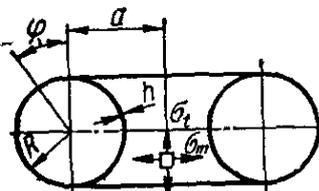
Схема	Формулы
<p>Коническая оболочка, полностью наполненная жидкостью. Края свободно оперты</p> 	$\sigma_m = \frac{\gamma x \operatorname{tg} \alpha \left(H - \frac{2}{3} x \right)}{2h \cos \alpha};$ $\sigma_t = \frac{\gamma x \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} (H - x)$ $\sigma_{m \max} = \frac{3\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{16h \cos \alpha} \text{ при } x = \frac{3}{4} H$ $\sigma_{t \max} = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4h \cos \alpha} \text{ при } x = \frac{H}{2}$ <p>Изменение радиуса круга на контуре</p> $\Delta = -\mu \frac{\gamma H^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{6hE \cos \alpha}$
<p>Цилиндрическая оболочка с коническим дном, наполненная жидкостью</p> 	<p>Напряжения в днище</p> $\sigma_m = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} \left(H + H_k - \frac{2}{3} x \right) x$ $\sigma_t = \frac{\gamma x \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} (H + H_k - x)$ <p>Если $H > \frac{H_k}{3}$, то</p> $\sigma_{m \max} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} \left(H + \frac{H_k}{3} \right) H_k \text{ при } x = H_k$ <p>Если $H < \frac{H_k}{3}$, то</p> $\sigma_{m \max} = \frac{3\gamma \operatorname{tg} \alpha}{16h \cos \alpha} (H + H_k)^2$ <p>при $x = \frac{3}{4} (H + H_k)$</p> <p>Если $H \geq H_k$, то</p> $\sigma_{t \max} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \alpha} (H + H_k)^2$ <p>при $x = \frac{H + H_k}{2}$</p> <p>Если $H \leq H_k$, то</p> $\sigma_{t \max} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} H H_k \text{ при } x = H_k$

Схема	Формулы
<p data-bbox="293 465 699 571">Цилиндрическая оболочка со сферическим дном, заполненная жидкостью</p> 	<p data-bbox="925 347 1276 392">Напряжения в днище</p> $\sigma_m = \frac{\gamma R}{2h} \left[H + H_c - x + \frac{x(3R - x)}{3(2R - x)} \right]$ $\sigma_{m_{\max}} = \frac{\gamma R}{2h} (H + H_c) \text{ при } x = 0$ $\sigma_t = \frac{\gamma R}{2h} \left[H + H_c - x - \frac{x(3R - x)}{3(2R - x)} \right]$ $\sigma_{t_{\max}} = \frac{\gamma R}{2h} (H + H_c) \text{ при } x = 0$ <p data-bbox="782 884 1420 929">Для полусферического дна ($H_c = R$)</p> $\sigma_{m_{\max}} = \sigma_{t_{\max}} = \frac{\gamma R}{2h} (H + R) \text{ при } x = 0$
<p data-bbox="293 1361 702 1467">Торовая оболочка. Равномерное внутреннее давление</p> 	$\sigma_m = \frac{pR}{2h} \frac{2a + R \sin \varphi}{a + R \sin \varphi}$ $\sigma_{m_{\max}} = \frac{pR(2a - R)}{2h(a - R)} \text{ при } \varphi = -\pi/2$ $\sigma_t = \frac{pR}{2h}$ $w = \frac{pR^2}{2Eh} \left[\frac{a}{R} (1 - 2\mu) + (1 - \mu) \cos \varphi \right]$ <p data-bbox="813 1747 1404 1859">Значения σ_m и σ_t достаточно точны при $a \geq (2 - 3)R$</p>

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

17.1. Основные понятия о предельном состоянии

Приведенные выше методики расчета на прочность стержней, балок и конструкций были основаны на оценке прочности материала в опасной точке, т. е. проводился расчет по *допускаемым напряжениям*. Опасным, или предельным, состоянием конструкции считалось такое ее состояние, при котором наибольшее местное напряжение достигало опасной величины — предела текучести (для пластичного материала) или временного сопротивления (для хрупкого материала). Состояние всей остальной массы материала во внимание не принималось.

В то же время при неравномерном распределении напряжений, например при изгибе, кручении, в статически неопределимых конструкциях, изготовленных из пластичных материалов, появление местных напряжений, равных пределу текучести, в большинстве случаев не является опасным для всей конструкции в целом.

В связи с этим возникла необходимость в оценке прочности конструкции по ее предельному состоянию.

Под *предельным состоянием конструкции* понимают такое ее состояние, при котором она теряет способность сопротивляться внешним воздействиям или перестает удовлетворять предъявляемым к ней эксплуатационным требованиям.

Различают три вида предельных состояний: а) *по несущей способности* (прочности, устойчивости и усталости). При достижении этого состояния конструкция теряет способность сопротивляться внешним воздействиям или получает такие остаточные изменения, при которых она перестает удовлетворять предъявляемым к ней эксплуатационным требованиям; б) *по развитию чрезмерных деформаций* от статических или динамических нагрузок, при которых в конструкции, сохраняющей прочность и устойчивость, появляются необратимые деформации или колебания чрезмерной амплитуды, так что конструкция перестает удовлетворять предъявляемым к ней эксплуатационным требованиям; в) *по образованию и развитию трещины*, когда в конструкции, сохраняющей прочность и устойчивость, появляются крупные трещины, вследствие чего дальнейшая эксплуатация конструкции становится невозможной (потеря требуемой водонепроницаемости, опасность коррозии из-за повреждения отделочного слоя и т. п.).

Методы расчетов по предельным состояниям широко применяются при проектировании строительных конструкций и позволяют вскрыть резервы прочности, не используемые при расчетах по допускаемым напряжениям, и уменьшить вес конструкции.

Ниже рассмотрены некоторые примеры расчета по предельным нагрузкам конструкций, изготовленных из пластичных материалов, имеющих площадку текучести на диаграммах растяжения, сжатия и чистого сдвига. С целью упрощения расчетов диаграммы типа приведенной на рис. 310 схематизируются таким образом, что участок прямой, выражающий закон Гука, непосредственно переходит в горизон-

тальную прямую без плавного перехода (рис. 311). Этим самым принимается равенство между пределами пропорциональности и текучести. Длина горизонтального участка диаграммы не ограничивается, т. е. материал считается идеально пластичным, не упрочняющимся. Такая диаграмма называется *диаграммой Прандтля*.

Замена реальных диаграмм схематизированной диаграммой Прандтля приемлема для материалов типа алюминия и вполне допустима для материалов, имеющих диаграммы с ограниченной длиной площадки текучести (рис. 312).

Предельное состояние конструкции, определяемое значительной пластической деформацией, наступит в начале упрочнения материала, и предельная нагрузка может быть вычислена по пределу текучести.

Для сложного напряженного состояния существуют различные теории перехода материала в пластичное состояние. Наиболее просто

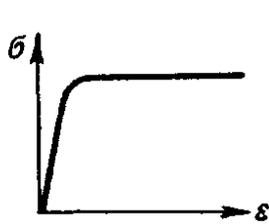


Рис. 310

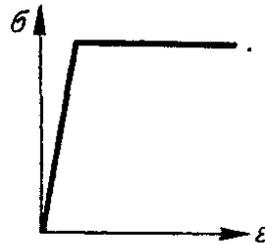


Рис. 311

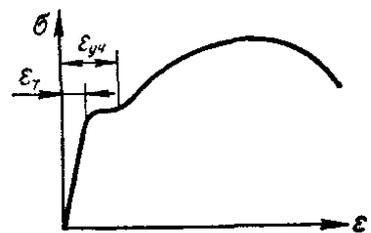


Рис. 312

расчеты выполняются при использовании теории пластичности Сен-Венана, согласно которой пластичное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения — предела текучести при сдвиге

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (17.1)$$

Исходя из изложенных выше положений, рассмотрим некоторые характерные случаи расчета по предельному состоянию.

17.2. Расчеты при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии напряжения распределяются равномерно по площади поперечного сечения стержня. Поэтому расчеты на прочность статически определимых систем по допускаемому напряжению и по предельному состоянию дают один и тот же результат. В случае статически неопределимых систем результаты расчетов будут различны. Это легко показать на примере расчета на растяжение трехстержневой подвески (рис. 313), нагруженной силой P . Площади поперечных сечений F стержней одинаковы; материал пластичный с пределом текучести σ_T .

При расчете рассматриваемой один раз статически неопределимой системы по допускаемому напряжению согласно данным раздела 7.3 при $F_1 = F_2 = F$

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad (17.2)$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P. \quad (17.3)$$

Очевидно, всегда $N_1 > N_2 = N_3$, т. е. большее усилие возникает в среднем стержне. Следовательно, в среднем стержне будет и наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{N_1}{F} = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{P}{F}. \quad (17.4)$$

Запас прочности при этом будет

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{1 + 2 \cos^3 \alpha}{P} F \sigma_T. \quad (17.5)$$

При расчете рассматриваемой подвески по предельному состоянию усилие в среднем стержне при появлении в нем пластической деформации будет

$$N_{1T} = F \sigma_T \quad (17.6)$$

При этом согласно (17.2) внешняя нагрузка

$$P_{1T} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) F \sigma_T, \quad (17.7)$$

а усилия в крайних стержнях рассматриваемой системы, превратившейся в статически определимую систему, будут

$$N_2 = N_3 = \frac{P - F \sigma_T}{2 \cos \alpha}. \quad (17.8)$$

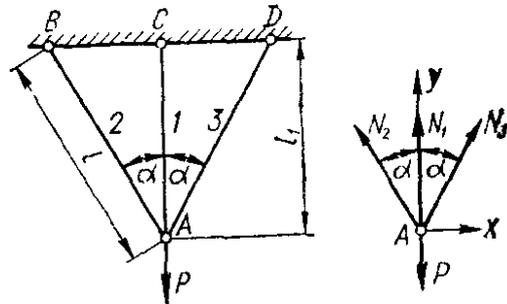


Рис 313

Несущая способность конструкции выдержать нагрузку $P > P_{1T}$ будет исчерпана, когда напряжения в крайних стержнях достигнут предела текучести, а соответствующая этому моменту нагрузка согласно (17.8) будет такой:

$$N_2 = N_3 = F \sigma_T = \frac{P_{\text{пр}} - F \sigma_T}{2 \cos \alpha},$$

откуда

$$P_{\text{пр}} = (1 + 2 \cos \alpha) F \sigma_T. \quad (17.9)$$

Запас прочности при расчете по предельному состоянию

$$n_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{пр}}}{P} = \frac{(1 + 2 \cos \alpha) F \sigma_T}{P}. \quad (17.10)$$

Из сопоставления (17.5) и (17.10) видно, что $n_{\text{пр}} > n_T$. Например, при $\alpha = 30^\circ$ отношение $n_{\text{пр}}/n_T = 1,19$. Таким образом, расчет по предельному состоянию позволил выявить скрытый запас прочности конструкции.

17.3. Расчет при кручении

При кручении стержней сплошного круглого сечения касательные напряжения в упругой области на расстоянии ρ от центра сечения (рис. 314) определяются по формуле (9.7):

$$\tau_\rho = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{J_D}, \quad (17.11)$$

максимальные напряжения по формуле (9.8):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}. \quad (17.12)$$

Опасное состояние стержня при расчете на кручение по допускаемым напряжениям определяется появлением пластических деформаций в крайних волокнах, когда крутящий момент

$$M_{\text{кр}} = M_{\text{T}} = \tau_{\text{T}} W_{\rho}. \quad (17.13)$$

При этом стержень сохранит способность воспринимать возрастающий крутящий момент вследствие роста напряжений до уровня предела текучести τ_{T} (рис. 315) в точках, лежащих ближе к центру сечения (рис. 316, а).

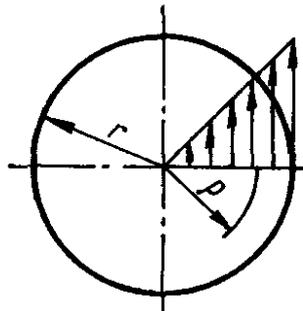


Рис. 314

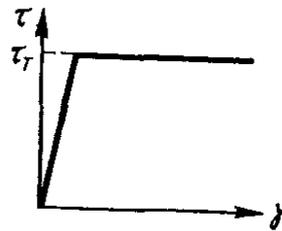


Рис. 315

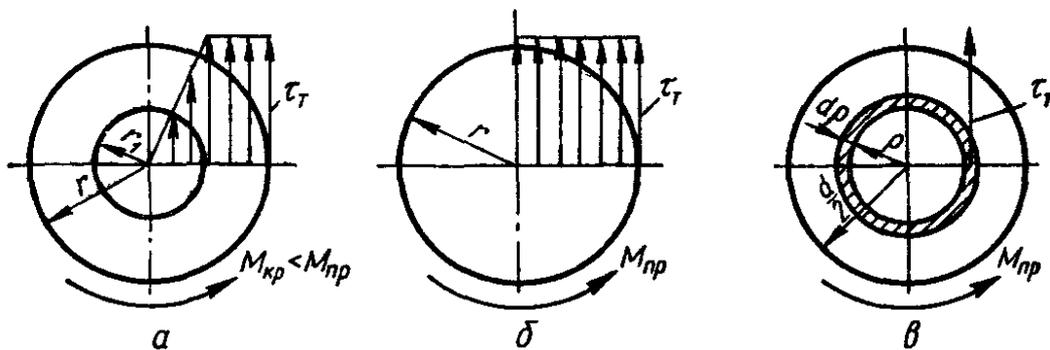


Рис. 316

При расчете по предельному состоянию, при котором пластические деформации распределены по всему сечению (рис. 316, б), крутящий момент (рис. 316, в)

$$M_{\text{пр}} = \int_F \rho dF \tau_{\text{T}} = \tau_{\text{T}} \cdot 2\pi \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho \quad (17.14)$$

или

$$M_{\text{пр}} = \tau_{\text{T}} \frac{\pi d^3}{12}. \quad (17.15)$$

Величина

$$\frac{\pi d^3}{12} = W_{\rho(\text{пл})} \quad (17.16)$$

называется *пластическим моментом сопротивления при кручении*. Тогда

$$M_{\text{пр}} = \tau_{\text{T}} W_{\rho(\text{пл})}. \quad (17.17)$$

Отношение предельного момента $M_{пр}$ к моменту M_T , определяемому по формуле (17.13), будет

$$\frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{W_{р(пл)}}{W_{р}} = \frac{\pi d^3 \cdot 16}{12\pi d^3} = \frac{4}{3},$$

или

$$M_{пр} = \frac{4}{3} M_T = 1,33M_T.$$

Таков скрытый запас прочности скручиваемого круглого стержня, который обнаруживается при переходе от расчета по допускаемым напряжениям к расчету по предельному состоянию.

В случае статически неопределимой системы, приведенной на рис. 317, а, б, в, запас прочности при расчете по предельному состоянию оказывается в 1,78 раза больше запаса прочности, получаемого при расчете по допускаемым напряжениям.

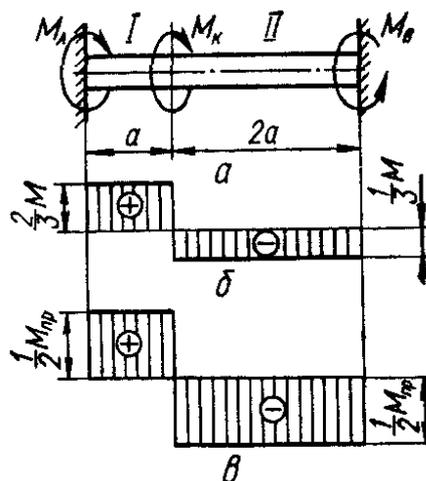


Рис. 317

17.4. Расчет при изгибе

При изгибе нормальные напряжения по высоте сечения распределены неравномерно (рис. 318, а) и на расстоянии y от нейтральной линии определяются по формуле Навье (10.6):

$$\sigma = \frac{My}{J}.$$

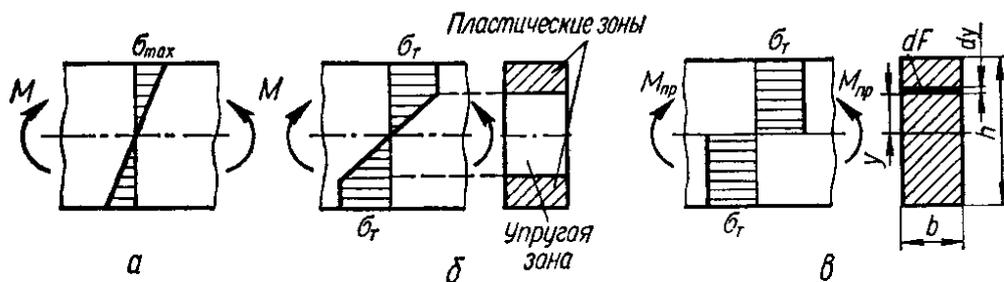


Рис. 318

Максимальные напряжения на краю сечения

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W},$$

где W — осевой момент сопротивления площади поперечного сечения балки, который, например, для балки прямоугольного сечения шириной b и высотой h будет

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Опасная величина изгибающего момента при расчете по допускаемым напряжениям будет (если пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы)

$$M_T = \sigma_T W. \quad (17.18)$$

При этом балка способна воспринимать возрастающий изгибающий момент. По мере увеличения изгибающего момента по сравнению с M_T пластическое состояние материала распространяется в направлении нейтральной оси (рис. 318, б), вплоть до полного исчерпания несущей способности балки. Предельное состояние наступит тогда, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению (рис. 318, в), после чего дальнейшая деформация балки будет происходить без увеличения изгибающего момента. В рассматриваемом поперечном сечении образуется так называемый *пластический шарнир*, который передает изгибающий момент, равный предельному изгибающему моменту, определяемому для сечения, симметричного относительно нейтральной оси, по формуле

$$M_{пр} = \int_F \sigma_T y dF = \sigma_T \cdot 2 \int_{F/2} y dF = \sigma_T \cdot 2S_{max}, \quad (17.19)$$

где S_{max} — статический момент площади половины поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Величину $2S_{max}$ принято называть *пластическим моментом сопротивления* при изгибе и обозначать $W_{пл}$. Тогда

$$M_{пр} = \sigma_T W_{пл} \quad (17.20)$$

Отношение

$$\frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{W_{пл}}{W} \quad (17.21)$$

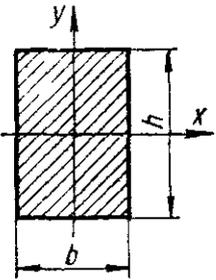
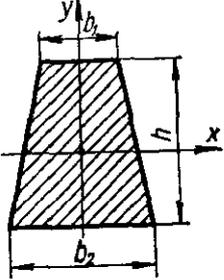
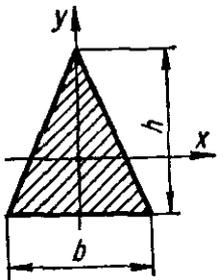
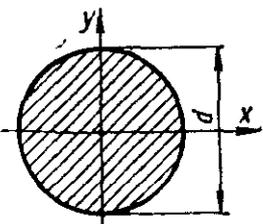
характеризует степень увеличения запаса прочности балки при переходе к расчету по предельным нагрузкам. В случае балки прямоугольного сечения

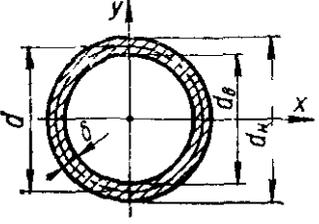
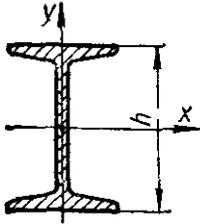
$$\frac{W_{пл}}{W} = \frac{\frac{bh^3}{4}}{\frac{bh^3}{6}} = 1,5.$$

Для двутавровых прокатных балок в среднем $\frac{W_{пл}}{W} = 1,18$.

В табл. 44 сведены расчетные формулы для определения пластических моментов сопротивления для некоторых сечений балок.

Таблица 44. Пластические моменты сопротивления для некоторых сечений балок

Сечение	Пластические моменты сопротивления
	$W_{\text{пл}} = \frac{bh^2}{4}; \quad W_{\text{пл}} = 1,5W_x$
	$W_{\text{пл}} = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)} \left[b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \times \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$
	$W_{\text{пл}} = \frac{bh^2}{6} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,0977bh^2; \quad W_{\text{пл}} \approx 2,36W_x$
	$W_{\text{пл}} = \frac{d^3}{6}, \quad W_{\text{пл}} = 1,7W_x$

Сечение	Пластические моменты сопротивления
	$W_{пл} = \frac{1}{6} (d_H^3 - d_B^3) \approx d^2 \delta$ $W_{пл} = 1,7 \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^4} W_x; \quad \alpha = \frac{d_B}{d_H}$
	$W_{пл} = S_x; \quad W_{пл} \approx (1,14 - 1,18) W_x$

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

18.1. Устойчивое и неустойчивое упругое равновесие

В системе, находящейся в деформированном состоянии, равновесие между внешними нагрузками и вызываемыми ими внутренними силами упругости может быть не только устойчивым, но и неустойчивым.

Упругое равновесие *устойчиво*, если деформированное тело при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после удаления внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние. Упругое равновесие *неустойчиво*, если деформированное тело, будучи выведено из него каким-либо воздействием, продолжает деформироваться в направлении вызванного отклонения и после прекращения воздействия в исходное состояние не возвращается. Между этими двумя состояниями равновесия находится переходное состояние, называемое *критическим*. При критическом состоянии деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранять первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия.

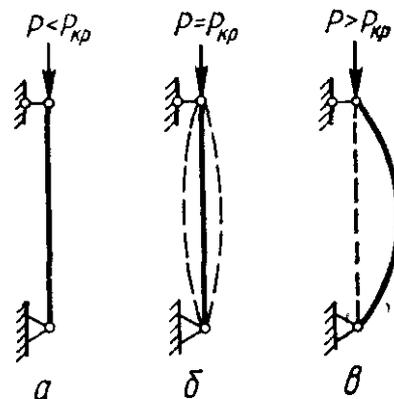


Рис. 319

Устойчивость формы равновесия деформированного тела зависит от величины приложенной к нему нагрузки. *Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется критической нагрузкой и обозначается через $P_{кр}$.*

На рис. 319, а, б, в показаны возможные случаи деформирования стержня в зависимости от сжимающей нагрузки: при $P < P_{кр}$ форма равновесия остается устойчивой (на рис. 319, а); при $P = P_{кр}$ — состояние безразличного равновесия, когда стержень может занимать одно из трех показанных сплошной и штриховыми линиями положений (рис. 319, б); при $P > P_{кр}$ стержень теряет устойчивость, выпучивается, т. е. прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой (рис. 319, в).

Достижение нагрузками критических значений равносильно разрушению конструкции, так как неустойчивая форма равновесия неминуемо будет утрачена, что практически связано с неограниченным ростом деформации и напряжений. Разрушение обычно происходит внезапно от изгиба и при малых значениях сжимающих напряжений, когда прочность элемента на сжатие еще далеко не исчерпана. Для обеспечения определенного запаса устойчивости необходимо, чтобы удовлетворялось условие

$$P < [P], \tag{18 1}$$

где P — действующая нагрузка; $[P]$ — допускаемая нагрузка, которая при коэффициенте запаса устойчивости n_y определяется так:

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}. \quad (18.2)$$

Таким образом, при расчете упругих систем (в частности, таких типичных систем, какими являются сжатые стержни) на устойчивость прежде всего необходимо определить величину критической силы $P_{кр}$.

Ниже рассмотрим основные формулы для определения критических нагрузок при сжатии длинного тонкого стержня или при так называемом продольном изгибе.

18.2. Формула Эйлера для определения критической нагрузки сжатого стержня

Предполагая, что критическая сила $P_{кр}$ не вызывает в стержне напряжений, превышающих предел пропорциональности, и что имеют место только малые отклонения от прямолинейной формы, значение критической силы $P_{кр}$ для сжатого стержня длиной l , закрепленного по схеме, приведенной на рис. 320, а, можно определить из следующего приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки (раздел 10.5):

$$EJ_{\min} \frac{d^2w(z)}{dz^2} = M(z), \quad (18.3)$$

где E — модуль упругости материала стержня при растяжении; J_{\min} — наименьший момент инерции сечения стержня (при потере устойчивости прогиб произойдет перпендикулярно к оси наименьшей жесткости); $M(z)$ — изгибающий момент:

$$M(z) = -Pw. \quad (18.4)$$

Подставив (18.4) в (18.3), получим

$$EJ_{\min} \frac{d^2w}{dz^2} + Pw = 0,$$

или

$$\frac{d^2w}{dz^2} + k^2w = 0, \quad (18.5)$$

где

$$k^2 = \frac{P_{кр}}{EJ_{\min}}. \quad (18.6)$$

Решением полученного однородного дифференциального уравнения (18.5) будет

$$w = A \sin kz + B \cos kz,$$

где A и B — постоянные интегрирования — определяются из граничных условий. В частности, для случая шарнирного закрепления концов сжатого стержня (рис. 320, а) граничные условия имеют вид

$$w(z)|_{z=0} = 0, \quad w(z)|_{z=l} = 0$$

Из первого граничного условия следует, что $B = 0$, поэтому

$$w(z) = A \sin kz. \quad (18.7)$$

Из второго условия получаем

$$A \sin kl = 0.$$

Так как

$$A \neq 0,$$

то

$$\sin kl = 0. \quad (18.8)$$

Корень этого уравнения kl может иметь бесконечное число значений: $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, т. е.

$$kl = n\pi,$$

где n — произвольное целое число.

Очевидно, первый корень $kl = 0$ должен быть отброшен, так как он не соответствует исходным данным задачи. Таким образом,

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2. \quad (18.9)$$

Учитывая (18.6) и (18.9), находим искомое значение сжимающего усилия

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (18.10)$$

Это выражение впервые было получено Эйлером и называется *формулой Эйлера*.

Наименьшее значение критической силы $P_{кр}$, получаемое при $n = 1$ и $kl = \pi$, определяется формулой

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (18.11)$$

Уравнение изогнутой линии при малых деформациях согласно (18.7) имеет вид

$$w(z) = A \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Значение A характеризуется величиной максимального прогиба $w_{\max} = f$, когда $\sin \frac{n\pi z}{l} = 1$. Следовательно,

$$w = f \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (18.12)$$

Максимум $w(z)$ имеет место при таком значении z , для которого

$$\frac{dw}{dz} = 0,$$

т. е.

$$\frac{dw}{dz} = f \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi z}{l} = 0,$$

или

$$\cos \frac{n\pi z}{l} = 0.$$

Наименьшее значение аргумента, при котором косинус равен нулю, равно $\pi/2$, следовательно,

$$\frac{n\pi z}{l} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$z = \frac{l}{2n}. \quad (18.13)$$

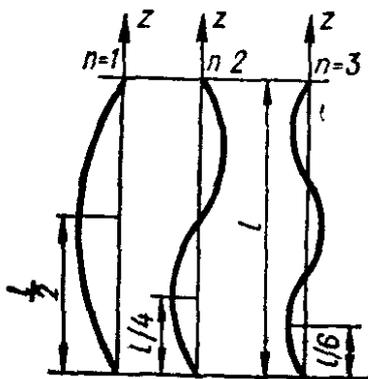


Рис. 321

Из (18.12) или (18.13) следует, что n равно числу полуволн синусоиды, уместящихся на длине изогнутого стержня (рис. 321). Если $n=1$, то $z=l/2$, и максимальное значение прогиба $w_{\max} = f$ имеет место посредине длины стержня. Это соответствует основному случаю, показанному на рис. 320, б, когда после потери стержнем устойчивости при минимальном значении критической силы $P_{кр}$ на его изогнутой оси уместяется только одна полуволна синусоиды.

18.3. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы

Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы легко выяснить путем сопоставления вида изогнутой

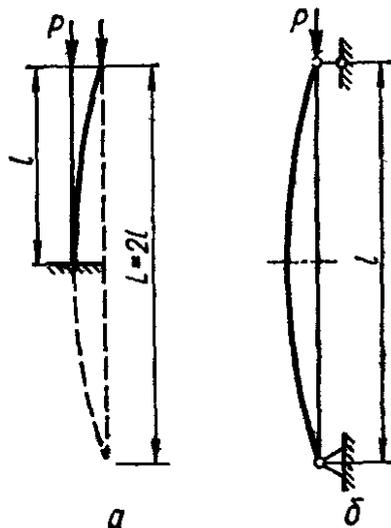


Рис. 322

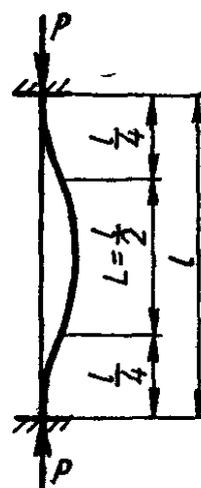


Рис. 323

оси стержня при различных случаях закрепления с формой изогнутой оси в основном случае, т. е. при шарнирном закреплении обоих концов стержня.

Стержень длиной l с одним жестко закрепленным, а другим свободным концом (рис. 322, а). При потере устойчивости стержень находится в таком же состоянии, как и половина стержня длиной $L=2l$ с шарнирно закрепленными концами (рис. 322, б). Это значит, что в рассматриваемом случае формула (18.11) примет вид

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2}. \quad (18.14)$$

При этом изогнутая ось стержня (рис. 322, а) имеет вид половины полуволны синусоиды. Значит, $n = 1/2$.

Стержень длиной l с двумя жестко закрепленными концами (рис. 323). При потере устойчивости средняя часть стержня будет иметь такую же форму потери устойчивости, как и стержень длиной $L = l/2$ с шарнирно закрепленными концами, т. е.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0,5l)^2} = \frac{4\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (18.15)$$

В этом случае образуется две полуволны: средняя, длиной $L = l/2$, и две крайних половинки полуволны, длиной $l/2$. Значит, $n = 2$.

Стержень длиной l с одним жестко закрепленным концом, а другим шарнирно опертым (рис. 324). После потери устойчивости правая часть

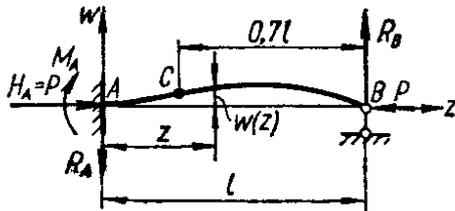


Рис. 324

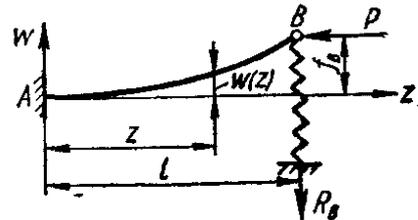


Рис. 325

стержня CB будет иметь вид полуволны синусоиды. Из сравнения рис. 324 и рис. 322, б находим, что участок CB имеет длину $L = 0,7l$, а следовательно,

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0,7l)^2}. \quad (18.16)$$

Из сопоставления (18.11) и (18.14) — (18.16) следует, что в общем случае указанные формулы могут быть представлены в виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\nu l)^2}, \quad (18.17)$$

где $\nu l = l_{пр}$ — приведенная длина стержня; l — фактическая длина стержня; ν — коэффициент приведения длины.

При шарнирном закреплении обоих концов стержня $\nu = 1$; если один конец стержня жестко закреплен, а другой свободен, то $\nu = 2$; если оба конца жестко закреплены, то $\nu = 1/2$; если один конец жестко закреплен, а второй шарнирно оперт, то $\nu = 0,7$.

Приведенные случаи закрепления концов стержня на практике в чистом виде встречаются редко. Наиболее распространены случаи закрепления, когда один конец стержня жестко заделан, а другой упруго оперт или когда оба конца упруго заделаны.

Рассматривая первый из указанных случаев (рис. 325), легко заметить, что после потери устойчивости упруго опертый конец перемещается в вертикальном направлении на величину f_B , при этом возникает упругая реакция R_B , пропорциональная отклонению f_B :

$$R_B = c f_B,$$

где c — коэффициент жесткости опоры B .

Дифференциальное уравнение упругой линии при этом имеет вид

$$EJ_{\min} \frac{d^2 w}{dz^2} = P(f_B - w) - cf_B(l - z) \quad (18.18)$$

или

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = k^2(f_B - w) - \frac{cf_B}{EJ_{\min}}(l - z), \quad (18.19)$$

где

$$k^2 = \frac{P_{\text{кр}}}{EJ_{\min}}.$$

Переписав уравнение (18.19) в виде

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + k^2 w = k^2 f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{\text{кр}}}\right) + k^2 \frac{cf_B}{P_{\text{кр}}} z, \quad (18.20)$$

найдем его решение

$$w = C \sin kz + D \cos kz + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{кр}}} l\right) + \frac{c}{P_{\text{кр}}} f_B z. \quad (18.21)$$

Постоянные интегрирования и критическую нагрузку определим из граничных условий:
при $z = 0$

$$w(0) = w_A = 0, \quad (18.22)$$

$$\frac{dw(0)}{dz} = \theta(0) = 0; \quad (18.23)$$

при $z = l$

$$w(l) = w_B = f_B. \quad (18.24)$$

Из (18.22) находим

$$D = -f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{кр}}} l\right).$$

Для использования (18.23) вычислим производную (18.21):

$$\frac{dw}{dz} = kC \cos kz - kD \sin kz + \frac{c}{P_{\text{кр}}} f_B,$$

откуда при $z = 0$ получаем

$$kC + \frac{c}{P_{\text{кр}}} f_B = 0,$$

или

$$C = -\frac{c}{kP_{\text{кр}}} f_B.$$

Подставив полученные значения C и D в (18.21), найдем

$$w(z) = -\frac{c}{kP_{\text{кр}}} f_B \sin kz - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{кр}}} l\right) \cos kz + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{кр}}} l\right) + \frac{cf_B}{P_{\text{кр}}} z. \quad (18.25)$$

Используем граничное условие (18.24). Положив в (18.25) $z = l$, найдем

$$\begin{aligned} w(l) = & -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kl - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kl + \\ & + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) + \frac{c}{P_{кр}} f_B l = f_B, \end{aligned}$$

или

$$-\frac{c}{kP_{кр}} \sin kl - \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos l = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 - \frac{P_{кр}}{cl}\right). \quad (18.26)$$

Если из этого уравнения найти наименьшее значение k , то тем самым будет найдено наименьшее значение критической нагрузки

$$P_{кр} = k^2 EJ_{\min}.$$

Рассмотрим два предельных случая. Положив $c = 0$, получим

$$\operatorname{tg} kl = \infty; \quad kl = \frac{\pi}{2},$$

т. е. приходим к расчетной схеме, когда один (левый) конец жестко заделан, а другой (правый) свободен (рис. 322, а). Величина критической силы в этом случае определяется формулой (18.14). Полагая $c = \infty$, из (18.26) находим $\operatorname{tg} kl = kl$, $kl = \pi/0,7$ и величину критической силы (18.26), которая соответствует случаю, когда один конец стержня жестко заделан, а другой шарнирно оперт (рис. 324).

Следовательно, изменение коэффициента упругости c от нуля до бесконечности может быть учтено коэффициентом приведения ν , который при этом будет изменяться от 2 до 0,7.

Значения коэффициента приведения длины ν , а также коэффициента устойчивости $\eta = k^2 l^2$ для центрально сжатых стержней постоянного и переменного поперечных сечений для различных случаев их нагружения и закрепления приведены в табл. 45. В табл. 46 даны значения критических нагрузок для полосы и некоторых двутавровых балок.

18.4. О потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала

Формула Эйлера была получена исходя из дифференциального уравнения упругой линии, поэтому ею можно пользоваться лишь в случае, если справедлив закон Гука, т. е. пока критическое напряжение, возникающее в сжатом стержне при критической нагрузке $P_{кр}$ (18.17), не превышает предела пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} < \sigma_{пл},$$

где F — площадь поперечного сечения стержня.

Представив критическое напряжение в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{F (\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i}\right)^2},$$

где $i = i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ — наименьший главный радиус инерции площади сечения стержня (раздел 2.7), или

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (18.27)$$

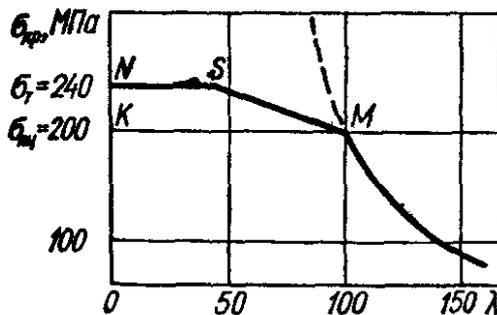


Рис. 326

где

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}} \quad (18.28)$$

— безразмерная величина, называемая *гибкостью стержня*, из (18.27) видим, что критическое напряжение зависит только от модуля упругости E и гибкости λ .

Построив график зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 326) — *гиперболу*

Эйлера, — можно убедиться, что для данного материала (с известным модулем E) формула (18.27) справедлива начиная с определенного значения гибкости, которое может быть найдено из условия

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{\text{пц}}.$$

Определим предельную гибкость $\lambda_{\text{пред}}$, ниже которой формулой (18.27) пользоваться нельзя:

$$\lambda_{\text{пред}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Так, для стали марки Ст3, модуль упругости которой $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} \approx 200$ МПа,

$$\lambda < \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

т. е. формулой Эйлера (18.27) можно пользоваться на участке гиперболы, показанной на рис. 326 сплошной линией, при гибкости λ не менее 100.

Однако, как показывает опыт, и на участке $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ при напряжениях в стержне, больших $\sigma_{\text{пц}}$, при которых формула Эйлера дает завышенные значения критических напряжений (участок гиперболы Эйлера, показанный на рис. 326 штрихами), стержень может потерять устойчивость. В этом случае значение критического напряжения мо-

жет быть вычислено, согласно опытным данным Ф. С. Ясинского, для различных материалов по эмпирической формуле

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (18.29)$$

Для чугуна пользуются квадратичной зависимостью

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (18.30)$$

Значения постоянных коэффициентов a , b и c для некоторых материалов приведены ниже.

Материал	$\lambda_{пред}$	a	b	c
Ст2, Ст3	100	3100	11,4	—
Ст5	100	4640	32,6	—
Сталь 40	90	3210	11,6	—
Кремнистая сталь	100	5890	38,2	—
Дерево (сосна)	110	293	1,94	—
Чугун	80	7760	120	0,53

При некоторых значениях гибкости λ_0 величина $\sigma_{кр}$, вычисленная по формулам (18.29) или (18.30), становится равной предельному напряжению при сжатии, т. е. для пластичных материалов

$$\sigma_{кр} = \sigma_T;$$

для хрупких материалов

$$\sigma_{кр} = \sigma_B.$$

Стержни, у которых $\lambda < \lambda_0$, называются *стержнями малой гибкости* и их рассчитывают только на прочность. Для стали марки Ст3, например, при $40 < \lambda < 100$ график зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$, полученный на основании формулы (18.29), представляет собой наклонную прямую SM (рис. 326), а часть графика NS при $0 < \lambda < 40$ может рассматриваться как горизонтальная линия.

Таким образом, график зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для стали марки Ст3 состоит из трех участков: горизонтального участка NS , соответствующего $\sigma_{кр} = \sigma_T$; наклонного участка SM при $40 < \lambda < 100$ и гиперболы Эйлера при $\lambda > 100$ (правее точки M).

18.5. Расчет сжатых стержней на устойчивость с помощью коэффициентов уменьшения основного допускаемого напряжения

Центрально сжатые стержни с малой гибкостью ($\lambda < \lambda_0$) сохраняют несущую способность при условии, что критические напряжения не превышают опасного напряжения, т. е. что

$$\sigma_{кр} < \sigma_0,$$

где для хрупких материалов за опасное напряжение принимается временное сопротивление, т. е. $\sigma_0 = \sigma_B$, для пластичных материалов — предел текучести $\sigma_0 = \sigma_T$. Несущая способность стержней малой гибкости определяется прочностью материала.

В случае стержней с большой гибкостью опасным состоянием следует считать момент возникновения в сжатом стержне напряжений, равных $\sigma_{кр}$. Поэтому для обеспечения работоспособности стержня необходимо выполнение следующего условия устойчивости:

$$\sigma_{кр} < [\sigma]_y, \quad (18.31)$$

где $[\sigma]_y$ — допускаемое напряжение на устойчивость, определяемое по формуле

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}.$$

Здесь n_y — коэффициент запаса устойчивости, который из-за возможной эксцентриситета приложения нагрузки, искривления стержня и неоднородности материала принимается всегда несколько больше основного коэффициента запаса на прочность ($n_y > n_0$). Для стали $n_y = 1,8 - 3,0$; для чугуна $n_y = 5,0 - 5,5$; для дерева $n_y = 2,8 - 3,2$. Чем больше гибкость, тем меньшим принимают n_y .

На практике при расчете на устойчивость принято пользоваться не допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma]_y$, а допускаемым напряжением на сжатие $[\sigma_-]$ с соответствующим поправочным коэффициентом φ , значение которого может быть установлено на основании

$$\frac{[\sigma]_y}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \frac{n_0}{\sigma_0}.$$

Отсюда

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_0} \frac{n_0}{n_y} [\sigma_-]$$

или

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-], \quad (18.32)$$

где

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_0} \frac{n_0}{n_y}. \quad (18.33)$$

Здесь φ — коэффициент уменьшения допускаемого напряжения на сжатие, или коэффициент условного допускаемого напряжения.

В табл. 47 приведены значения φ для различных гибкостей.

Таким образом, учитывая (18.32), расчетную формулу на устойчивость (18.31) теперь можем переписать в виде

$$\sigma_{max} < [\sigma]_y = \varphi [\sigma_-]$$

или

$$\sigma = \frac{P}{F_{брутто}} < \varphi [\sigma_-]. \quad (18.34)$$

Различают два вида расчета на устойчивость: *поверочный* и *проектировочный*.

При *поверочном* расчете исходят из известных размеров и формы поперечного сечения стержня и прежде всего определяют наименьший

осевой момент инерции J_{\min} , площадь F , вычисляют минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}},$$

а также гибкость

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}}.$$

Затем, зная гибкость, находят по таблице коэффициент φ , определяют допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-].$$

сравнивают действительное напряжение $\sigma = \frac{P}{F_{\text{брутто}}}$ с допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma]_y$ и выясняют, удовлетворяется ли условие

$$\sigma \leq [\sigma]_y.$$

При проекторочном расчете исходят из условия

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{\text{брутто}}} \leq [\sigma_-]. \quad (18.35)$$

Необходимое сечение определяется формулой

$$F_{\text{брутто}} = \frac{P}{\varphi [\sigma_-]}. \quad (18.36)$$

Кроме искомого площади $F_{\text{брутто}}$ в последнем соотношении неизвестным является также и коэффициент φ . Поэтому при подборе сечения приходится пользоваться методом последовательных приближений, варьируя величину коэффициента φ . Обычно при первой попытке принимают $\varphi_1 = 0,5 - 0,6$. При принятом φ_1 по формуле (18.36) определяют $F_{\text{брутто}}$ и подбирают соответствующее сечение. Зная сечение и определив J_{\min} , i_{\min} и λ , устанавливают фактическое значение коэффициента φ'_1 . Если φ'_1 значительно отличается от φ_1 , то и напряжение будет отличаться от допускаемого. Тогда следует повторить расчет, т. е. предпринять вторичную попытку, приняв среднее по величине значение между коэффициентами φ_1 и φ'_1 :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

В результате второй попытки устанавливают φ'_2 . Если требуется третья попытка, то расчет повторяют при

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}$$

и т. д. Обычно на практике удается обойтись двумя-тремя попытками. При заданном сечении условие (18.35) можно использовать для определения допускаемого значения нагрузки P или предельной длины l стержня через его гибкость λ , обеспечивающих устойчивость стержня.

18.6. Выбор материала и рациональной формы поперечных сечений сжатых стержней

Для стержней большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$), когда $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{пц}}$, модуль упругости E является единственной характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня потере устойчивости. Тогда, очевидно, для стальных стержней, работающих на сжатие, у которых E практически изменяется мало, целесообразно применять сталь повышенной прочности. Что касается формы поперечного сечения, то рациональной будет такая форма, при которой при определенной площади величина наименьшего радиуса инерции i_{min} (см. раздел 2.7) является наибольшей.

Введем безразмерную характеристику

$$\xi = \frac{i_{\text{min}}}{\sqrt{F}},$$

которую назовем *удельным радиусом инерции*. О рациональности того или иного сечения можно судить на основании данных, приведенных ниже.

Сечение	ξ
Трубчатое	
$\alpha = \frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{нар}}} = 0,95 + 0,8$	2,25 + 1,64
$\alpha = 0,7 + 0,8$	1,2 + 1,0
Угловое	0,5 + 0,3
Двутавровое	0,41 + 0,27
Швеллерное	0,41 + 0,29
Квадратное	0,289
Круглое	0,283
Прямоугольное ($h = 2b$)	0,204

Анализ приведенных данных показывает, что наиболее рациональными являются трубчатые сечения, столь же рациональны коробчатые тонкостенные сечения. Наименее рациональными являются сплошные прямоугольные сечения.

При проектировании стержней, несущая способность которых определяется сопротивлением потере устойчивости, следует стремиться к тому, чтобы стержень был равноустойчивым во всех направлениях, т. е. чтобы главные моменты инерции были по возможности одинаковыми.

18.7. Продольно-поперечный изгиб

Изгиб стержня называется продольно-поперечным, если в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты как от продольных, так и от поперечных нагрузок (рис. 327).

Вычисление полного изгибающего момента M_n в поперечных сечениях производят с учетом прогибов оси стержня:

$$|M_n(z)| = |M(z)| + |S\omega_n(z)|, \quad (18.37)$$

где $M(z)$ — изгибающий момент от действия поперечной нагрузки; $S\omega_n(z)$ — изгибающий момент от действия осевой нагрузки S . Определение величины полного изгибающего момента $M_n(z)$ осложняется тем, что в этом случае нельзя пользоваться принципом независимости действия сил.

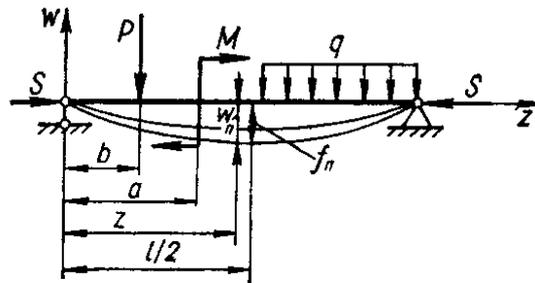


Рис. 327

Рассмотрим приближенный метод определения изгибающего момента $M_n(z)$. Он основан на допущении, что изогнутая ось балки при поперечной нагрузке принимает форму синусоиды, т. е.

$$\omega(z) \approx f \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (18.38)$$

При наличии продольной силы также приближенно принимают, что

$$\omega_n(z) \approx f_n \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (18.39)$$

Такое допущение позволяет получать достаточную точность для шарнирно опертой балки при действии поперечных нагрузок, направленных в одну сторону, особенно, если деформация балки оказывается симметричной относительно ее середины, где $\omega_n(l/2) = f_n$.

Дифференциальные уравнения упругой линии при поперечном (10.31) и продольно-поперечном изгибе соответственно запишем так:

$$\frac{d^2\omega(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ}; \quad (18.40)$$

$$\frac{d^2\omega_n(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ} - \frac{S\omega_n(z)}{EJ}. \quad (18.41)$$

Исключив из уравнений (18.40) и (18.41) $M(z)$ и учтя допущения (18.38) и (18.39), будем иметь

$$(f_n - f) \frac{d^2}{dz^2} \left(\sin \frac{\pi z}{l} \right) = - \frac{S}{EJ} f_n \sin \frac{\pi z}{l}.$$

После дифференцирования получим

$$\frac{\pi^2}{l^2} (f_n - l) = \frac{S}{EJ} f_n. \quad (18.42)$$

Обозначив

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_3, \quad (18.43)$$

из уравнения (18.42) найдем выражение для прогиба посредине пролета балки при продольно-поперечном изгибе:

$$f_n = \frac{l}{1 - \frac{S}{P_3}}. \quad (18.44)$$

Формула (18.44) дает удовлетворительные результаты, когда сжимающая сила S не превышает $0,8P_{кр}^I$. Предполагая, что изгибающие моменты пропорциональны прогибам, в соответствии с (18.44) можно получить простую приближенную формулу для определения изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе в виде

$$M_n = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_3}}. \quad (18.45)$$

Тогда величина максимальных напряжений в сечении стержня определится формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{(M_n)_{\max}}{W} \quad (18.46)$$

или с учетом (18.45) формулой

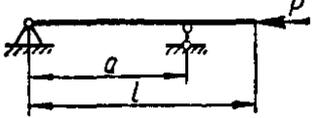
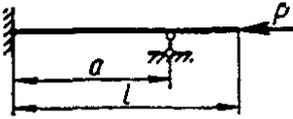
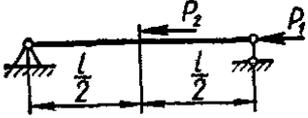
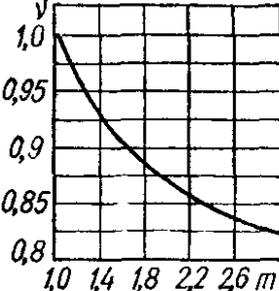
$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W \left(1 - \frac{S}{P_3}\right)}. \quad (18.47)$$

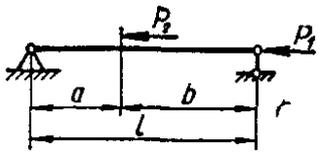
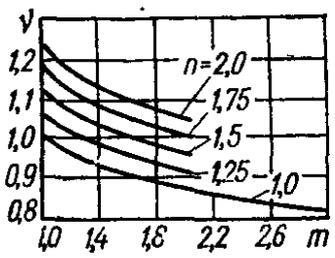
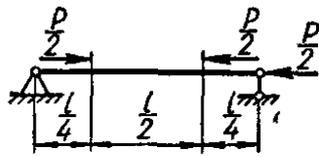
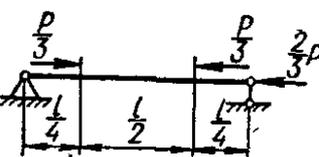
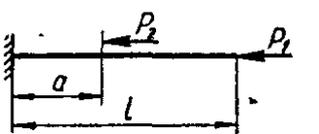
Из формулы следует, что принцип независимости действия сил здесь не имеет места.

В табл. 48 приведены уравнения изгибающего момента и упругой линии для некоторых случаев продольно-поперечного изгиба балок постоянного поперечного сечения.

Таблица 45. Коэффициенты ν и η для определения критической нагрузки центрально сжатых стержней по формуле $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$

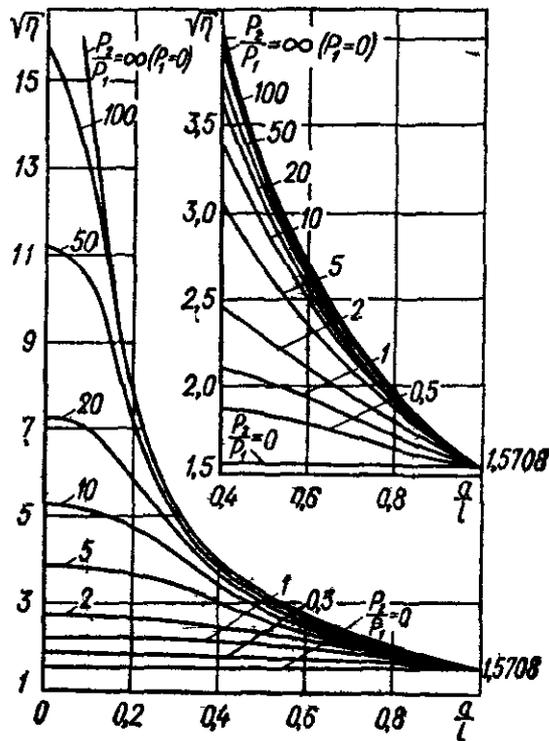
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
1		1	9,8696
2		0,699	20,199
3		2	2,4674
4		1	9,8696
5		2	2,4674
6		0,5	39,4784
7		0,699	20,199

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν		Коэффициент устойчивости η	
		a/l	ν	a/l	η
8		0	2	0	2,4674
		0,1	1,87	0,1	2,832
		0,2	1,73	0,2	3,283
		0,3	1,6	0,3	3,845
		0,4	1,47	0,4	4,551
		0,5	1,35	0,5	5,438
		0,6	1,23	0,6	6,511
		0,7	1,13	0,7	7,726
		0,8	1,06	0,8	8,874
		0,9	1,01	0,9	9,637
9		0	2	0	2,467
		0,1	1,85	0,1	2,883
		0,2	1,7	0,2	3,414
		0,3	1,55	0,3	4,105
		0,4	1,4	0,4	5,021
		0,5	1,26	0,5	6,26
		0,6	1,11	0,6	7,99
		0,7	0,975	0,7	10,39
		0,8	0,852	0,8	13,59
		0,9	0,757	0,9	17,24
10	 <p>$P_{кр} = (P_1 + P_2)_{кр}$</p>	P_2/P_1	ν	P_2/P_1	η
		0	1	0	9,8696
		0,25	0,95	0,25	10,93
		0,5	0,91	0,5	11,92
		0,75	0,89	0,75	12,46
		1	0,87	1	13,04
		2	0,82	2	14,68
<p>В общем случае при</p> $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$					
					

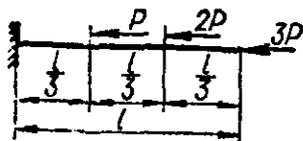
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η				
			a/l	P_2/P_1			
			0	0,1	0,2	0,5	
11	 <p>$P_{кр} = (P_1 + P_2)_{кр}$</p>	<p>При $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$</p> <p>и $n = \frac{a}{b}$</p> 	—				
12		0,773	16,5				
13		0,858	13,41				
14	 <p>$P_{кр} = (P_1 + P_2)_{кр}$</p>	—	0	2,467	2,714	2,961	3,701
			0,1	2,467	2,714	2,960	3,698
			0,2	2,467	2,710	2,953	3,679
			0,3	2,467	2,703	2,936	3,622
			0,4	2,467	2,688	2,904	3,525
			0,5	2,467	2,665	2,856	3,384
			0,6	2,467	2,635	2,793	3,211
			0,7	2,467	2,599	2,715	3,020
			0,8	2,467	2,557	2,636	2,821
			0,9	2,467	2,513	2,551	2,641
			1,0	2,467	2,467	2,467	2,467

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η				
			a/l	P_2/P_1			
				1	2	5	10
			0	4,935	7,402	14,80	27,14
			0,1	4,930	7,377	14,68	26,66
			0,2	4,880	7,207	13,78	23,19
			0,3	4,712	6,769	11,70	16,82
			0,4	4,470	6,074	9,187	11,57
			0,5	4,136	5,268	7,060	8,210
			0,6	3,759	4,497	5,504	6,048
			0,7	3,385	3,830	4,376	4,660
			0,8	3,040	3,280	3,551	3,685
			0,9	2,734	2,832	2,936	2,986
			1,0	2,467	2,467	2,467	2,467

В общем случае

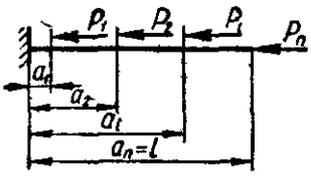
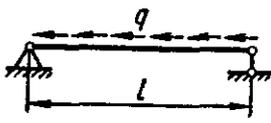
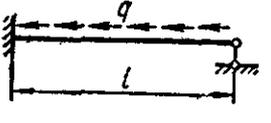
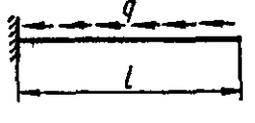
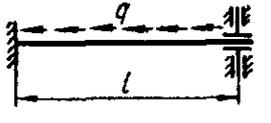


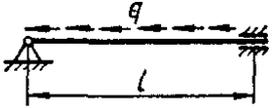
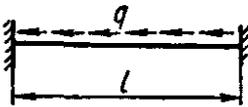
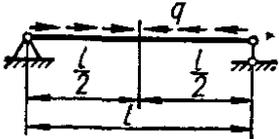
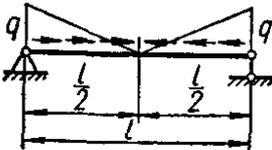
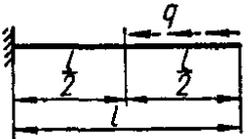
15

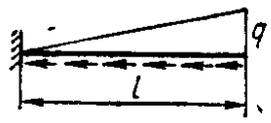
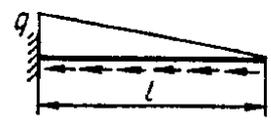
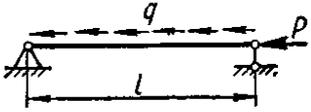


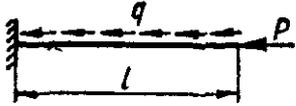
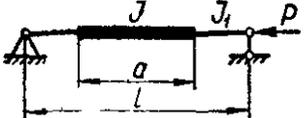
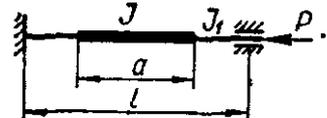
3,952

0,632

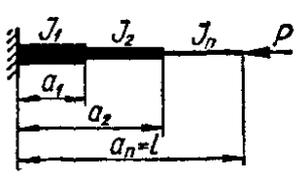
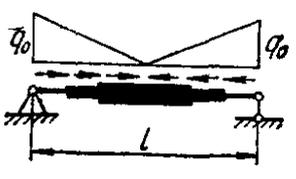
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
16	 $P_{кр} = \left[P_1 \left(\frac{a_1}{l} \right)^2 + P_2 \left(\frac{a_2}{l} \right)^2 + \dots + P_t \times \left(\frac{a_t}{l} \right)^2 + \dots + P_n \right]_{кр}$	2	$\pi^2/4$
17	 $P_{кр} = (ql)_{кр}$	0,725	18,76
18	 $P_{кр} = (ql)_{кр}$	0,434	52,5
19	 $P_{кр} = (ql)_{кр}$	1,122	7,839
20	 $P_{кр} = (ql)_{кр}$	0,723	18,9

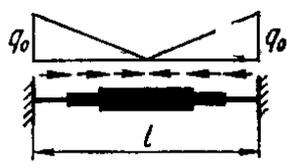
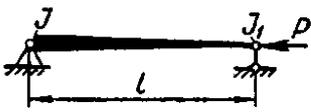
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
21	 $P_{кр} = (ql)_{кр}$	0,577	29,64
22	 $P_{кр} = (ql)_{кр}$	0,366	73,65
23	 $P_{кр} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{кр}$	0,560	31,47
24	 $P_{кр} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{кр}$	0,694	20,49
25	 $P_{кр} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{кр}$	1,486	4,47

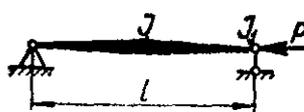
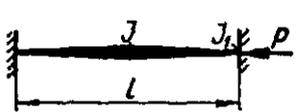
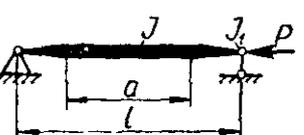
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η																				
26	 $P_{кр} = \left(\frac{ql}{2} \right)_{кр}$	1,388	5,123																				
27	 $P_{кр} = \left(\frac{ql}{2} \right)_{кр}$	0,782	16,126																				
28		—	<p data-bbox="869 1108 1197 1198">Для $n = ql : \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$</p> <table border="1" data-bbox="774 1220 1292 1758"> <thead> <tr> <th data-bbox="869 1265 1037 1332">n</th> <th data-bbox="1037 1265 1292 1332">η</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>9,87</td></tr> <tr><td>0,25</td><td>8,62</td></tr> <tr><td>0,50</td><td>7,40</td></tr> <tr><td>0,75</td><td>6,08</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>4,77</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>—0,66</td></tr> <tr><td>3,0</td><td>—4,94</td></tr> <tr><td>4,0</td><td>—9,87</td></tr> <tr><td>5,0</td><td>—14,80</td></tr> </tbody> </table> <p data-bbox="758 1780 1316 2004">При больших значениях n коэффициент η может оказаться отрицательным и для устойчивости равновесия стержня к нему должна быть приложена растягивающая сила P.</p>	n	η	0	9,87	0,25	8,62	0,50	7,40	0,75	6,08	1,0	4,77	2,0	—0,66	3,0	—4,94	4,0	—9,87	5,0	—14,80
n	η																						
0	9,87																						
0,25	8,62																						
0,50	7,40																						
0,75	6,08																						
1,0	4,77																						
2,0	—0,66																						
3,0	—4,94																						
4,0	—9,87																						
5,0	—14,80																						

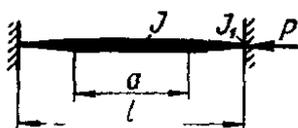
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η					
29		—	При $n = ql : \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$					
			n	η	n	η		
			0	2,47	2,0	0,96		
			0,25	2,28	3,0	0,15		
			0,50	2,08	4,0	—0,69		
			0,75	1,91	5,0	—1,56		
			1,0	1,72				
			См. примечание к схеме 28					
30		—						
			J_1/J	a/l				
			0,2	0,4	0,6	0,8	1	
			0,01	0,153	0,27	0,598	2,26	π^2
			0,1	1,47	2,40	4,50	8,59	π^2
			0,2	2,80	4,22	6,69	9,33	π^2
			0,4	5,09	6,68	8,51	9,67	π^2
			0,6	6,98	8,19	9,24	9,78	π^2
			0,8	8,55	9,18	9,63	9,84	π^2
			1,0	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2
31		—						
			J_1/J	a/l				
			0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
			0,01	0,614	1,08	2,39	8,48	$4\pi^2$
			0,1	5,87	9,48	15,5	17,1	$4\pi^2$
			0,2	11,1	16,3	20,5	21,1	$4\pi^2$
			0,4	20,2	24,9	26,3	27,5	$4\pi^2$
			0,6	27,7	30,6	31,1	32,5	$4\pi^2$
			0,8	34,0	35,3	35,4	36,4	$4\pi^2$
			1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$

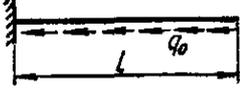
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведенной длины ν	Коэффициент устойчивости η				
32		-	Приближенио $2,467 : \left[\frac{l-a}{l} + \frac{l-a}{l} \frac{J}{J_1} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{J}{J_1} - 1 \right) \sin \frac{\pi a}{l} \right]$				
			$\frac{J_1 - J}{J}$				
		a/l	0	0,1	0,2	0,5	
		0	2,467	2,243	2,056	1,645	
		0,1	2,467	2,285	2,126	1,761	
		0,2	2,467	2,325	2,197	1,881	
		0,3	2,467	2,363	2,262	2,013	
		0,4	2,467	2,396	2,327	2,141	
		0,5	2,467	2,423	2,379	2,256	
		0,6	2,467	2,444	2,420	2,350	
		0,7	2,467	2,457	2,446	2,415	
		0,8	2,467	2,464	2,461	2,453	
		0,9	2,467	2,467	2,466	2,465	
		1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	
			$\frac{J_1 - J}{J}$				
		a/l	1,0	2,0	5,0	10	
		0	1,234	0,8225	0,411	0,2243	
		0,1	1,367	0,944	0,4894	0,2714	
		0,2	1,52	1,093	0,5919	0,3350	
		0,3	1,692	1,277	0,7293	0,4237	
		0,4	1,879	1,499	0,9174	0,5498	
		0,5	2,068	1,756	1,178	0,7462	
		0,6	2,235	2,025	1,531	1,052	
		0,7	2,356	2,256	1,950	1,530	
		0,8	2,440	2,402	2,297	2,106	
		0,9	2,465	2,459	2,446	2,424	
		1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	

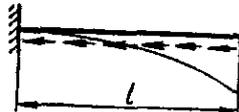
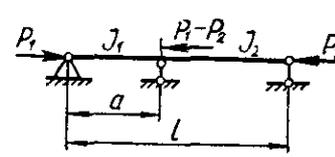
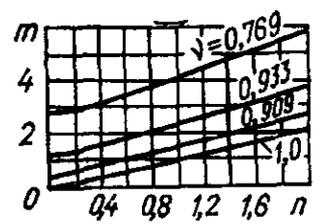
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η																																													
			a/l	$\frac{J_1 - J}{J}$																																												
		20		50	100																																											
			0	0,1175	0,0484	0,0247																																										
			0,1	0,1436	0,0595	0,0301																																										
			0,2	0,1793	0,0749	0,038																																										
			0,3	0,2302	0,0971	0,0494																																										
			0,4	0,3064	0,1309	0,067																																										
			0,5	0,4268	0,1860	0,0958																																										
			0,6	0,633	0,2848	0,1482																																										
			0,7	1,018	0,488	0,2588																																										
			0,8	1,730	0,9991	0,5592																																										
			0,9	2,374	2,189	1,746																																										
			1,0	2,467	2,467	2,467																																										
33		—	$P_{кр} = \eta \frac{EJ_1}{l^2}$ <p>Приблизненно $\eta =$</p> $= 2,467 : \left[\left(1 - \frac{J_2 - J_1 (l - a_1)^2}{J_1 l^2} \right) \times \left(1 - \frac{J_3 - J_2 (l - a_2)^2}{J_2 l^2} \right) \dots \dots \left(1 - \frac{J_n - J_{n-1} (l - a_{n-1})^2}{J_{n-1} l^2} \right) \right]$																																													
34	 <p>$P_{кр} = \left(\frac{q_0 l}{4} \right)_{кр}$</p>	—	<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">J_1 / l</th> <th colspan="5">Число участков с различными моментами инерции</th> </tr> <tr> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,2</td> <td>5,2</td> <td>6,32</td> <td>6,48</td> <td>7,32</td> <td>7,4</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>9,88</td> <td>10,9</td> <td>11,1</td> <td>11,2</td> <td>11,2</td> </tr> <tr> <td>0,6</td> <td>14,0</td> <td>14,6</td> <td>14,7</td> <td>14,76</td> <td>14,8</td> </tr> <tr> <td>0,8</td> <td>17,4</td> <td>17,8</td> <td>17,8</td> <td>17,9</td> <td>18,0</td> </tr> <tr> <td>1,0</td> <td>20,5</td> <td>20,5</td> <td>20,5</td> <td>20,5</td> <td>20,5</td> </tr> </tbody> </table> <p>* **</p>					J_1 / l	Число участков с различными моментами инерции					2	3	4	5	10	0,2	5,2	6,32	6,48	7,32	7,4	0,4	9,88	10,9	11,1	11,2	11,2	0,6	14,0	14,6	14,7	14,76	14,8	0,8	17,4	17,8	17,8	17,9	18,0	1,0	20,5	20,5	20,5	20,5	20,5
J_1 / l	Число участков с различными моментами инерции																																															
	2	3	4	5	10																																											
0,2	5,2	6,32	6,48	7,32	7,4																																											
0,4	9,88	10,9	11,1	11,2	11,2																																											
0,6	14,0	14,6	14,7	14,76	14,8																																											
0,8	17,4	17,8	17,8	17,9	18,0																																											
1,0	20,5	20,5	20,5	20,5	20,5																																											

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η				
			J_1/J	Число участков с различными моментами инерции			
			2	3	4		
35	 $P_{кр} = \left(\frac{q_0 l}{4} \right)_{кр}$	—	0,2	18,1	21,8	22,8	
			0,4	31,2	34,2	34,3	
			0,6	41,0	42,4	42,4	
			0,8	49,4	49,5	49,5	
			1,0	54,8	54,8	54,8	
			*				
			**				
36		—	Момент инерции сечения изменяется вдоль оси по закону				
			$J(z) = J_0 (a + bz)^n$				
			J_1/J^*	n			
				1	2	3	4
			0	3,67	0,25	—	—
			0,1	4,67	3,59	3,24	3,12
			0,2	5,41	4,73	4,52	4,41
			0,4	6,78	6,39	6,28	6,24
			0,6	7,78	7,70	7,64	7,64
			0,8	8,85	8,83	8,83	8,83
			1,0	π^2	π^2	π^2	π^2
$n = 1$ — сплошной стержень прямоугольного поперечного сечения постоянной высоты; ширина сечения изменяется по линейному закону $n = 2$ — пирамидальный стержень, составленный из четырех угловых поясов, соединенных решеткой (или обшитых тонкими листами) $n = 3$ — стержень прямоугольного сечения постоянной ширины, когда высота сечения изменяется по линейному закону $n = 4$ — сплошной пирамидальный (конический) стержень							

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η																																																														
37		—	<p>Момент инерции сечения изменяется вдоль оси по закону</p> $J(z) = J_0 (a + bz)^n$ <table border="1" data-bbox="917 526 1476 996"> <thead> <tr> <th rowspan="2">J_1/J_0</th> <th colspan="6">n</th> </tr> <tr> <th>0,5</th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>—</td> <td>5,78</td> <td>—</td> <td>1,0</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>7,86</td> <td>6,48</td> <td>5,78</td> <td>5,4</td> <td>5,01</td> <td>4,81</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>7,97</td> <td>7,01</td> <td>6,58</td> <td>6,37</td> <td>6,14</td> <td>6,02</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>8,31</td> <td>7,87</td> <td>7,69</td> <td>7,61</td> <td>7,52</td> <td>7,48</td> </tr> <tr> <td>0,6</td> <td>8,76</td> <td>8,61</td> <td>8,54</td> <td>8,51</td> <td>8,5</td> <td>8,47</td> </tr> <tr> <td>0,8</td> <td>9,3</td> <td>9,27</td> <td>9,25</td> <td>9,24</td> <td>9,23</td> <td>9,23</td> </tr> <tr> <td>1,0</td> <td>π^2</td> <td>π^2</td> <td>π^2</td> <td>π^2</td> <td>π^2</td> <td>π^2</td> </tr> </tbody> </table>	J_1/J_0	n						0,5	1	1,5	2	3	4	0	—	5,78	—	1,0	—	—	0,1	7,86	6,48	5,78	5,4	5,01	4,81	0,2	7,97	7,01	6,58	6,37	6,14	6,02	0,4	8,31	7,87	7,69	7,61	7,52	7,48	0,6	8,76	8,61	8,54	8,51	8,5	8,47	0,8	9,3	9,27	9,25	9,24	9,23	9,23	1,0	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2
J_1/J_0	n																																																																
	0,5	1	1,5	2	3	4																																																											
0	—	5,78	—	1,0	—	—																																																											
0,1	7,86	6,48	5,78	5,4	5,01	4,81																																																											
0,2	7,97	7,01	6,58	6,37	6,14	6,02																																																											
0,4	8,31	7,87	7,69	7,61	7,52	7,48																																																											
0,6	8,76	8,61	8,54	8,51	8,5	8,47																																																											
0,8	9,3	9,27	9,25	9,24	9,23	9,23																																																											
1,0	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2																																																											
38		—	<p>Момент инерции сечения изменяется вдоль оси по закону</p> $J(z) = J_0 (a + bz)^n$ <table border="1" data-bbox="917 1187 1476 1590"> <thead> <tr> <th rowspan="2">J_1/J_0</th> <th colspan="4">n</th> </tr> <tr> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,1</td> <td>—</td> <td>14,39</td> <td>13,7</td> <td>13,3</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>20,35</td> <td>18,93</td> <td>18,49</td> <td>18,23</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>26,16</td> <td>25,54</td> <td>25,34</td> <td>25,23</td> </tr> <tr> <td>0,6</td> <td>31,03</td> <td>30,79</td> <td>30,71</td> <td>30,68</td> </tr> <tr> <td>0,8</td> <td>35,42</td> <td>35,35</td> <td>35,33</td> <td>35,32</td> </tr> <tr> <td>1,0</td> <td>$4\pi^2$</td> <td>$4\pi^2$</td> <td>$4\pi^2$</td> <td>$4\pi^2$</td> </tr> </tbody> </table>	J_1/J_0	n				1	2	3	4	0,1	—	14,39	13,7	13,3	0,2	20,35	18,93	18,49	18,23	0,4	26,16	25,54	25,34	25,23	0,6	31,03	30,79	30,71	30,68	0,8	35,42	35,35	35,33	35,32	1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$																							
J_1/J_0	n																																																																
	1	2	3	4																																																													
0,1	—	14,39	13,7	13,3																																																													
0,2	20,35	18,93	18,49	18,23																																																													
0,4	26,16	25,54	25,34	25,23																																																													
0,6	31,03	30,79	30,71	30,68																																																													
0,8	35,42	35,35	35,33	35,32																																																													
1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$																																																													
39		—	<p>Момент инерции сечения крайних участков изменяется вдоль оси по закону</p> $J(z) = J_0 (a + bz)^n$ <table border="1" data-bbox="917 1803 1476 2004"> <thead> <tr> <th rowspan="2">J_1/J_0</th> <th colspan="5">a/l</th> <th rowspan="2">n</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>5,78</td> <td>7,04</td> <td>8,35</td> <td>9,36</td> <td>9,8</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1,0</td> <td>1,56</td> <td>2,78</td> <td>6,25</td> <td>9,59</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	J_1/J_0	a/l					n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,8	1	1,0	1,56	2,78	6,25	9,59	2	2																																				
J_1/J_0	a/l					n																																																											
	0	0,2	0,4	0,6	0,8																																																												
0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,8	1																																																											
1,0	1,56	2,78	6,25	9,59	2	2																																																											

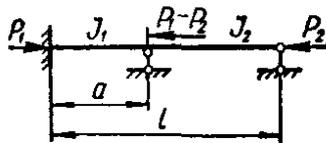
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η									
			J_1/J_0	a/l					n			
				0	0,2	0,4	0,6	0,8				
			0,01	5,87	7,11	8,4	9,4	9,8	1			
				3,45	4,73	6,58	8,61	9,71	2			
				2,55	3,65	5,42	7,99	9,63	3			
				2,15	3,13	4,84	7,53	9,56	4			
			0,1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1			
				5,4	6,67	8,08	9,25	9,79	2			
				5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	3			
				4,81	6,11	7,68	9,1	9,77	4			
			0,2	7,01	7,99	8,9	9,73	9,82	1			
				6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	2			
				6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	3			
				6,02	7,2	8,42	9,38	9,8	4			
			0,4	7,87	8,59	9,19	9,7	9,85	1			
				7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	2			
				7,52	8,38	9,1	9,62	9,84	3			
				7,48	8,33	9,1	9,62	9,84	4			
			0,6	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	1			
				8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	2			
				8,5	9,02	9,46	9,74	9,85	3			
				8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	4			
			0,8	9,27	9,53	9,69	9,82	9,86	1			
				9,24	9,5	9,69	9,82	9,86	2			
				9,23	9,5	9,69	9,81	9,86	3			
				9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	4			
			40		—	Момент инерции сечения крайних участков изменяется вдоль оси по закону $J(z) = J_0(a + bz)^n$						
						0,2	a/l					n
							0	0,2	0,4	0,6	0,8	
						0,2	20,36	22,36	23,42	25,55	29,0	1
							18,94	22,25	22,91	24,29	27,67	2
							18,48	20,88	22,64	23,96	27,24	3
							18,23	20,71	22,49	23,8	27,03	4

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η						
			a/l					n	
			J_1/J^*	0	0,2	0,4	0,6		0,8
			0,4	26,16 25,54 25,32 25,23	27,8 27,35 27,2 27,13	28,96 28,52 28,4 28,33	30,2 29,69 29,52 29,46	33,08 32,59 32,44 32,35	1 2 3 4
			0,6	31,04 30,79 30,72 30,68	32,2 32,02 31,96 31,94	32,92 32,77 32,72 32,69	33,8 33,63 33,56 33,54	35,8 35,64 35,6 35,56	1 2 3 4
			0,8	35,4 35,35 35,33 35,32	36,0 35,97 35,96 35,96	36,36 36,34 36,32 36,32	36,84 36,8 36,8 36,78	37,84 37,81 37,8 37,8	1 2 3 4
41	 $P_{кр} = (q_0 l)_{кр}$	—	Момент инерции сечения изменяется вдоль оси по закону $J(z) = J \left(\frac{l-z}{l} \right)^n$						
			n	0	1	2			
			η	7,839	5,78	3,67			
42	$q = q_0 \frac{l-z}{2}$  $P_{кр} = \left(\frac{q_0 l}{2} \right)_{кр}$	—	Момент инерции сечения изменяется вдоль оси по закону $J(z) = J \left(\frac{l-z}{l} \right)^n$						
			n	0	1	2	3		
			η	16,1	13	9,87	6,59		

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η																																		
43	$q = q_0 \left(\frac{l-z}{l} \right)^m$  $P_{кр} = \left(\frac{q_0 l}{m+1} \right)_{кр}$	—	<p>Момент инерции сечения изменяется вдоль оси по закону</p> $J(z) = J \left(\frac{l-z}{l} \right)^n$ <table border="1" data-bbox="686 582 1236 1108"> <thead> <tr> <th rowspan="2">n</th> <th colspan="4">m</th> </tr> <tr> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>27,3</td> <td>41,3</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>23,1</td> <td>36,1</td> <td>52,1</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>18,9</td> <td>30,9</td> <td>45,8</td> <td>63,6</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>14,7</td> <td>25,7</td> <td>39,5</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>10,2</td> <td>20,2</td> <td>33,0</td> <td>—</td> </tr> </tbody> </table>	n	m				2	3	4	5	0	27,3	41,3	—	—	1	23,1	36,1	52,1	—	2	18,9	30,9	45,8	63,6	3	14,7	25,7	39,5	—	4	10,2	20,2	33,0	—
n	m																																				
	2	3	4	5																																	
0	27,3	41,3	—	—																																	
1	23,1	36,1	52,1	—																																	
2	18,9	30,9	45,8	63,6																																	
3	14,7	25,7	39,5	—																																	
4	10,2	20,2	33,0	—																																	
44			<p>При $m = \frac{J_2 a}{J_1 (l-a)}$ и $n = \frac{P_2 (l-a)}{P_1 a}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu a)^2}$  <p>При $P_1 = P_2 = P$ и $J_1 = J_2 = J$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{(\nu l)^2} = \eta \frac{E J}{l^2}$																																		

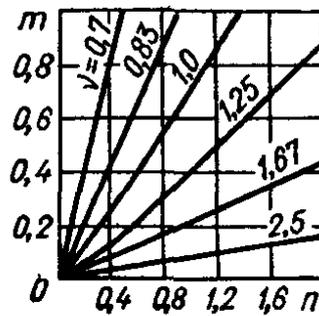
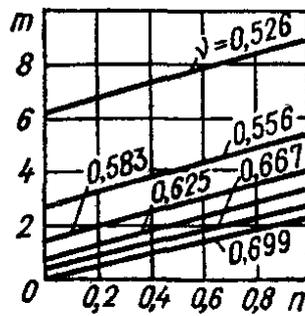
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν		Коэффициент устойчивости η	
		a/l	ν	a/l	η
		0	0,699	0	20,19
		0,1	0,652	0,1	23,23
		0,2	0,604	0,2	27,06
		0,3	0,558	0,3	31,75
		0,4	0,518	0,4	36,8
		0,5	0,500	0,5	39,48
		0,6	0,518	0,6	36,8
		0,7	0,558	0,7	31,75
		0,8	0,604	0,8	27,04
		0,9	0,652	0,9	23,23
		1,0	0,699	1,0	20,19

45



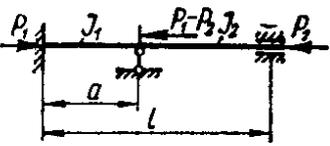
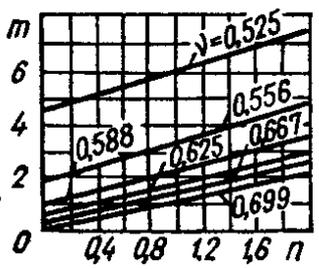
При $m = \frac{J_2 a}{J_1 (l - a)}$ и $n = \frac{P_2 (l - a)}{P_1 a}$

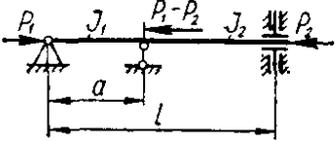
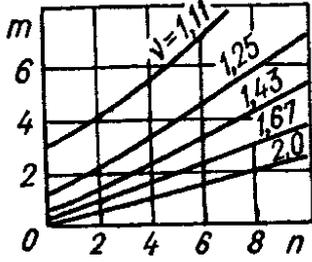
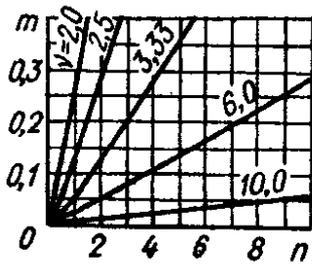
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$$

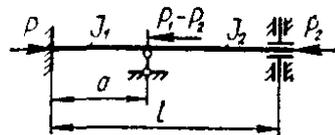
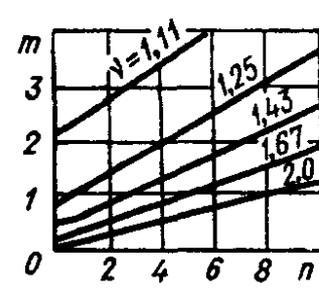
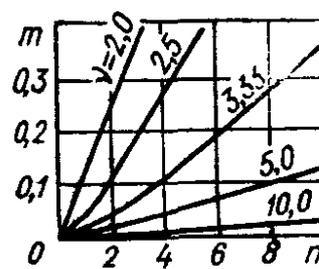


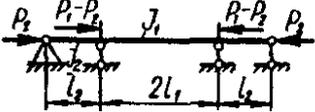
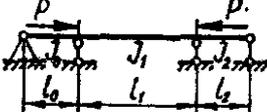
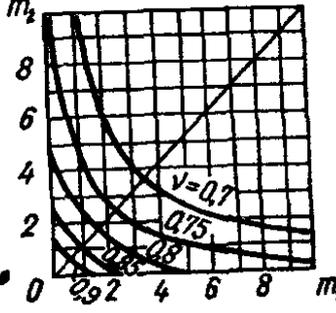
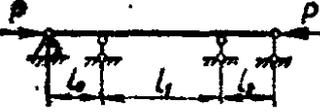
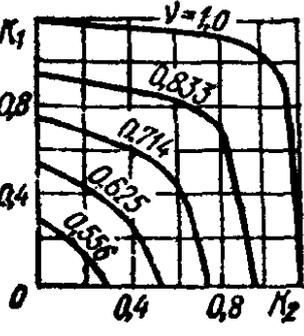
При $P_1 = P_2 = P$ и $J_1 = J_2 = J$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν		Коэффициент устойчивости η	
		a/l	ν	a/l	η
		0	0,699	0	20,19
		0,1	0,646	0,1	23,63
		0,2	0,593	0,2	28,09
		0,3	0,539	0,3	33,96
		0,4	0,487	0,4	41,68
		0,5	0,439	0,5	51,12
		0,6	0,41	0,6	58,84
		0,7	0,412	0,7	58,92
		0,8	0,436	0,8	51,97
		0,9	0,467	0,9	45,27
		1,0	0,500	1,0	39,48
46		При $m = \frac{J_2 a}{J_1 (l - a)}$ и $n = \frac{P_2 (l - a)}{P_1 a}$ $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\nu a)^2}$			
					
		При $P_1 = P_2 = P$ и $J_1 = J_2 = J$ $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$			
		a/l	ν	a/l	η
		0	0,5	0	39,48
		0,1	0,463	0,1	46,13
		0,2	0,426	0,2	54,45
		0,3	0,391	0,3	64,56
		0,4	0,362	0,4	75,22
		0,5	0,35	0,5	80,76
		0,6	0,362	0,6	75,22
0,7	0,391	0,7	64,56		
0,8	0,426	0,8	54,45		
0,9	0,463	0,9	46,13		
1,0	0,5	1,0	39,48		

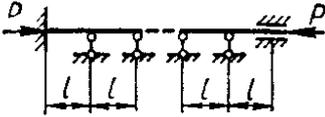
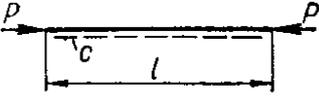
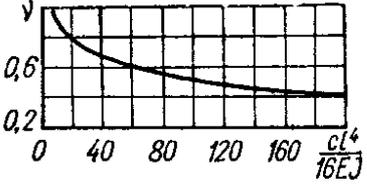
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η																																																
47		<p>При $m = \frac{J_2 a}{J_1 (l - a)}$ и $n = \frac{P_2 (l - a)}{P_1 a}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$ <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;">   </div> <p>При $P_1 = P_2 = P$ и $J_1 = J_2 = J$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$																																																	
		<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>a/l</th> <th>ν</th> <th>a/l</th> <th>η</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1,0</td><td>0</td><td>9,87</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,933</td><td>0,1</td><td>11,83</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,868</td><td>0,2</td><td>13,11</td></tr> <tr><td>0,3</td><td>0,804</td><td>0,3</td><td>15,26</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,746</td><td>0,4</td><td>17,72</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>0,699</td><td>0,5</td><td>20,19</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,672</td><td>0,6</td><td>21,88</td></tr> <tr><td>0,7</td><td>0,668</td><td>0,7</td><td>22,14</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,679</td><td>0,8</td><td>21,4</td></tr> <tr><td>0,9</td><td>0,693</td><td>0,9</td><td>20,55</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>0,699</td><td>1,0</td><td>20,19</td></tr> </tbody> </table>	a/l	ν	a/l	η	0	1,0	0	9,87	0,1	0,933	0,1	11,83	0,2	0,868	0,2	13,11	0,3	0,804	0,3	15,26	0,4	0,746	0,4	17,72	0,5	0,699	0,5	20,19	0,6	0,672	0,6	21,88	0,7	0,668	0,7	22,14	0,8	0,679	0,8	21,4	0,9	0,693	0,9	20,55	1,0	0,699	1,0	20,19	
a/l	ν	a/l	η																																																
0	1,0	0	9,87																																																
0,1	0,933	0,1	11,83																																																
0,2	0,868	0,2	13,11																																																
0,3	0,804	0,3	15,26																																																
0,4	0,746	0,4	17,72																																																
0,5	0,699	0,5	20,19																																																
0,6	0,672	0,6	21,88																																																
0,7	0,668	0,7	22,14																																																
0,8	0,679	0,8	21,4																																																
0,9	0,693	0,9	20,55																																																
1,0	0,699	1,0	20,19																																																

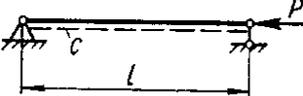
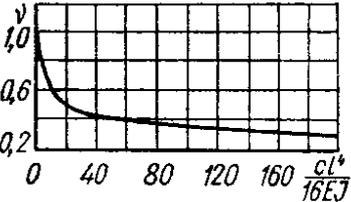
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η																																																
48		<p>При $m = \frac{J_2 a}{J_1 (l - a)}$ и $n = \frac{P_2 (l - a)}{P_1 a}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu a)^2}$ <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;">   </div> <p>При $P_1 = P_2 = P$ и $J_1 = J_2 = J$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{(\nu l)^2} = \eta \frac{E J}{l^2}$																																																	
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/l</th> <th>ν</th> <th>a/l</th> <th>η</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1,0</td><td>0</td><td>9,87</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,925</td><td>0,1</td><td>11,53</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,85</td><td>0,2</td><td>13,65</td></tr> <tr><td>0,3</td><td>0,776</td><td>0,3</td><td>16,37</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,704</td><td>0,4</td><td>19,9</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>0,636</td><td>0,5</td><td>24,42</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,575</td><td>0,6</td><td>29,82</td></tr> <tr><td>0,7</td><td>0,53</td><td>0,7</td><td>35,1</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,507</td><td>0,8</td><td>38,41</td></tr> <tr><td>0,9</td><td>0,501</td><td>0,9</td><td>39,4</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>0,5</td><td>1,0</td><td>39,48</td></tr> </tbody> </table>	a/l	ν	a/l	η	0	1,0	0	9,87	0,1	0,925	0,1	11,53	0,2	0,85	0,2	13,65	0,3	0,776	0,3	16,37	0,4	0,704	0,4	19,9	0,5	0,636	0,5	24,42	0,6	0,575	0,6	29,82	0,7	0,53	0,7	35,1	0,8	0,507	0,8	38,41	0,9	0,501	0,9	39,4	1,0	0,5	1,0	39,48	
a/l	ν	a/l	η																																																
0	1,0	0	9,87																																																
0,1	0,925	0,1	11,53																																																
0,2	0,85	0,2	13,65																																																
0,3	0,776	0,3	16,37																																																
0,4	0,704	0,4	19,9																																																
0,5	0,636	0,5	24,42																																																
0,6	0,575	0,6	29,82																																																
0,7	0,53	0,7	35,1																																																
0,8	0,507	0,8	38,41																																																
0,9	0,501	0,9	39,4																																																
1,0	0,5	1,0	39,48																																																

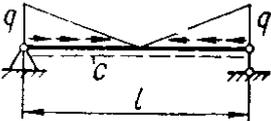
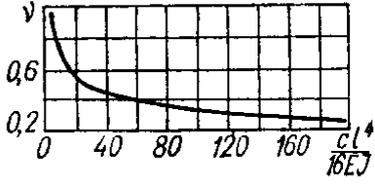
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
49		<p>При $m = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}$ и $n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l_1)^2}$ <p>Значения ν находят из графиков, построенных для схемы 47</p>	—
50		<p>При $m_1 = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}$ и $m_2 = \frac{3J_2 l_1}{J_1 l_2}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l_1)^2}$ 	—
51		<p>При $k_1 = l_0/l_1$ и $k_2 = l_2/l_1$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l_1)^2}$ 	—

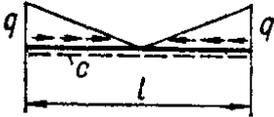
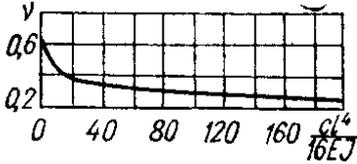
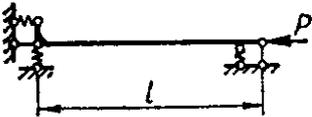
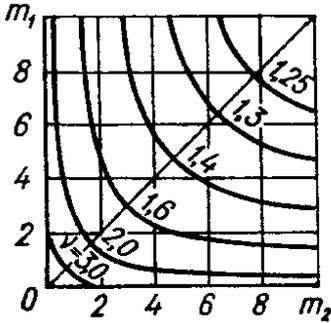
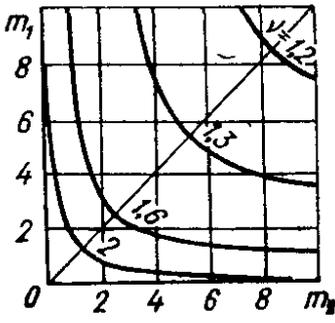
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
52		<p>При $m = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l_0)^2}$	—
53		<p>При $m = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}$</p> <p>и $n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l_1)^2}$	—
		<p>Значения ν находятся из графиков, построенных для схемы 48</p>	
54		<p>При $m = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}$</p> $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l_0)^2}$	—

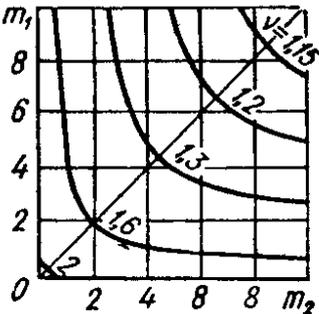
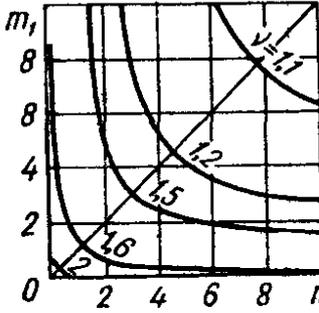
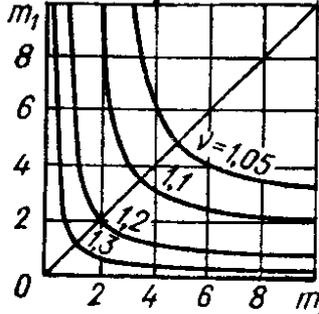
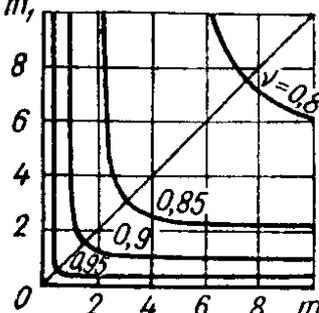
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η		
55		$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l_1)^2}$	—		
56		1	9,8696		
57		n — число пролетов			
		n	ν	n	η
		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	0,699 0,879 0,939 0,964 0,977 0,983 0,988 0,99 0,992 0,994	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	20,2 12,77 11,19 10,62 10,34 10,21 10,1 10,07 10,029 9,9895

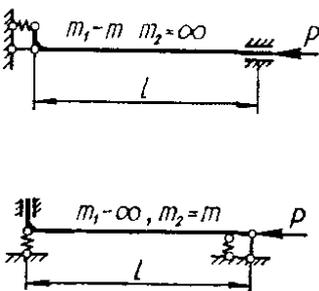
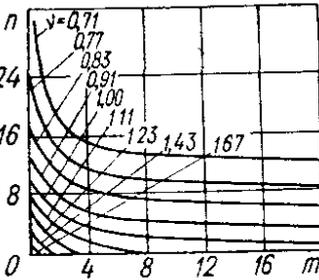
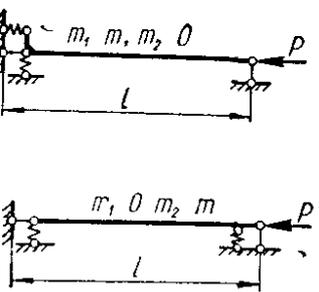
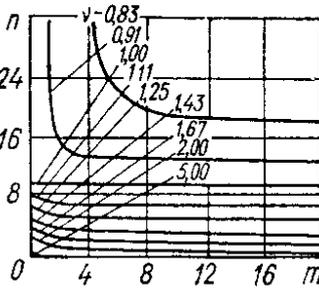
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η		
			n	η	
n — число пролетов					
		n	ν	n	η
58		1	0,5	1	39,48
		2	0,699	2	20,2
		3	0,814	3	14,9
		4	8,879	4	12,77
		5	0,917	5	11,74
		6	0,939	6	11,19
		7	0,954	7	10,84
		8	0,964	8	10,62
		9	0,971	9	10,47
		10	0,977	10	10,34
59			—		

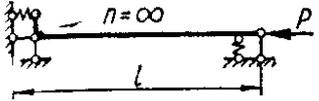
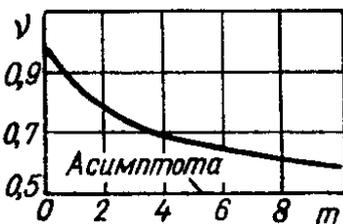
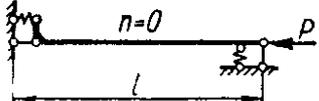
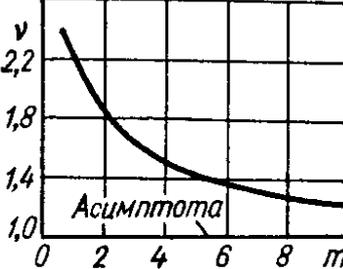
60			—		

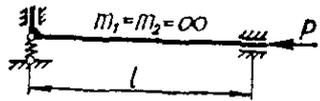
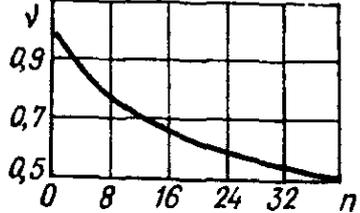
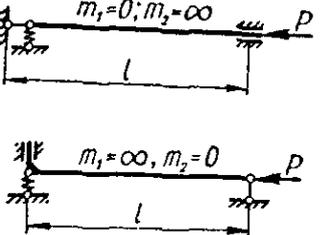
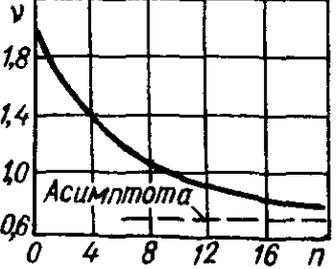
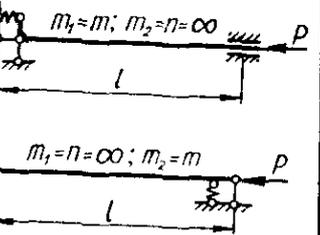
61			—		

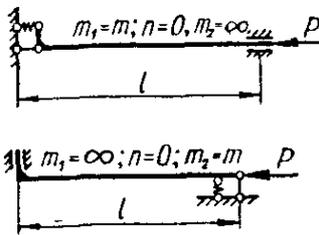
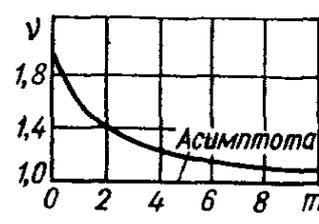
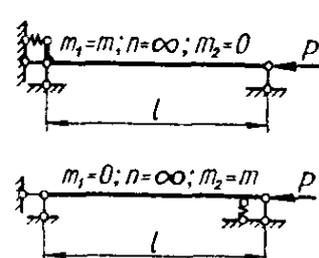
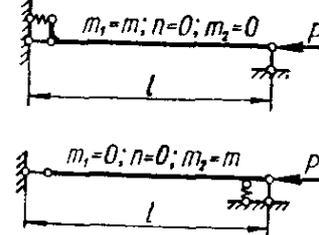
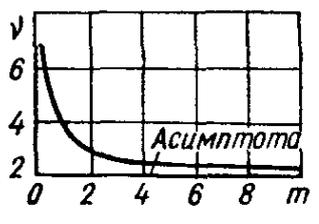
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
62		 <p style="text-align: center;">*****</p>	—
63		<p>При $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$</p> <p>$m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$</p> <p>$n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$</p> <p style="text-align: center;">***, ****</p> <p>$0,5 \leq \nu \leq \infty$</p> <p>Некоторые конкретные данные при:</p> <p style="text-align: center;">$n = 0$</p>  <p style="text-align: center;">$n = 0,5$</p> 	$0 \leq \eta \leq 39,48$

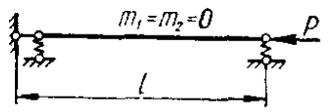
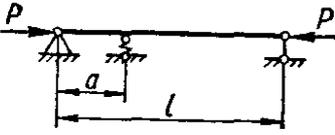
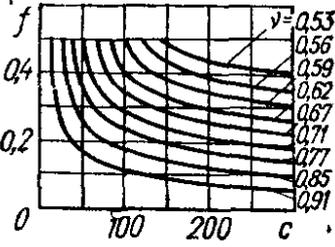
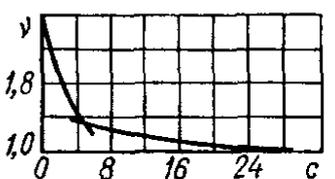
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
		<p>$n = 1$</p> 	
		<p>$n = 2$</p> 	
		<p>$n = 4$</p> 	
		<p>$n = 10$</p> 	

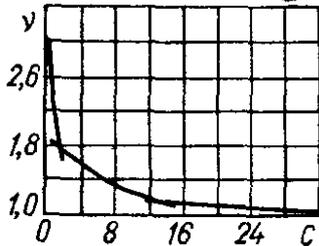
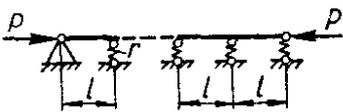
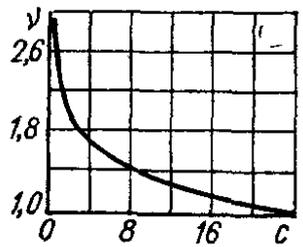
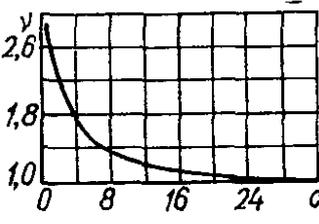
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
64		<p>$0,5 \leq \nu \leq 2$</p> <p>Некоторые конкретные данные</p>  $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p>$2,4424 \leq \eta \leq 39,48$</p>
65		<p>$0,7 \leq \nu \leq \infty$</p> <p>Некоторые конкретные данные</p>  $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}; m_2 = \frac{s_2 l}{EJ};$ $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p>$0 < \eta \leq 20,14$</p>

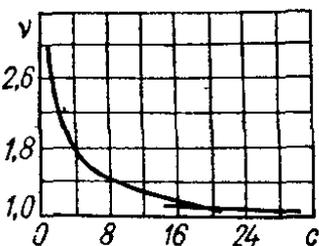
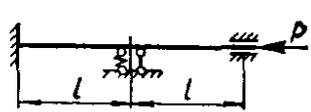
Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
66	 $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p>$0,5 \leq \nu < 1$</p> <p>Конкретные значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 50</p> <p>Если $m_1 = m_2 = m = \frac{sl}{EJ}$, то</p> 	<p>$9,8696 \leq \eta \leq 39,48$</p>
67	 $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p>$1 \leq \nu < \infty$</p> <p>Конкретные значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 63 (случай $n = 0$)</p> <p>Если $m_1 = m_2 = m = \frac{sl}{EJ}$, то</p> 	<p>$0 < \eta \leq 9,8696$</p>

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
68	 $m_1 = \frac{S_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{S_2 l}{EJ}$	$0,5 \leq \nu \leq 1$ Некоторые конкретные данные  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ ***, ****	$9,8696 \leq \eta \leq 39,$
69	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$	$0,7 \leq \nu \leq 2$ Некоторые конкретные данные  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ ***, ****	$2,4424 \leq \eta \leq 20,$
70	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ ****	$0,5 \leq \nu \leq 0,7$ Конкретные значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 54 $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ ***	$20,14 \leq \eta \leq 39,48$

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
71	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	$1 \leq \nu \leq 2$ <p>Некоторые конкретные данные</p> 	$2,4424 \leq \eta \leq 9,8696$
72	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}; m_2 = \frac{s_2 l}{EJ};$ $n = \frac{r_1 r_2 l^2}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	$0,7 \leq \nu \leq 1$ <p>Конкретные значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 52 с учетом, что</p>	$9,8696 \leq \eta \leq 20,14$
73	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ $n = \frac{r_1 r_2 l^2}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	$2 \leq \nu < \infty$ <p>Некоторые конкретные данные</p> 	$0 \leq \eta \leq 2,4424$

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
74	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ <p>****</p>	<p>1</p> <p>Необходима также проверка устойчивости по формуле</p> $P_{кр} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} l$ <p>***</p> <p>За расчетное принимают наименьшее значение $P_{кр}$</p>	9,8696
75		 $\bar{f} = \frac{a}{l}; \quad c = \frac{rl^3}{EJ}$ <p>(r — коэффициент жесткости упруго-перемещающейся опоры)</p>	—
76	 <p>r — коэффициент жесткости упруго-перемещающейся опоры</p>	<p>При числе пролетов $n = 2$ значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 69</p> <p>При $n = 3$</p> 	—

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
		<p>При $n = 4$</p>  <p style="text-align: center;">$c = \frac{rl^3}{EJ}$</p>	
77	 <p>r — коэффициент жесткости упруго-перемещающейся опоры</p>	<p>При числе пролетов $n = 2$</p>  <p style="text-align: center;">$l = 3$</p> 	—

Номер схемы	Схема стержня и его нагружения	Коэффициент приведения длины ν	Коэффициент устойчивости η
		<p style="text-align: center;">$n = 4$</p>  <p style="text-align: center;">$c = \frac{rl^3}{EJ}$</p>	
78		<p>Значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 52.</p> <p>При этом $m = \frac{sl}{2EJ}$ (s — коэффициент жесткости упруго-поворачивающейся опоры)</p>	—
79		<p>Значения ν могут быть взяты из графика, построенного для схемы 54.</p> <p>При этом $m = \frac{sl}{2EJ}$ (s — коэффициент жесткости упруго-поворачивающейся опоры)</p>	—

* J и J_1 — наибольший и наименьший моменты инерции поперечного сечения соответственно.

** Предполагается, что имеется несколько участков одинаковой длины, причем разности между моментами инерции соседних участков одинаковы.

*** r_1 и r_2 — коэффициенты жесткости левой и правой упруго-перемещающихся опор.

**** s_1 и s_2 — коэффициенты жесткости левой и правой упруго-поворачивающихся опор.

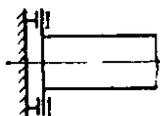
***** c — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), равный отношению реакции основания к его осадке.

Таблица 46. Критические нагрузки для полосы и некоторых двутавровых балок*

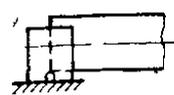
Типы опор:



В горизонтальной и вертикальной плоскостях — заделка



В горизонтальной плоскости — шарнир, в вертикальной — заделка



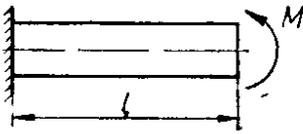
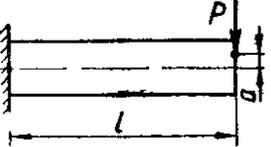
В горизонтальной плоскости — заделка, в вертикальной — шарнир



В горизонтальной плоскости — шарнир, в вертикальной — направляющие



В горизонтальной и вертикальной плоскостях — шарниры

Схема	Критическая нагрузка										
	$M_{кр} = \frac{\pi S}{2l}$ <p>При потере устойчивости плоскость действия пары сохраняет неизменную ориентацию в системе подвижных осей, жестко связанных с перемещающимся торцовым сечением</p>										
	$P_{кр} = \frac{4,013}{l^2} \left(S - \frac{a}{l} EJ \right)$ <p>при $a = 0$ $P_{кр} = \frac{4,013S}{l^2}$</p> <p>Если высота консольной полосы изменяется по закону $h = h_0 \sqrt[n]{1 - \frac{z}{l}}$, где h_0 — высота полосы у основания, z — текущая координата вдоль полосы, то</p> <table border="1" data-bbox="555 1742 1347 1890"> <tr> <td>n</td> <td>1</td> <td>1,333</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>2,4</td> <td>2,81</td> <td>3,21</td> <td>3,61</td> </tr> </table> $P_{кр} = \frac{mS}{l^2}$	n	1	1,333	2	4	m	2,4	2,81	3,21	3,61
n	1	1,333	2	4							
m	2,4	2,81	3,21	3,61							

* $S = \sqrt{EJ GJ_K}$, где EJ — наименьшая жесткость при изгибе; GJ_K — жесткость при кручении.

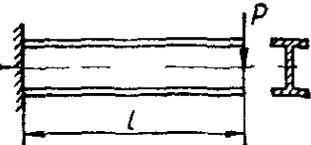
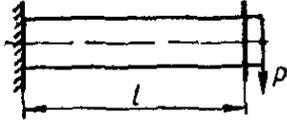
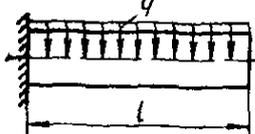
Схема	Критическая нагрузка																								
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <p>Коэффициент k берется из таблицы</p> <p>При этом $\kappa = \frac{l^2}{h^2} \frac{2GJ_{\kappa}}{D}$, где D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости</p> <table border="1" data-bbox="758 627 1412 952"> <tr> <td>κ</td> <td>0,1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>44,3</td> <td>15,7</td> <td>12,2</td> <td>10,7</td> <td>9,76</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>6</td> <td>10</td> <td>24</td> <td>40</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>8,69</td> <td>7,58</td> <td>6,19</td> <td>5,64</td> <td></td> </tr> </table> <p>При $\kappa > 40$ $k = \frac{4,013}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)^2}$</p>	κ	0,1	1	2	3	4	k	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	κ	6	10	24	40		k	8,69	7,58	6,19	5,64	
κ	0,1	1	2	3	4																				
k	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76																				
κ	6	10	24	40																					
k	8,69	7,58	6,19	5,64																					
	$P_{кр} = \frac{5,56S}{l^2}$																								
	$(ql)_{кр} = \frac{12,85S}{l^2}$ <p>Если высота консольной полосы изменяется по закону $h = h_0 \sqrt[3]{1 - \frac{z}{l}}$, где h_0 — высота полосы у основания, z — текущая координата вдоль полосы, то $(ql)_{кр} = \frac{mS}{l^2}$</p> <table border="1" data-bbox="805 1803 1364 1937"> <tr> <td>n</td> <td>1</td> <td>1,333</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>9,6</td> <td>10,4</td> <td>11,2</td> <td>12,8</td> </tr> </table>	n	1	1,333	2	4	m	9,6	10,4	11,2	12,8														
n	1	1,333	2	4																					
m	9,6	10,4	11,2	12,8																					

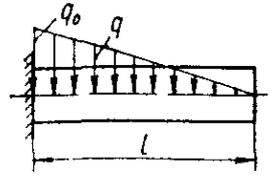
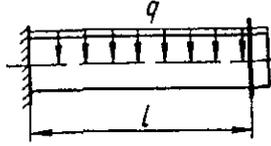
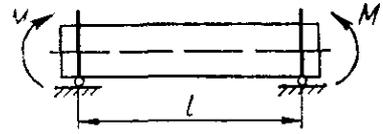
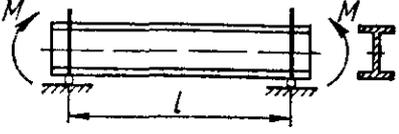
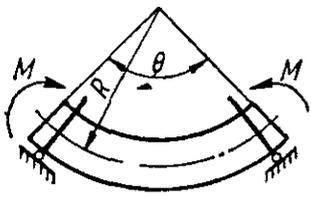
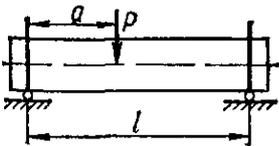
Схема	Критическая нагрузка																								
	$\left(\frac{q_0 l}{2}\right)_{\text{кр}} = \frac{26,5S}{l^2}$ <p>q_0 — в корне</p>																								
	$(ql)_{\text{кр}} = \frac{15,95S}{l^2}$																								
	$M_{\text{кр}} = \frac{\pi S}{l}$																								
	$M_{\text{кр}} = \frac{\pi S}{l} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{Dh^2}{2GJ_{\text{к}}}}$ <p>где h — высота балки; D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости</p>																								
	$M_{\text{кр}} = \frac{EJ + GJ_{\text{к}}}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{EJ + GJ_{\text{к}}}{2R}\right)^2 + \frac{S^2}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\theta^2} - 1\right)}$ <p>Нижний знак определяет критическое значение момента, направленного противоположно показанному на схеме</p>																								
	$P_{\text{кр}} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="582 1624 1236 1960"> <tbody> <tr> <td>a/l</td> <td>0,05</td> <td>0,1</td> <td>0,15</td> <td>0,2</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>111,6</td> <td>56,01</td> <td>37,88</td> <td>29,11</td> <td>24,1</td> </tr> <tr> <td>a/l</td> <td>0,3</td> <td>0,35</td> <td>0,4</td> <td>0,45</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>21,01</td> <td>19,04</td> <td>17,82</td> <td>17,15</td> <td>16,94</td> </tr> </tbody> </table>	a/l	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	k	111,6	56,01	37,88	29,11	24,1	a/l	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	k	21,01	19,04	17,82	17,15	16,94
a/l	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25																				
k	111,6	56,01	37,88	29,11	24,1																				
a/l	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5																				
k	21,01	19,04	17,82	17,15	16,94																				

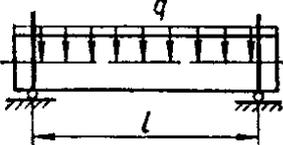
Схема	Критическая нагрузка																				
	$P_{кр} = \frac{16,93}{l^2} \left(S - 3,48 \frac{a}{l} EJ \right)$																				
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <p>При $\kappa = \frac{l^2}{h^2} \frac{2GJ_{\kappa}}{D}$, где h — высота балки, D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости, значения k будут</p> <table border="1" data-bbox="818 813 1390 1144"> <tbody> <tr> <td>κ</td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>86,4</td> <td>31,9</td> <td>25,6</td> <td>21,8</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>160</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>19,6</td> <td>18,3</td> <td>17,5</td> <td>17,2</td> </tr> </tbody> </table>	κ	0,4	4	8	16	k	86,4	31,9	25,6	21,8	κ	32	64	160	400	k	19,6	18,3	17,5	17,2
κ	0,4	4	8	16																	
k	86,4	31,9	25,6	21,8																	
κ	32	64	160	400																	
k	19,6	18,3	17,5	17,2																	
	$(ql)_{кр} = \frac{28,31S}{l^2}$																				
	$(ql)_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <p>При $\kappa = \frac{l^2}{h^2} \frac{2GJ_{\kappa}}{D}$, где h — высота балки, D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости, значения k будут</p> <table border="1" data-bbox="818 1682 1390 2013"> <tbody> <tr> <td>κ</td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>143</td> <td>53</td> <td>42,6</td> <td>36,3</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>128</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>32,6</td> <td>30,5</td> <td>29,4</td> <td>28,6</td> </tr> </tbody> </table>	κ	0,4	4	8	16	k	143	53	42,6	36,3	κ	32	64	128	400	k	32,6	30,5	29,4	28,6
κ	0,4	4	8	16																	
k	143	53	42,6	36,3																	
κ	32	64	128	400																	
k	32,6	30,5	29,4	28,6																	

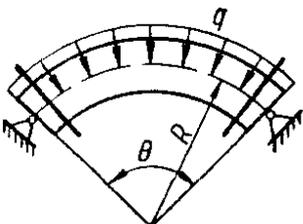
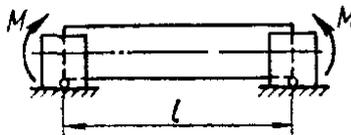
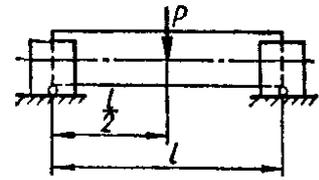
Схема	Критическая нагрузка																				
	<p>Если при опрокидывании нагрузка остается параллельной первоначальному направлению, то</p> $(qR)_{кр} = \frac{EJ}{R^2} \frac{(\pi^2 - \theta^2)^2}{\theta^2 \left(\pi^2 + \theta^2 \frac{EJ}{GJ_k} \right)}$ <p>Если при опрокидывании нагрузка остается направленной к исходному центру кривизны, то</p> $(qR)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{R^2} \frac{\pi^2 - \theta^2}{\theta^2 \left(\pi^2 + \theta^2 \frac{EJ}{GJ_k} \right)}$																				
	$M_{кр} = \frac{2\pi S}{l}$																				
	$P_{кр} = \frac{44,5S}{l^2}$																				
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <p>При $\kappa = \frac{l^2}{h^2} \frac{2GJ_k}{D}$, где h — высота балки, D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости, значения k будут</p> <table border="1" data-bbox="654 1646 1228 1982"> <tbody> <tr> <td>κ</td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>268</td> <td>88,8</td> <td>65,5</td> <td>50,2</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>128</td> <td>320</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>40,2</td> <td>34,1</td> <td>30,7</td> <td>28,4</td> </tr> </tbody> </table>	κ	0,4	4	8	16	k	268	88,8	65,5	50,2	κ	32	64	128	320	k	40,2	34,1	30,7	28,4
κ	0,4	4	8	16																	
k	268	88,8	65,5	50,2																	
κ	32	64	128	320																	
k	40,2	34,1	30,7	28,4																	

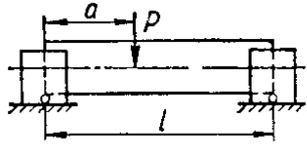
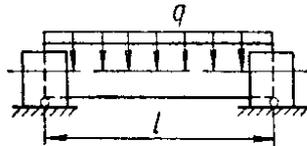
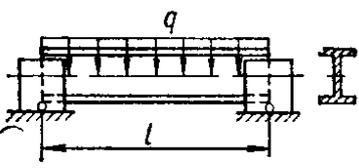
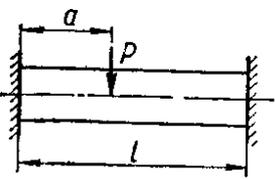
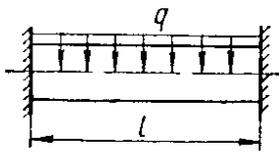
Схема	Критическая нагрузка																				
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="805 369 1476 526"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>117</td> <td>53,2</td> <td>35,2</td> <td>28,5</td> <td>26,7</td> </tr> </table>	a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	117	53,2	35,2	28,5	26,7								
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																
k	117	53,2	35,2	28,5	26,7																
	$(ql)_{кр} = \frac{48,6S}{l^2}$																				
	$(ql)_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <p data-bbox="766 896 1484 1064">При $\kappa = \frac{l^2}{h^2} \frac{2GJ_{\kappa}}{D}$, где h — высота балки, D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости, значения k будут</p> <table border="1" data-bbox="845 1075 1420 1422"> <tr> <td>κ</td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>488</td> <td>161</td> <td>119</td> <td>91,3</td> </tr> <tr> <td>κ</td> <td>32</td> <td>96</td> <td>128</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>73,0</td> <td>58,0</td> <td>55,8</td> <td>51,2</td> </tr> </table>	κ	0,4	4	8	16	k	488	161	119	91,3	κ	32	96	128	400	k	73,0	58,0	55,8	51,2
κ	0,4	4	8	16																	
k	488	161	119	91,3																	
κ	32	96	128	400																	
k	73,0	58,0	55,8	51,2																	
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="798 1579 1468 1736"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>608</td> <td>155</td> <td>80,9</td> <td>58,6</td> <td>53,0</td> </tr> </table>	a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	608	155	80,9	58,6	53,0								
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																
k	608	155	80,9	58,6	53,0																
	$(ql)_{кр} = \frac{129,1S}{l^2}$																				

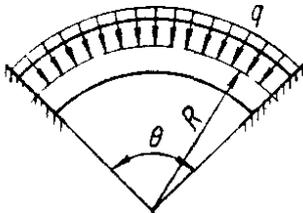
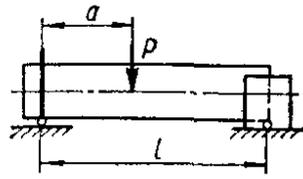
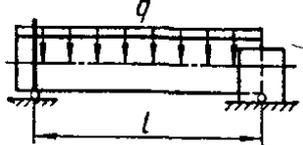
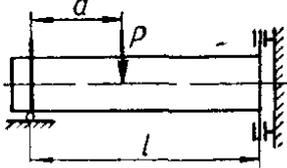
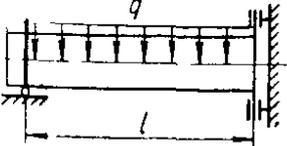
Схема	Критическая нагрузка																								
	$(qR)_{кр} = \frac{mEJ}{R^2}$ <p>Нагрузка остается параллельной своему первоначальному направлению</p> <table border="1" data-bbox="550 481 1268 638"> <tr> <td>θ</td> <td>$\pi : 4$</td> <td>$\pi : 2$</td> <td>π</td> <td>$1,063\pi$</td> <td>$1,1\pi$</td> <td>$1,24\pi$</td> </tr> <tr> <td>m</td> <td>60,1</td> <td>12,6</td> <td>1,85</td> <td>1,54</td> <td>1,40</td> <td>1,00</td> </tr> </table>	θ	$\pi : 4$	$\pi : 2$	π	$1,063\pi$	$1,1\pi$	$1,24\pi$	m	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00										
θ	$\pi : 4$	$\pi : 2$	π	$1,063\pi$	$1,1\pi$	$1,24\pi$																			
m	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00																			
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="550 817 1268 1131"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>65,8</td> <td>34,7</td> <td>25,8</td> <td>22,8</td> <td>22,9</td> </tr> <tr> <td>a/l</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>25,7</td> <td>32,9</td> <td>50,7</td> <td>111</td> <td></td> </tr> </table>	a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	65,8	34,7	25,8	22,8	22,9	a/l	0,6	0,7	0,8	0,9		k	25,7	32,9	50,7	111	
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																				
k	65,8	34,7	25,8	22,8	22,9																				
a/l	0,6	0,7	0,8	0,9																					
k	25,7	32,9	50,7	111																					
	$(ql)_{кр} = \frac{39,6S}{l^2}$																								
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="550 1500 1268 1814"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>77,5</td> <td>41,5</td> <td>31,5</td> <td>28,9</td> <td>30,5</td> </tr> <tr> <td>a/l</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>37,1</td> <td>53,9</td> <td>104</td> <td>376</td> <td></td> </tr> </table>	a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	77,5	41,5	31,5	28,9	30,5	a/l	0,6	0,7	0,8	0,9		k	37,1	53,9	104	376	
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																				
k	77,5	41,5	31,5	28,9	30,5																				
a/l	0,6	0,7	0,8	0,9																					
k	37,1	53,9	104	376																					
	$(ql)_{кр} = \frac{57,2S}{l^2}$																								

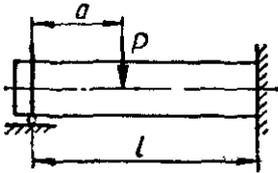
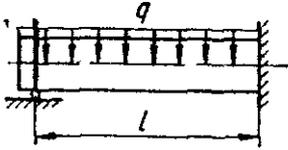
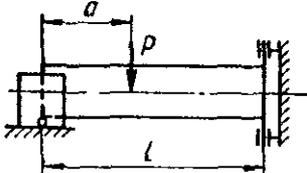
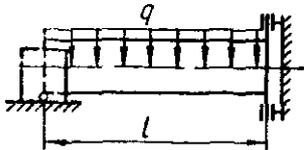
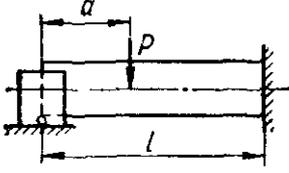
Схема	Критическая нагрузка																												
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="782 414 1492 716"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>79,6</td> <td>43,2</td> <td>33,7</td> <td>31,9</td> <td>35,1</td> </tr> <tr> <td>a/l</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>45,1</td> <td>70,3</td> <td>149</td> <td>625</td> <td></td> </tr> </table>					a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	79,6	43,2	33,7	31,9	35,1	a/l	0,6	0,7	0,8	0,9		k	45,1	70,3	149	625	
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																								
k	79,6	43,2	33,7	31,9	35,1																								
a/l	0,6	0,7	0,8	0,9																									
k	45,1	70,3	149	625																									
	$(ql)_{кр} = \frac{64,6S}{l^2}$																												
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="782 1086 1492 1388"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>138</td> <td>67,1</td> <td>47,0</td> <td>40,1</td> <td>39,9</td> </tr> <tr> <td>a/l</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>46,2</td> <td>64,2</td> <td>119</td> <td>422</td> <td></td> </tr> </table>					a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	138	67,1	47,0	40,1	39,9	a/l	0,6	0,7	0,8	0,9		k	46,2	64,2	119	422	
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																								
k	138	67,1	47,0	40,1	39,9																								
a/l	0,6	0,7	0,8	0,9																									
k	46,2	64,2	119	422																									
	$(ql)_{кр} = \frac{84,8S}{l^2}$																												
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="782 1758 1492 2016"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>145</td> <td>67,6</td> <td>47,1</td> <td>40,7</td> <td>41,8</td> </tr> <tr> <td>a/l</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>50,5</td> <td>75,0</td> <td>150</td> <td>630</td> <td></td> </tr> </table>					a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	145	67,6	47,1	40,7	41,8	a/l	0,6	0,7	0,8	0,9		k	50,5	75,0	150	630	
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																								
k	145	67,6	47,1	40,7	41,8																								
a/l	0,6	0,7	0,8	0,9																									
k	50,5	75,0	150	630																									

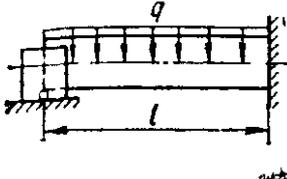
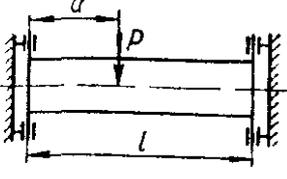
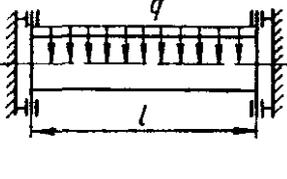
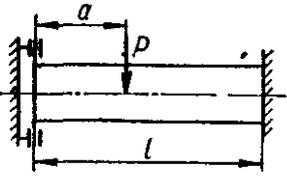
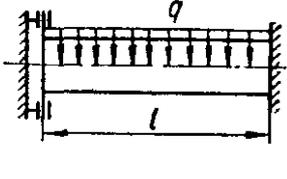
Схема	Критическая нагрузка																						
	$(ql)_{кр} = \frac{86,4S}{l^2}$																						
	<p>Вертикальные перемещения опорных сечений невозможны:</p> $P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="534 739 1220 884"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>393</td> <td>114</td> <td>63,1</td> <td>47,2</td> <td>43,2</td> </tr> </table>	a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	393	114	63,1	47,2	43,2										
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																		
k	393	114	63,1	47,2	43,2																		
	<p>Вертикальные перемещения опорных сечений предполагаются невозможными</p> $(ql)_{кр} = \frac{98,7S}{l^2}$																						
	$P_{кр} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="534 1377 1220 1523"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>399</td> <td>118</td> <td>67,8</td> <td>52,6</td> <td>50,2</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="534 1556 1220 1702"> <tr> <td>a/l</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td>k</td> <td>57,7</td> <td>82,2</td> <td>161</td> <td>621</td> </tr> </table>	a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	399	118	67,8	52,6	50,2	a/l	0,6	0,7	0,8	0,9	k	57,7	82,2	161	621
a/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																		
k	399	118	67,8	52,6	50,2																		
a/l	0,6	0,7	0,8	0,9																			
k	57,7	82,2	161	621																			
	$(ql)_{кр} = \frac{120,6S}{l^2}$																						

Таблица 47. Коэффициенты условного допускаемого напряжения на

Таб

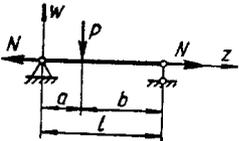
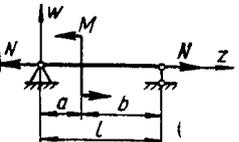
Материал	Таб								
	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Сталь									
Ст0	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75
Ст2									
Ст3									
Ст4									
Ст5									
НЛ-1	1,00	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,82	0,76	0,70
НЛ-2 (БХСНД)	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,83	0,78	0,71	0,63
СПК	1,00	0,97	0,95	0,91	0,87	0,83	0,79	0,72	0,65
Чугун									
СЧ12-28	1,00	0,97	0,91	0,81	0,69	0,57	0,44	0,34	0,26
СЧ15-18									
СЧ15-30									
СЧ15-32									
СЧ15-36									
СЧ18-36									
СЧ21-40									
СЧ21-44	1,00	0,95	0,87	0,75	0,60	0,43	0,32	0,23	0,18
СЧ24-44									
СЧ28-48									
Алюминиевый сплав									
АМг	1,00	0,973	0,945	0,917	0,87	0,77	0,685	0,603	0,53
АМг-6	1,00	0,973	0,946	0,89	0,77	0,64	0,542	0,458	0,387
АВТ1	1,00	0,996	0,992	0,90	0,78	0,66	0,557	0,463	0,387
Д16Т	1,00	0,999	0,998	0,835	0,70	0,568	0,455	0,353	0,269
Каменные и армо-каменные элементы	1,00	0,99	0,96	0,91	0,85	0,78	0,72	0,65	0,58
Железобетон	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,83	0,73	0,64
Бетон тяжелый	1,00	1,00	0,96	0,90	0,84	0,76	0,70	0,63	0,57
Бетон легкий	1,00	1,00	0,95	0,86	0,73	0,68	0,59	0,52	0,46
Дерево (сосна, ель)	1,00	0,99	0,97	0,93	0,87	0,80	0,71	0,61	0,49

СМЯТНЕ П

КОЛТА /

70	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19
0,62	0,51	0,43	0,38	0,32	0,28	0,26	0,24	0,21	0,19	0,17	0,16
0,54	0,45	0,39	0,33	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14
0,55	0,43	0,35	0,30	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13
0,20	0,16										
0,14	0,12										
0,465	0,415	0,365	0,327	0,296	0,265	0,235					
0,322	0,28	0,243	0,213	0,183	0,162	0,148					
0,312	0,252	0,21	0,175	0,15	0,129	0,113					
0,212	0,172	0,142	0,119	0,101	0,087	0,076					
0,53	0,48	0,43	0,38	0,35	0,32	0,29					
0,57	0,52										
0,51	0,45										
-	-										
0,38	0,31	0,25	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08

504 Таблица 48. Уравнения изгибающего момента $M(z)$ и упругой линии $w(z)$ для некоторых случаев продольно-поперечного изгиба балок постоянного поперечного сечения ($k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$)

Схема балки и ее нагружения	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{P}{k} \left[\frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - e(a) \text{sh } k(z-a) \right]$ $M(a) = \frac{P \text{sh } kb}{k \text{sh } kl} \text{sh } ka$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a$ $e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$w(z) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ \frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - \left(1 - \frac{a}{l}\right) kz - e(a) [\text{sh } k(z-a) - k(z-a)] \right\}$ $w(a) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ \frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka - \left(1 - \frac{a}{l}\right) ka \right\}$
	$M(z) = M \left[\frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - e(a) \text{ch } k(z-a) \right]$ $M(a) = M \frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a$ $e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$w(z) = \frac{M}{EJk^2} \left\{ \frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - \frac{z}{l} - e(a) [\text{ch } k(z-a) - 1] \right\}$ $w(a) = \frac{M}{EJk^2} \left[\frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka - \frac{a}{l} \right]$

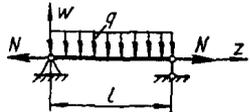
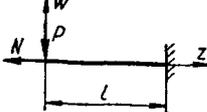
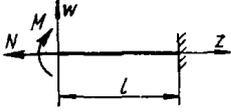
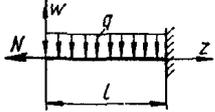
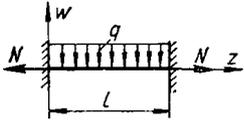
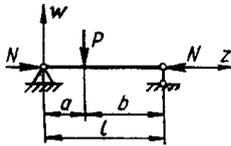
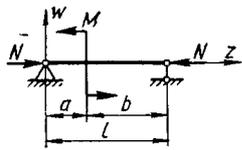
	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[-\frac{\operatorname{ch} k \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} + 1 \right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2} \left(-\frac{1}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} + 1 \right)$	$\omega(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} - \frac{k^2 l z}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right]$ $\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} - \frac{k^2 l^2}{8} \right)$
	$M(z) = \frac{P}{k} \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kl}$	<p style="text-align: center;">—</p>
	$M(z) = \frac{M}{\operatorname{ch} kl} \operatorname{ch} k(l-z)$	<p style="text-align: center;">—</p>
	$M(l) = \frac{q}{k^2 \operatorname{ch} kl} (1 - \operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl)$	<p style="text-align: center;">—</p>

Схема балки и ее нагружения	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[1 - \frac{kl}{2} \frac{\operatorname{ch} k \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2} \left(1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right)$ $M(0) = \frac{q}{k^2} \left(1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{th} \frac{kl}{2}} \right)$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[\frac{-\operatorname{ch} k \left(z - \frac{l}{2} \right) + \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \frac{kl}{2} - \frac{k^2 l z}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right]$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4} \left(\frac{kl}{2} \operatorname{th} \frac{kl}{4} - \frac{k^2 l^2}{8} \right)$
	$M(z) = \frac{P}{k} \left[\frac{\sin kb}{\sin kl} \sin kz - e(a) \sin k(z-a) \right]$ $M(a) = \frac{P}{k} \frac{\sin kb}{\sin kl} \sin ka$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a$ $e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$w(z) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ -\frac{\sin kb}{\sin kl} \sin kz + \left(1 - \frac{a}{l} \right) kz + e(a) [\sin k(z-a) - k(z-a)] \right\}$ $w(a) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ -\frac{\sin kb}{\sin kl} \sin ka + \left(1 - \frac{a}{l} \right) ka \right\}$



$$M(z) = M \left[\frac{\cos kb}{\sin kl} \sin kz - e(a) \cos k(z-a) \right]$$

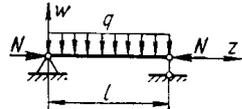
$$M(a) = M \frac{\cos kb}{\sin kl} \sin ka$$

$$e(a) = 0 \text{ при } z \leq a$$

$$e(a) = 1 \text{ при } z > a$$

$$w(z) = \frac{M}{EJk^2} \left\{ -\frac{\cos kb}{\sin kl} \sin kz + \frac{z}{l} - e(a) [1 - \cos k(z-a)] \right\}$$

$$w(a) = \frac{M}{EJk^2} \left[-\frac{\cos kb}{\sin kl} \sin ka + \frac{a}{l} \right]$$

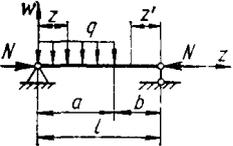
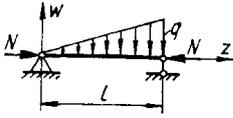
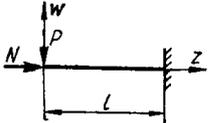


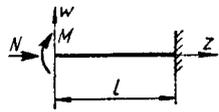
$$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[-1 + \frac{\cos k \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} \right]$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2} \left(-1 + \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \right)$$

$$w(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[1 - \frac{\cos k \left(z - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} + \frac{k^2 l z}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right]$$

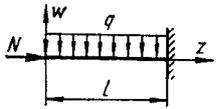
$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} + \frac{k l^2}{8} \right)$$

Схема балки и ее нагружения	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[\frac{\cos kl - \cos kb}{\sin kl} \sin kz - \cos kz + 1 \right]$ $M(z') = \frac{q}{k^2} \left[\frac{\cos kl - \cos kb}{\sin kl} \sin kz - \cos kz + \cos k(z-a) \right]$	—
	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left(\frac{\sin kz}{\sin kl} - \frac{z}{l} \right)$ $M_{\max} \text{ при } z = \frac{l}{k} \arccos \frac{\sin kl}{kl}$	—
	$M(z) = -\frac{P}{k} \frac{\sin kz}{\cos kl}$	—



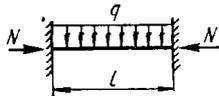
$$M(z) = \frac{M}{\cos kl} \cos k(l-z)$$

-



$$M(l) = \frac{q}{k^2 \cos kl} (1 - \cos kl - kl \sin kl)$$

-



$$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[-1 + \frac{kl \cos k(z-l/2)}{\sin kl/2} \right]$$

$$M(l/2) = \frac{q}{k^2} \left(-1 + \frac{kl/2}{\sin kl/2} \right)$$

$$M(0) = \frac{q}{k^2} \left(-1 + \frac{kl/2}{\operatorname{tg} kl/2} \right)$$

$$\omega(z) = \frac{q}{EJk^4} \left\{ \frac{kl}{2} \left[\frac{-\cos k\left(z - \frac{l}{2}\right) + \cos \frac{kl}{2}}{\sin \frac{kl}{2}} \right] + \frac{k^2 lz}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right\}$$

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4} \left(-\frac{kl}{2} \operatorname{tg} \frac{kl}{4} + \frac{k^2 l^2}{8} \right)$$

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

19.1. Классификация механических колебаний

Все колебательные процессы, с которыми приходится встречаться в физике и технике, можно классифицировать в соответствии с законом, по которому величина, характеризующая колебательный процесс, изменяется во времени. Такую классификацию можно назвать *кинематической* в широком смысле этого слова. Колебания могут быть *периодическими* и *непериодическими*. Кроме того, имеется широкий промежуточный класс так называемых *почти периодических* колебаний.

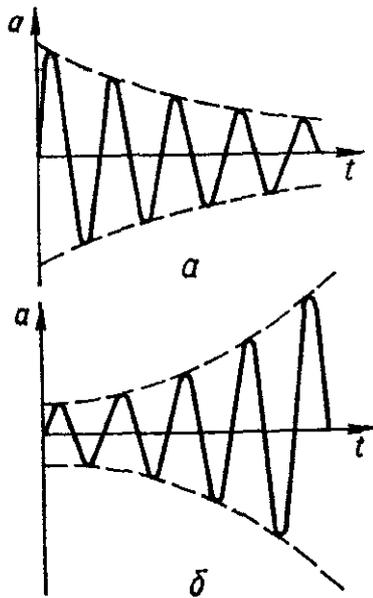


Рис. 328

Периодические колебания описываются периодической функцией, значение которой повторяется через определенный отрезок времени T , называемый *периодом колебаний*, т. е.

$$f(t + T) = f(t)$$

при любом значении переменной t .

Непериодическими называются функции, не удовлетворяющие указанному условию.

Почти периодические функции определяются условием

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leq \varepsilon$$

при любом t , где τ и ε — определенные постоянные величины. Очевидно, что если ε очень мало по сравнению со средним значением модуля функции $f_1(t)$ за время t , то почти периодическая функция будет близка к периодической, в которой τ будет *почти периодом*.

К наиболее распространенным периодическим колебаниям относятся *гармонические* колебания.

Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических. Такие колебания чаще всего являются *затухающими* (рис. 328, а) или *нарастающими* (рис. 328, б) гармоническими колебаниями. Затухающие колебания математически могут быть представлены выражением

$$x = A^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (19.1)$$

где A , φ , δ и ω — постоянные величины; t — время.

Нарастающие гармонические колебания математически описываются аналогично (19.1), только знак при δt должен быть заменен на противоположный (плюс).

Строго говоря, название «затухающие гармонические колебания» не совсем логично, так как гармонические колебания не могут затухать. Тем не менее на практике этим названием пользуются.

Классификация колебательных процессов по внешним признакам не является достаточной, а потому она должна быть дополнена классификацией колебаний по основным физическим признакам рассматриваемых колебательных систем.

При исследовании колебательных движений упругих систем важно знать, какое число независимых параметров определяет положение системы в каждый данный момент времени. Число таких параметров называется *числом степеней свободы*.

В простейших случаях положение системы может быть определено одной величиной. Такие системы называются *системами с одной степенью свободы*. Колебательная система, состоящая из груза Q , подвешенного на пружине (рис. 329), будучи устроена так, что возможны только вертикальные перемещения груза, является системой с одной степенью свободы. Ее положение в любой момент времени может быть определено одним параметром — перемещением по вертикали.

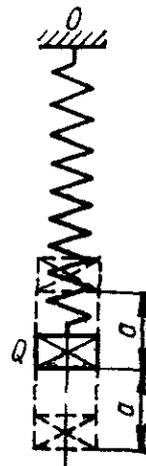


Рис. 329

Примером системы с двумя степенями свободы может служить невесомая балка, несущая две массы (рис. 330). Здесь независимыми параметрами, определяющими положение системы в любой момент времени, могут служить перемещения масс m_1 и m_2 относительно положения равновесия. Увеличивая число сосредоточенных масс колеблющейся балки, переходим в пределе к балке с распределенной по всей длине массой — *колебательной системе* (рис. 331) с бесконечным числом степеней свободы.

Классификации механических колебаний может быть проведена и по другим признакам. В частности, принято различать следующие четыре типа колебаний: *свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания и автоколебания*.



Рис. 330

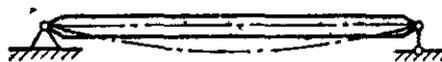


Рис. 331

Свободными (собственными) называются колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения («толчков»), вызывающего у точек системы начальные отклонения от положения равновесия, и продолжающиеся ватем благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие. Необходимая энергия, обеспечивающая процесс колебаний, поступает извне в начальный момент возбуждения колебаний. Период колебаний (время одного полного колебания) или частота колебаний (величина, обратная периоду) зависит от самой системы. Частота колебаний является вполне определенной для данной системы и называется *собственной частотой колебаний* системы. Свободные колебания из-за потерь энергии в системе практически всегда являются затухающими, хотя при анализе свободных колебаний указанными потерями энергии часто пренебрегают.

Вынужденными называются колебания упругой системы, происходящие при действии на систему (в течение всего процесса колебаний) заданных внешних периодически изменяющихся вынуждающих сил.

Характер колебательного процесса при этом определяется не только свойствами системы, но существенно зависит также от внешней силы. Примером вынужденных колебаний могут служить поперечные колебания балки (рис. 332), вызываемые неуравновешенной массой ротора и установленного на ней работающего электромотора.

Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы и поддерживаются за счет непрерывного поступления энергии извне. При совпадении частоты вынуждающих сил с частотой собственных колебаний системы наступает резонанс, характеризующийся резким возрастанием амплитуды вынужденных колебаний, представляющим опасность для работы рассматриваемой механической колебательной системы.

Параметрическими называются колебания упругой системы, в процессе которых периодически изменяются физические параметры системы — величины, характеризующие массу или жесткость системы. При этом внешние силы не влияют непосредственно на колебательное движение, а изменяют физические параметры системы. Примером параметрических колебаний могут служить поперечные колебания массы на вращающемся стержне некруглого сечения, имеющим разный экваториальный момент инерции относительно взаимно перпендикулярных осей.



Рис. 332

Автоколебаниями, или самоколебаниями, упругой системы называются незатухающие колебания, поддерживаемые такими внешними силами, характер

воздействия которых определяется самим колебательным процессом.

Автоколебания возникают в системе в отсутствие внешних периодических воздействий. Характер колебаний определяется исключительно устройством системы. Источник энергии, восполняющий потери энергии в системе в процессе ее колебаний, составляет неотъемлемую часть системы. Таким образом, автоколебания отличаются от свободных колебаний, являющихся затухающими, тем, что они не затухают. С другой стороны, автоколебания отличаются от вынужденных и параметрических колебаний, вызываемых внешними силами, характер действия которых в обоих случаях задан, тем, что они являются *самовозбуждающимися* колебаниями, в которых процесс колебаний управляется самими колебаниями.

Примером автоколебаний может служить вибрация частей самолета (флаттер), когда источником дополнительной энергии, поддерживающей колебания системы, является энергия воздушного потока, а также трепетание флага на ветру.

Классификацию колебаний принято также проводить по виду деформаций упругих элементов конструкции. В частности, применительно к стержневым системам различают *продольные, поперечные и крутильные колебания.*

При продольных колебаниях перемещения всех точек упругого стержня направлены вдоль оси стержня. При этом имеет место деформация удлинения или укорочения стержня, т. е. продольные колебания можно называть колебаниями растяжения — сжатия.

При поперечных (изгибных) колебаниях основные компоненты перемещений (прогибы) направлены перпендикулярно к оси стержня.

При крутильных колебаниях имеют место переменные деформации кручения. Возможны также изгибно-крутильные колебания, т. е. колебания, при которых одновременно имеют место переменный изгиб и кручение.

19.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Простейшей колебательной системой с одной степенью свободы может служить груз, подвешенный на вертикально расположенной пружине (рис. 333).

Дифференциальное уравнение колебаний груза Q получим в сумме проекций всех сил (включая силы инерции согласно принципу Даламбера) на вертикальную ось, в виде

$$Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (19.2)$$

где x — вертикальное перемещение груза от положения статического равновесия; $\ddot{} = d^2x/dt^2$; t — время; c — жесткость пружины; g — ускорение свободного падения; ω — угловая частота свободных колебаний

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{g}{\Delta_{ст}}; \quad (19.3)$$

$\Delta_{ст} = Q/c$ — величина удлинения пружины при статическом действии груза Q .

Решением уравнения (19.2) будет

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (19.4)$$

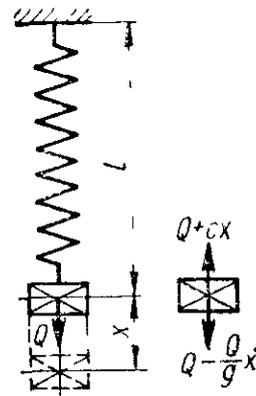


Рис. 333

где A и B — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Если заданы начальная координата груза x_0 и начальная скорость $v_0 = \dot{x}$ при $t = 0$, то из (19.4) определим

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}. \quad (19.5)$$

Полагая

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha, \quad (19.6)$$

решение (19.4) можно представить в виде

$$x = a \sin (\omega t + \alpha),$$

где a — амплитуда колебаний, определяемая формулой

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Величина $\omega t + \alpha$ называется *фазой колебаний*, а величина α — *сдвиг фазы*. На основании (19.6) α может быть определено из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Угловая частота колебания (число колебаний, совершаемое в течение 2π секунд) на основании (19.3) будет

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} \quad (19.7)$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

где $m = Q/g$ — масса подвешенного груза.

Зная угловую частоту, можно определить период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{c}}. \quad (19.8)$$

Число колебаний в секунду, т. е. секундная частота, выражаемая в герцах, определится формулой

$$i = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (19.9)$$

При колебаниях груза, подвешенного на конце пружины, представляющей собой стержень длиной l с жесткостью поперечного сечения на растяжение EF и жесткостью

$$c = \frac{EF}{l},$$

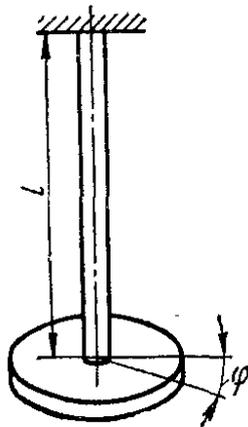


Рис. 334

собственная частота колебаний согласно (19.7) определится формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}. \quad (19.10)$$

Учитывая, что $Q/g = m$, можно записать

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{ml}}. \quad (19.11)$$

Из формул (19.10) и (19.11) видно, что частота свободных колебаний системы при неизменной массе возрастает с увеличением жесткости и уменьшается с увеличением массы при неизменной жесткости.

Отношение частот свободных колебаний грузов, прикрепленных к концам двух разных стержней, обратно пропорционально корню квадратному из отношения статических удлинений стержней.

Примером системы с одной степенью свободы может служить также колебательная система, состоящая из массивного диска, прикрепленного к нижнему концу жестко закрепленного верхним концом вала (рис. 334). Если к диску в его плоскости приложить и внезапно удалить пару сил, то возникнут свободные колебания кручения вала вместе с диском. Обозначим крутильную жесткость вала (крутящий момент, вызывающий закручивание вала на один радиан) через c :

$$c = \frac{GJ_p}{l} = \frac{G\pi d^4}{l \cdot 32}, \quad (19.12)$$

где G — модуль упругости при сдвиге; d — диаметр вала; l — длина вала.

Воспользовавшись принципом Даламбера (инерцией массы стержня не пренебрегаем), получим дифференциальное уравнение крутильных колебаний диска, приравняв крутящий момент $c\varphi$, действующий в валу при его закручивании на угол φ , моменту сил инерции массы диска:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \quad (19.13)$$

где J — момент инерции диска относительно оси стержня, перпендикулярной к плоскости диска.

Для диска постоянной толщины h , изготовленного из материала с удельным весом γ , получим

$$J = \frac{\pi D^4 h \gamma}{32g} = \frac{QD^2}{8g}. \quad (19.14)$$

Здесь D — диаметр диска; Q — вес диска.

Для диска переменной толщины

$$J = \frac{2\pi}{g} \int_0^{D/2} h(\rho) \gamma \rho^3 d\rho. \quad (19.15)$$

Обозначив

$$\omega^2 = \frac{c}{J}, \quad (19.16)$$

уравнение (19.13) перепишем в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (19.17)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (19.18)$$

Период колебаний рассматриваемой системы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}. \quad (19.19)$$

Для стержня постоянного диаметра d с учетом (19.12) имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{32lJ}{G\pi d^4}}, \quad (19.20)$$

а частота колебаний

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32Jl}}. \quad (19.21)$$

В табл. 49 приведены собственные частоты колебаний систем с одной степенью свободы.

19.3. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы при гармоническом возбуждении

Уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы (рис. 333) получим, если в (19.2) кроме сил инерции $\frac{Q}{g} \ddot{x}$

и сил упругости, действующих на груз Q , учтем влияние периодической вынуждающей силы $P \cos pt$

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = P \cos pt. \quad (19.22)$$

Обозначив

$$\frac{cg}{Q} = \omega^2; \quad (19.23)$$

$$\frac{Pg}{Q} = q, \quad (19.24)$$

где p — угловая частота вынуждающей силы, приведем уравнение (19.22) к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt. \quad (19.25)$$

При p малом по сравнению с ω членом \ddot{x} можно пренебречь и считать, что имеет место только статическая деформация, максимальное значение которой

$$x_{\text{ст}} = \frac{q}{\omega^2}. \quad (19.26)$$

Для определения динамической деформации необходимо решить уравнение (19.25). Решение уравнения (19.25) будет состоять из суммы общего решения однородного уравнения (при $q \cos pt = 0$)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (19.27)$$

и частного решения уравнения (19.25)

$$x = C \cos pt. \quad (19.28)$$

Подставив (19.28) в (19.25), найдем

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \quad (19.29)$$

Тогда общее решение уравнения (19.25) будет

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt. \quad (19.30)$$

Первые два слагаемых правой части решения (19.30), характеризуют свободные колебания, которые обычно быстро затухают; последнее характеризует вынужденные установившиеся колебания с угловой частотой p (с периодом $T_1 = 2\pi/p$ или частотой $f = p/2\pi$ Гц) и амплитудой $C = q / (\omega^2 - p^2)$. Амплитуда вынужденных колебаний существенно зависит от соотношения собственной ω и вынужденной p частот колебаний и может быть охарактеризована так называемым коэффициентом динамического усиления.

$$\beta = \frac{C}{x_{\text{ст}}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \quad (19.31)$$

или

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}}, \quad (19.32)$$

где

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Как видно из (19.31), при малом отношении p/ω $\beta \rightarrow 1$ и $C \rightarrow x_{ст}$. Когда же частота вынужденных колебаний $p \rightarrow \omega$, т. е. $p/\omega \rightarrow 1$, то $C \rightarrow \infty$. Когда $p = \omega$, имеет место состояние резонанса. Соответствующая частота вынуждающей силы $p = p_{кр}$ при этом называется *критической*. График зависимости $|\beta| = f(p/\omega)$, приведенный на рис. 335 и представляющий собой так называемую *амплитудно-частотную характеристику*, позволяет проанализировать поведение колебательной системы в зависимости от соотношения частот свободных ω и вынужденных p колебаний.

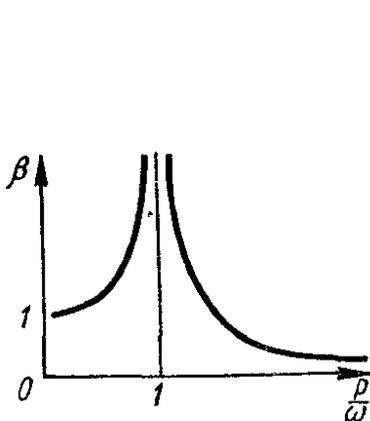


Рис. 335

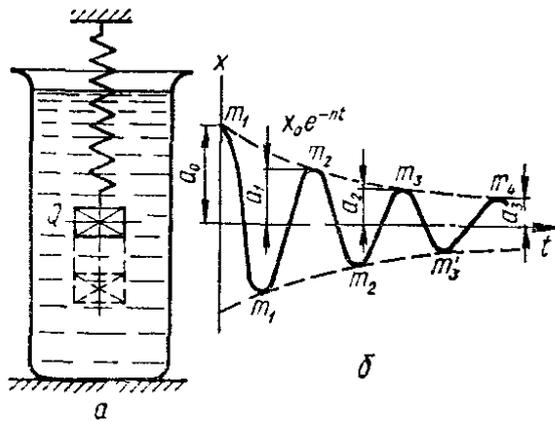


Рис. 336

19.4. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления, пропорционального скорости

Уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы (рис. 336, а) с учетом сопротивления, пропорционального скорости движения колеблющегося груза, получим из рассмотрения условий его динамического равновесия:

$$Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} - \alpha \dot{x} = Q + cx,$$

или

$$\ddot{x} + 2nx + \omega^2 x = 0, \quad (19.33)$$

где α — коэффициент пропорциональности; αx — сила сопротивления.

В уравнении (19.33)

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad 2n = \frac{\alpha g}{Q}. \quad (19.34)$$

Обозначим

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2. \quad (19.35)$$

Решение уравнения (19.33) будет

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t), \quad (19.36)$$

где $e = 2,718$.

Период затухающих колебаний рассматриваемой системы

$$T = \frac{2\tau}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}, \quad (19.37)$$

где n — коэффициент, характеризующий демпфирующую способность колебательной системы. Из (19.36) видно, что из-за множителя e^{-nt} амплитуда колебаний с течением времени уменьшается — колебания затухают. Постоянные интегрирования A и B в решении (19.36) определяются из начальных условий. Так, полагая, что при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, находим

$$B = x_0; \quad A = \frac{1}{\omega_1} (x_0 + nx_0)$$

В этом случае решение (19.36) может быть представлено в виде

$$x = e^{-nt} \left[\frac{x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + x_0 \left(\cos \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]. \quad (19.38)$$

В частном случае, когда $A = 0$, т. е. когда

$$\frac{x_0}{\omega_1} + \frac{nx_0}{\omega_1} = 0,$$

уравнение (19.38) примет вид

$$x = x_0 e^{-nt} \cos \omega_1 t.$$

Графически это уравнение представлено на рис. 336, б. Уменьшение амплитуды следует геометрической прогрессии. Действительно, при $t = 0; T; 2T; \dots$ амплитуды соответственно имеют значения

$$a_0 = x_0; \quad a_1 = x_0 e^{-nT}; \quad a_2 = x_0 e^{-2nT}; \quad \dots$$

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = e^{nT},$$

откуда

$$\ln \frac{a_k}{a_{k+1}} = \ln e^{nT} = nT = \delta. \quad (19.39)$$

Величина δ называется *логарифмическим декрементом колебаний* и обычно является основной характеристикой затухания колебаний или характеристикой демпфирующих свойств колебательной системы.

19.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления, пропорционального скорости

Согласно данным предыдущих разделов дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы, приведенной на рис. 336, а при действии внешней вынуждающей силы $P \sin pt$ должно быть записано в окончательном виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q \sin pt, \quad (19.40)$$

где, как и ранее,

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad q = \frac{Pg}{Q}; \quad n = \frac{ag}{2Q}. \quad (19.41)$$

Общее решение уравнения (19.40) будет состоять из суммы решения однородного уравнения (19.33)

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$, и частного решения уравнения (19.40)

$$x = K \sin pt + L \cos pt. \quad (19.42)$$

После подстановки (19.42) в (19.40) найдем

$$K = \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}; \quad L = -\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}. \quad (19.43)$$

Тогда общее решение уравнения (19.40) будет иметь вид

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) - \frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} \cos pt - \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} \sin pt. \quad (19.44)$$

Поскольку со временем свободные колебания, характеризуемые членом, содержащим множитель e^{-nt} , затухают, то при установившихся колебаниях вынужденные колебания системы будут характеризоваться последними двумя членами правой части решения (19.44), пропорциональными q . Период незатухающих колебаний будет

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}.$$

Если ввести следующую замену:

$$\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} = \mathfrak{A} \sin \varphi; \quad (19.45)$$

$$\frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} = \mathfrak{A} \cos \varphi, \quad (19.46)$$

то решение x для вынужденных колебаний может быть представлено в виде

$$x = \mathfrak{A} (\cos \varphi \sin pt - \sin \varphi \cos pt) = \mathfrak{A} \sin (pt - \varphi), \quad (19.47)$$

где амплитуда \mathfrak{A} и угол сдвига фаз φ на основании (19.45) и (19.46) определяются соответственно формулами

$$\mathfrak{A} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}, \quad (19.48)$$

или, учитывая, что $n = \frac{\delta \omega_1}{2\pi} \approx \frac{\delta \omega}{2\pi}$, формулами

$$\mathfrak{A} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \omega^2 p^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\delta}{\pi} p \omega}{\omega^2 - p^2}. \quad (19.49)$$

При $\omega > p$ угол φ будет положительным и меньшим $\pi/2$, т. е. $0 < \varphi < \pi/2$. При $\omega < p$ получим $\pi/2 < \varphi < \pi$, т. е. вынужденные колебания отстают от вынуждающей силы больше чем на $\pi/2$. При $p = \omega$

имеем $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, т. е. $\varphi = \pi/2$ и, следовательно, колебательная система занимает свое среднее положение в тот момент, когда вынуждающая сила имеет максимальное значение.

Учитывая, что

$$q = \frac{gP}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q}, \quad (19.50)$$

находим

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{gPQ}{Qcg} = \frac{P}{c} = \Delta_{\text{ст}}, \quad (19.51)$$

где $\Delta_{\text{ст}}$ — деформация пружины при статическом приложении амплитудного значения вынуждающей силы.

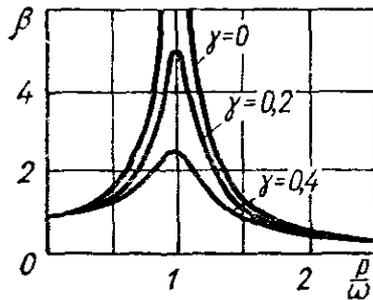


Рис. 337

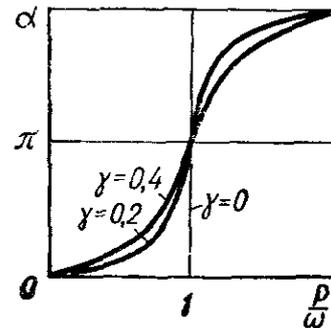


Рис. 338

Учитывая (19.51), выражение для амплитуды вынужденных колебаний \mathcal{A} (19.48) можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \frac{\Delta_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}} = \frac{\Delta_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}. \quad (19.52)$$

Как видно, амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот свободных (ω) и вынужденных (p) колебаний и от демпфирующей способности колебательной системы, определяемой логарифмическим декрементом колебаний δ .

При $p \ll \omega$ имеем $\mathcal{A} \rightarrow \Delta_{\text{ст}}$; при $p \rightarrow \omega$ имеем $\mathcal{A} \rightarrow \Delta_{\text{ст}} \frac{\pi}{\delta}$, т. е. обратно пропорционально δ и при $\delta \rightarrow 0$ $\mathcal{A} \rightarrow \infty$.

Коэффициент динамического усиления β в рассматриваемом случае определяется формулой

$$\beta = \frac{\mathcal{A}}{\Delta_{\text{ст}}}$$

или с учетом (19.52)

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}. \quad (19.53)$$

Амплитудно-частотные характеристики $|\beta| = f_1(p/\omega)$ для различных значений коэффициента $\gamma = \delta/\pi$, характеризующего демпфирующую способность колебательной системы, показаны на рис. 337. График зависимости $\varphi = f_2(p/\omega)$ приведен на рис. 338.

19.6. Демпфирующая способность материала

Среди различных причин, обуславливающих гашение колебаний механических систем, особый интерес представляет естественное поглощение энергии колебаний в материале упругих элементов самой колебательной системы. Любой реальный материал способен при его циклическом деформировании в большей или меньшей степени поглощать энергию циклического деформирования, преобразуя ее в тепло, которая затем рассеивается.

Способность материала необратимо поглощать механическую энергию обусловлена его несовершенной упругостью, проявляющейся в нелинейности и неоднозначности зависимостей между напряжением и деформацией при нагружении и разгрузке и приводящей к образованию *петли гистерезиса* (рис. 339), площадью которой характеризуется величина поглощенной (или рассеянной) в единице объема материала энергии $\Delta U(\epsilon_0)$ за цикл его деформирования с данной амплитудой деформации ϵ_0 (и напряжения σ_0).

В общем случае симметричного цикла деформирования уравнения восходящей ($\vec{\sigma}$) и нисходящей ($\overleftarrow{\sigma}$) ветвей петли гистерезиса, обусловленного несовершенной упругостью стабильного состояния материала, можно представить в виде

$$\vec{\sigma}(\epsilon) = E \left\{ \epsilon \mp \sum_n \kappa_n [(\epsilon_0 \pm \epsilon)^n - 2^{n-1} \epsilon_0^n] \right\}, \quad (19.54)$$

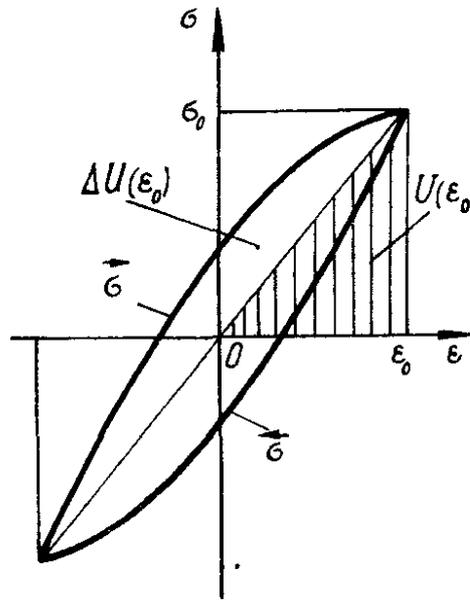


Рис. 339

где n , κ_n — параметры петли гистерезиса, подлежащие определению.

Отмеченная способность материала начинает проявляться при амплитудах напряжений, значительно меньших макроскопического предела упругости, и для области рабочих амплитуд деформаций деталей инженерных конструкций в основном обуславливается микропластическими деформациями, связанными с перемещениями дислокаций, перемещениями межфазных границ и границ двойников, связанными с наличием обратимого мартенсита в структуре, а также магнито-механическим гистерезисом, связанным с необратимыми смещениями границ доменов.

Применительно к инженерным задачам гашения (демпфирования) колебаний элементов конструкций рассматриваемая способность материала поглощать энергию его циклического деформирования называется *демпфирующей способностью*.

Эта способность материала как один из основных факторов, обуславливающих ограничение амплитуды резонансных колебаний и затухание свободных колебаний и влияющих на динамическую устойчивость и развитие автоколебаний, имеет важное значение для обеспечения не только динамической прочности вибрирующих элементов, но и устойчивой работы аппаратуры, а также улучшения комфортабельности транспортных машин и повышения эффективности работы вибрационных машин резонансного типа. При этом, если обычно стремятся обеспечить максимальное демпфирование колебаний упругого элемента, что считается одним из условий оптимального конструирования

ния, то, например, для резонансной системы вибрационной машины желательно иметь минимальный уровень демпфирования.

Демпфирующая способность материала обычно характеризуется *относительным рассеянием энергии*

$$\psi(\epsilon_0) = \frac{\Delta U(\epsilon_0)}{U(\epsilon_0)}, \quad (19.55)$$

где $U(\epsilon_0)$ — амплитудное значение энергии упругого деформирования (площадь заштрихованного на рис. 339 треугольника), или *логарифмическим декрементом колебаний*

$$\delta(\epsilon_{0,i \text{ ср}}) = \frac{1}{N} \ln \frac{\epsilon_{0,i}}{\epsilon_{0,i+N}} \approx \frac{2(k-1)}{N(k+1)}, \quad (19.56)$$

где $\epsilon_{0,i}$, $\epsilon_{0,i+N}$ — амплитуда деформаций в начале и конце рассматриваемого участка в N циклов свободных затухающих колебаний; $k = \epsilon_{0,i}/\epsilon_{0,i+N}$; $\epsilon_{0,i \text{ ср}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{0,i} + \epsilon_{0,i+N})$. При этом между указанными характеристиками имеется определенная связь ($\epsilon_{0,i \text{ ср}} \equiv \epsilon_0$)

$$\delta(\epsilon_0) \approx \frac{1}{2} \psi(\epsilon_0). \quad (19.57)$$

Для наиболее общего случая записи амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний

$$\delta(\epsilon_0) = \sum_n K_n \epsilon_0^{n-1} \quad (19.58)$$

между параметрами этой зависимости и уравнений петли гистерезиса установлено следующее соотношение:

$$\kappa_n = \frac{K_n(n+1)}{2^{n+1}(n-1)}. \quad (19.59)$$

Демпфирующая способность конструкционных материалов зависит от многих факторов: химического состава и структуры материала, амплитуды циклической деформации (напряжения) (рис. 340) и вида напряженного состояния, температуры (рис. 341) и термической обработки (рис. 342), статической напряженности (рис. 343) и внешнего магнитного поля (рис. 342), предварительного пластического деформирования и длительности воздействия циклического деформирования и др. Демпфирующая способность рассматривается как самостоятельная характеристика материала, требующая в основном экспериментального определения с учетом реальных технологических и эксплуатационных факторов.

Известные конструкционные материалы различаются по демпфирующей способности весьма существенно — на три порядка. Ниже приведены некоторые ориентировочные данные о максимальном значении декремента колебаний различных классов материалов при амплитуде гомологического напряжения, равного примерно одной десятой предела текучести данного материала, в условиях комнатной температуры

Материал	$\delta_{max}, \%$	Материал	$\delta_{max}, \%$
Сплавы		Чугуны с графитом	
алюминиевые	0,1—1	пластинчатым	10—15
магнисвые (литые)	13—30	шаровидным	2—5
марганцевомедные	10—25	Стали	
медноалюминиевые*	4—10	хромистые	1—4
никельтитановые	10—15	углеродистые	0,2—1
кобальтоникелевые	6—12	Латуни и бронзы	0,1—0,3
титановые**	0,05—0,15		

* Сплавы с обратимым мартенситом в структуре

** Для сплавов с обратимым мартенситом в структуре возможно повышение демпфирующей способности на порядок и более

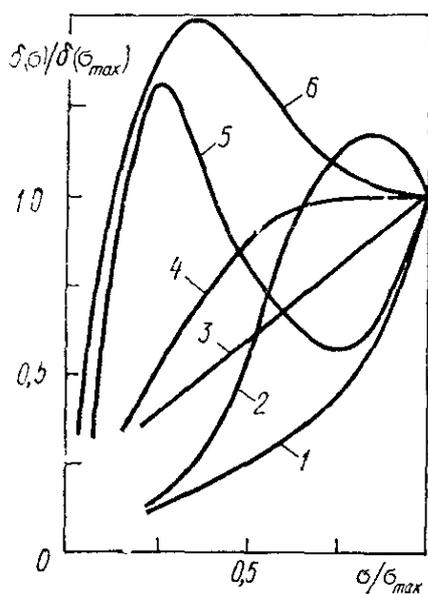


Рис. 340

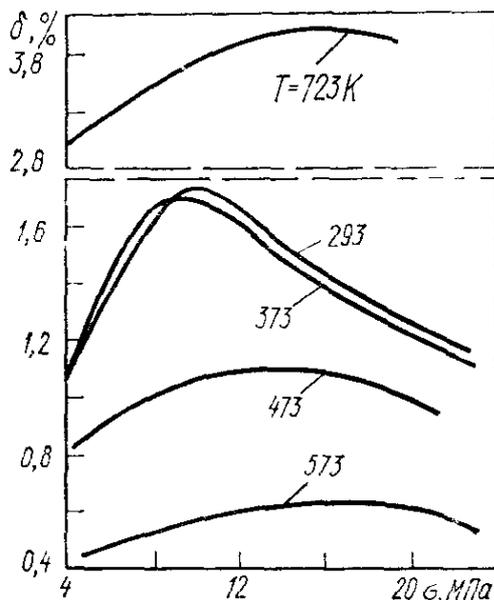


Рис. 341

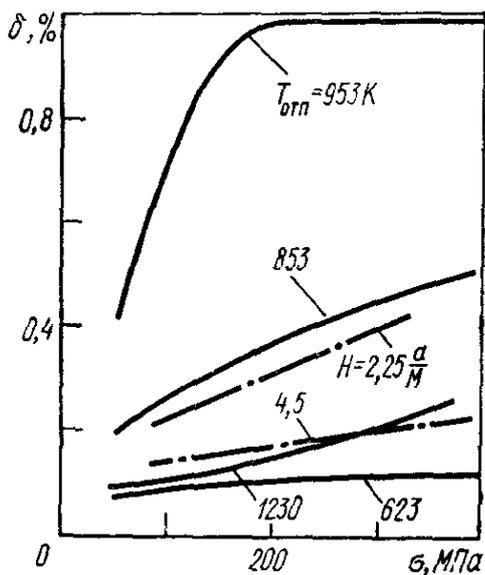


Рис. 342

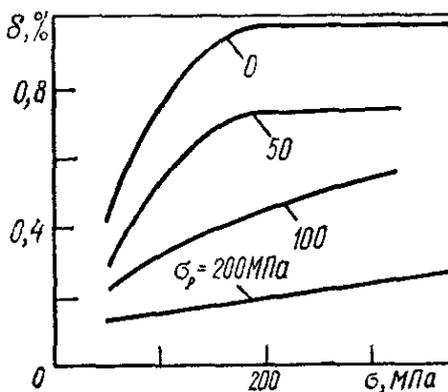


Рис. 343

Следует отметить, что результаты имеющихся исследований позволяют считать для области амплитуд циклических напряжений, не превышающих предела выносливости, демпфирующую способность металлических материалов независимой от частоты деформирования.

19.7. Критическая скорость вращения вала

Число оборотов, при котором вращающиеся валы, попадая в резонанс, становятся динамически неустойчивыми, в результате чего могут возникнуть недопустимо большие колебания, называется *критическим*. Можно показать, что таким критическим числом является число оборотов вала в секунду, соответствующее собственной частоте его поперечных колебаний.

Рассмотрим вращение диска, насаженного на вал (рис. 344, а). Центр тяжести диска C практически всегда не совпадает с осью вращения на некоторую величину e . Центробежная сила, действующая на вал при вращении диска весом Q с угловой скоростью p , будет

$$T = \frac{Q}{g} p^2 (\omega + e),$$

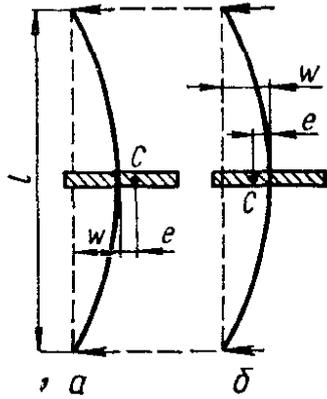


Рис. 344

где ω — прогиб вала в месте посадки диска.

Реакция вала в месте приложения силы T

$$P = c\omega.$$

Здесь c — изгибная жесткость. В случае постоянного сечения жесткостью EJ при размещении диска посередине шарнирно опертого вала $c = 48EJ/l^3$.

Из условия равновесия очевидно, что $P = T$. Подставив вместо T и P их выражения, найдем

$$\frac{Q}{g} (\omega + e) p^2 = c\omega$$

или

$$\omega = \frac{e}{\frac{c}{p^2} \frac{g}{Q} - 1}. \quad (19.60)$$

Учитывая, что собственная частота поперечных колебаний вала

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}, \quad (19.61)$$

уравнение (19.60) можно представить так:

$$\omega = \frac{e}{\frac{\omega^2}{p^2} - 1}. \quad (19.62)$$

Из (19.62) следует, что критическая скорость, при которой $\omega \rightarrow \infty$, будет

$$p_{кр} = \omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \quad (19.63)$$

При $p_{кр} > \omega$ центр тяжести диска будет располагаться между линией, соединяющей опоры, и искривленной осью вала (рис. 344, б), и уравнение для определения прогиба запишется так:

$$\frac{Q}{g} (\omega - e) p^2 = c\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{e}{1 - \frac{cg}{p^2 Q}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (19.64)$$

Из (19.64) следует, что с увеличением p прогиб $\omega \rightarrow e$, т. е. при очень больших скоростях центр тяжести диска достигает линии, соединяющей опоры, и изогнутый вал вращается вокруг центра тяжести диска C .

19.8. Свободные колебания упругих систем с несколькими степенями свободы

При рассмотрении колебаний упругих систем с несколькими степенями свободы дифференциальные уравнения движения во многих случаях можно получить, как и в случае системы с одной степенью свободы, пользуясь принципом Даламбера. Так, для системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. 345, а, состоящей из двух масс

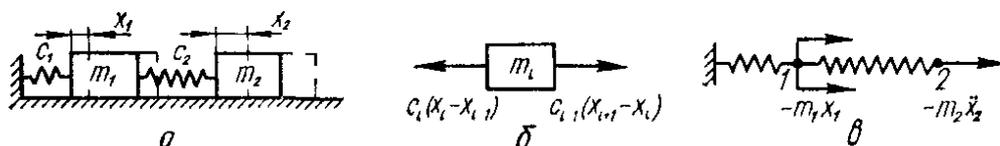


Рис. 345

m_1 и m_2 и двух пружин с жесткостями c_1 и c_2 , положив, что массы могут перемещаться при отсутствии трения только в горизонтальном направлении вдоль оси x , а также обозначив перемещение масс m_1 и m_2 соответственно через x_1 и x_2 , получим, что на массу m_1 действуют силы натяжения пружин $-c_1 x_1$ и $c_2 (x_2 - x_1)$, а также сила инерции $-m_1 \ddot{x}_1$. Уравнение движения массы m_1 будет

$$-c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 = 0,$$

или

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0. \quad (19.65)$$

Схема сил, действующих на i -ю массу, в общем случае показана на рис. 345, б.

На массу m_2 кроме силы инерции действует сила натяжения второй пружины $-c_2 (x_2 - x_1)$ и уравнение ее движения будет

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0. \quad (19.66)$$

Уравнения движения (19.65) и (19.66) можно было бы получить несколько иным способом. Действительно, можно считать, что имеется две связанные между собой пружины (рис. 345, в) которые подвергаются действию сил инерции $-m_1 \ddot{x}_1$ и $-m_2 \ddot{x}_2$, приложенных в точках 1 и 2. Тогда первая пружина нагружается силой $-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2$, а вторая — силой $m_2 \ddot{x}_2$. Перемещение первой массы при этом будет равно удлинению первой пружины:

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1},$$

а перемещение второй массы

$$x_2 = x_1 - \frac{m_1 \ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1 \dot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1} - \frac{m_2 \ddot{x}_2}{c_2}.$$

Преобразовав последние уравнения, получим систему дифференциальных уравнений, эквивалентную (19.65) и (19.66):

$$x_1 c_1 + m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0, \quad (19.67)$$

$$x_2 c_1 c_2 + c_2 (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) + c_1 m_2 x_2 = 0. \quad (19.68)$$

Наиболее общим способом составления дифференциальных уравнений является известный из теоретической механики способ, основанный на применении уравнений Лагранжа второго рода, которые при отсутствии сил сопротивления и внешних вынуждающих сил имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (19.69)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы.

Применительно к системе, приведенной на рис. 345, а, будем иметь

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2};$$

$$U = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1).$$

Уравнение (19.69) примет вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.70)$$

Уравнения, полученные из уравнений Лагранжа, оказались полностью совпадающими с таковыми, полученными на основании принципа Даламбера. Такое совпадение имеет место всегда.

Решение уравнений (19.70) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha); \\ x_2 &= \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (19.71)$$

где λ_1 , λ_2 , ω и α — постоянные, которые должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись уравнения (19.70). Подставив решения (19.71) в уравнения (19.70), найдем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) - \lambda_2 c_2 &= 0; \\ -\lambda_1 c_2 + \lambda_2 (c_2 - m_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.72)$$

В этих уравнениях неизвестными являются λ_1 , λ_2 и ω . Частоту ω определим из (19.72), полагив, что $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Это возможно тогда, когда определитель однородной системы относительно λ_1 и λ_2 будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Следовательно

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Соответственно могут быть определены две собственные частоты

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \end{aligned} \right\} (19.73)$$

Двухчастотный колебательный процесс в соответствии с (19.73) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} (19.74)$$

Первый индекс при λ показывает номер координаты, а второй — номер слагаемого в строке, или номер частоты. Из (19.72) имеем

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \quad \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2},$$

или в соответствии с принятой индексацией

$$\begin{aligned} \chi_{21} &= \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \\ \chi_{22} &= \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (19.74) могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \chi_{21} \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \chi_{22} \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} (19.75)$$

Значения λ_{11} , λ_{12} , α_1 и α_2 определяются из начальных условий. Так, полагая при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0; & x_2(0) &= 0; \\ \dot{x}_1(0) &= 0; & \dot{x}_2(0) &= v_0, \end{aligned}$$

из (19.69) находим

$$\lambda_{11} \sin \alpha_1 + \lambda_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$

$$\chi_{21} \lambda_{11} \sin \alpha_1 + \chi_{22} \lambda_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$

$$\lambda_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \lambda_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = 0;$$

$$\chi_{21} \lambda_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \chi_{22} \lambda_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 = v_0.$$

Отсюда, поскольку ω_1 , ω_2 , χ_{21} и χ_{22} известны, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \lambda_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \frac{1}{\chi_{21} - \chi_{22}}; \lambda_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \frac{1}{\chi_{22} - \chi_{21}}.$$

Подбирая начальные условия так, чтобы λ_{12} было равно нулю, получаем односторонние колебания, описываемые одной гармоникой:

$$x_{11} = \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1);$$

$$x_{21} = \chi_{21} \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1).$$

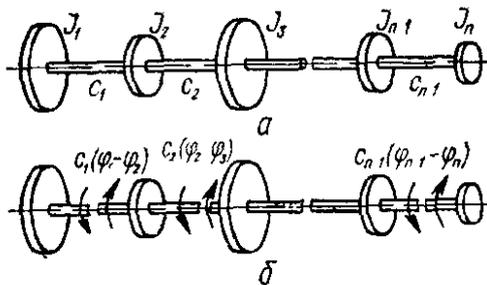


Рис. 346

Колебания, описываемые одной гармоникой, называются *первыми нормальными* колебаниями.

Очевидно, при условиях, когда $\lambda_{11} = 0$, колебания будут происходить по второй форме. Вторые нормальные колебания будут описываться формулами

$$x_{12} = \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$x_{22} = \chi_{22} \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Число нормальных форм колебаний и равное ему число собственных частот совпадают с числом степеней свободы колебательной системы.

В табл. 49 приведены собственные частоты колебаний систем с двумя степенями свободы.

Характерными колебательными системами со многими степенями свободы являются упругие валы с насаженными на них дисками (рис. 346, а).

Пусть $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$ — моменты инерции масс дисков относительно оси вала; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ — углы поворота дисков при колебаниях; $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ — жесткости при кручении различных участков вала:

$$c_l = \frac{GJ_p}{l_l},$$

где J_p — полярный момент инерции площади сечения вала; l_l — длина соответствующего участка.

Тогда величины крутящих моментов, возникающих в сечениях различных участков вала при взаимном повороте дисков, соответственно будут $c_1(\varphi_1 - \varphi_2)$; $c_2(\varphi_2 - \varphi_3)$ и т. д. (рис. 346, б). Кинетическую и потенциальную энергии системы с n степенями свободы (пренебре-

гая моментом инерции массы вращающегося вала по сравнению с моментами инерции дисков) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^l \frac{J_i \dot{\varphi}_i^2}{2}; \\ U &= \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр\ i} \varphi_i}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (19.76)$$

где $M_{кр\ i} = c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1})$.

Подставляя (19.76) в уравнения Лагранжа (19.69), получим следующую систему дифференциальных уравнений свободных крутильных колебаний вала с n степенями свободы:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_3 (\varphi_3 - \varphi_4) - c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ \dots & \\ J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - c_{n-2} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) &= 0; \\ J_n \ddot{\varphi}_n - c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.77)$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 + \dots + J_n \ddot{\varphi}_n = 0,$$

откуда

$$J_1 \dot{\varphi}_1 + J_2 \dot{\varphi}_2 + \dots + J_n \dot{\varphi}_n = \text{const},$$

т. е. момент количества движения системы вокруг оси вала при свободных колебаниях остается постоянным. Обычно момент количества движения принимают равным нулю и тем самым исключают из рассмотрения любое вращение вала как твердого тела и рассматривают только колебательное движение, вызываемое скручиванием вала.

Решение уравнений (19.77) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1 \cos(\omega t + \alpha); \\ \varphi_2 &= \lambda_2 \cos(\omega t + \alpha); \\ \dots & \\ \varphi_n &= \lambda_n \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (19.78)$$

Подставляя (19.72) в (19.71), находим

$$\left. \begin{aligned} J_1 \lambda_1 \omega^2 - c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) &= 0; \\ J_2 \lambda_2 \omega^2 + c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) - c_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0; \\ \dots & \\ J_n \lambda_n \omega^2 + c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.79)$$

Исключая из этих уравнений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, получаем уравнение частоты.

Так, в случае трех дисков (рис. 347) система уравнений (19.79) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} J_1 \lambda_1 \omega^2 - c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) &= 0; \\ J_2 \lambda_2 \omega^2 + c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) - c_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0, \\ J_3 \lambda_3 \omega^2 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.80)$$

где Ω — площадь эпилоры \bar{M}_l (или ее части); \bar{M}_k^c — ордината эпилоры \bar{M}_l , расположенная против центра тяжести площади эпилоры Ω

Для системы с одной степенью свободы на основании (19.84) будет иметь уравнение с одним неизвестным

$$\omega_1 = -m\ddot{\omega}\delta_{11}$$

Это уравнение эквивалентно известному уравнению

$$m\ddot{\omega} + c\omega = 0,$$

поскольку

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Для системы с двумя степенями свободы неизвестные функции прогиба ω_1 и ω_2 согласно (19.84) выразятся так

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -m_1\ddot{\omega}_1\delta_{11} - m_2\ddot{\omega}_2\delta_{12}; \\ \omega_2 &= -m_1\ddot{\omega}_1\delta_{21} - m_2\ddot{\omega}_2\delta_{22}.\end{aligned}$$

В общем случае при решении уравнений (19.84) функцию прогиба следует искать в виде

$$\omega_l = \lambda_l \sin(\omega t + \alpha) \quad (19.85)$$

Подставляя (19.85) в (19.84), находим

$$\left. \begin{aligned}\lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2m_2\delta_{12}\omega^2 + \dots + \lambda_nm_n\delta_{1n}\omega^2 &= 0; \\ \lambda_1m_1\delta_{21}\omega^2 + \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \dots + \lambda_nm_n\delta_{2n}\omega^2 &= 0; \\ \dots &\dots \\ \lambda_1m_1\delta_{n1}\omega^2 + \lambda_2m_2\delta_{n2}\omega^2 + \dots + \lambda_n(m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (19.86)$$

При наличии колебаний амплитуда λ_l не обращается в нуль, если определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (19.86) при λ_l , равен нулю:

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{1n}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 & \dots & m_n\delta_{2n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (19.87)$$

Записав этот определитель в развернутом виде, будем иметь

$$1 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \dots + (-1)^n a_n\omega^{2n} = 0, \quad (19.88)$$

где a_l — коэффициенты при различных степенях угловой частоты ω

Из (19.88) можно найти выражения для частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ($\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_n$).

Общее решение системы уравнений (19.86) будет

$$\omega_l = \lambda_{l1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{l2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{ln} \sin(\omega_n t + \alpha_n),$$

или

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{1n} \sin(\omega_n t + \alpha_n); \\ \omega_2 &= \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{2n} \sin(\omega_n t + \alpha_n); \\ &\dots \\ \omega_n &= \lambda_{n1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{n2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{nn} \sin(\omega_n t + \alpha_n)\end{aligned}$$

В частном случае системы с двумя степенями свободы уравнения (19 86) и (19 87) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 &= 0, \\ \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 + \lambda_2 (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) &= 0, \\ \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega^2 & m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1 \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\omega^4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \omega^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0.$$

Решив последнее уравнение, получим выражения для частот ω_1 и ω_2

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_2} \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} + \right.} \\ &+ \left. \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_2} \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} - \right.} \\ &- \left. \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}. \end{aligned}$$

19.9. Продольные и крутильные колебания стержней

При *продольных колебаниях стержня* все его частицы движутся параллельно оси. При выводе дифференциального уравнения продольных колебаний стержня с жесткостью поперечного сечения при растяжении EF рассмотрим условие динамического равновесия участка стержня длиной dz (рис. 349, а), ограниченного сечениями a и b . Обозначив перемещение сечения a через u , а сечения b через $u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, найдем продольные усилия, действующие в сечениях a и b (имея в виду, что относительное удлинение $\varepsilon = \partial u / \partial z$):

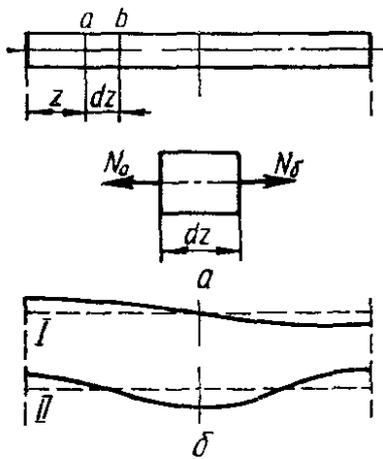


Рис. 349

$$N_a = -EF \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$N_b = EF \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \right].$$

Сила инерции элемента стержня длиной dz при распределенной массе стержня ρF (где ρ — плотность материала) и длине l будет

$$P_{\text{и}} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

Тогда, пользуясь принципом Даламбера, условие динамического равновесия элемента стержня запишем в виде

$$N_b - N_a = P_{\text{и}},$$

или

$$E\Gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

Сократив на dz и на F , представим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня в виде

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (19.89)$$

Обозначив $E/\rho = a^2$, уравнение (19.89) запишем так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (19.90)$$

Решение уравнения (19.90), следуя методу Фурье, ищем в виде

$$u = ZT, \quad (19.91)$$

где

$$Z = f_1(z); \quad T = f_2(t).$$

Продифференцировав уравнение (19.91) по z и t , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Z \frac{d^2 T}{dt^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = T \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (19.92)$$

Подставив (19.92) в (19.90), найдем

$$Z \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 Z}{dz^2},$$

или

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}.$$

Приравнивая правую и левую части последнего уравнения к одной и той же постоянной величине ω^2 , получаем два обычных уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 T; \quad (19.93)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{a^2} Z. \quad (19.94)$$

Частными решениями этих уравнений соответственно будут

$$\begin{aligned} T &= \cos \omega t; \quad \sin \omega t; \\ Z &= \cos \frac{\omega}{a} z; \quad \sin \frac{\omega}{a} z. \end{aligned} \quad (19.95)$$

Для получения общего решения уравнения (19.93), составленного из частных решений (19.95), необходимо учитывать граничные условия стержня. Так, если оба конца свободны, то должны удовлетворяться следующие условия:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=l} = 0. \quad (19.96)$$

Подстановкой решений (19.95) в (19.93) и (19.94) убеждаемся, что реше-

ние $\sin \frac{\omega}{a} z$ уравнения (19.94) следует исключить как не соответствующее первому условию (19.95).

Для обеспечения второго условия (19.96) необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0. \quad (19.97)$$

Полученное уравнение частоты будет удовлетворено при

$$\frac{\omega}{a} l = i\pi,$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$

Частоту основного тона колебаний будем иметь при $i = 1$:

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (19.98)$$

Соответствующий период колебаний

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (19.99)$$

Форма этого вида колебаний показана на рис. 349, б кривой I, для которой

$$Z_1 = C_1 \cos \frac{\omega_1 z}{a} = C_1 \cos \frac{\pi z}{l}.$$

Форма второго вида колебаний, для которого

$$\frac{\omega_2 l}{a} = 2\pi, \quad Z_2 = C_2 \cos \frac{2\pi z}{l},$$

приведена на рис. 349, б (кривая II).

Общий вид частного решения уравнения (19.90) при i -й форме колебаний будет

$$u = \cos \frac{i\pi z}{l} \left(A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (19.100)$$

Наложением подобных частных решений любое продольное колебание стержня можно представить в виде

$$u = \sum_{i=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \cos \frac{i\pi z}{l} \left(A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right), \quad (19.101)$$

где произвольные постоянные A_i и B_i должны выбираться из начальных условий.

Например, пусть при $t = 0$ $(u)_{t=0} = f(z)$; $(u')_{t=0} = f_1(z)$. Тогда из (19.101) при $t = 0$ находим

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos \frac{i\pi z}{l};$$

$$f_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\pi a}{l} B_i \cos \frac{i\pi z}{l},$$

откуда, используя метод Фурье, получаем

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz;$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_1(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz.$$

Крутильные колебания стержня (например, цилиндрического) легко охарактеризовать посредством вычерчивания волнистой линии на развернутой поверхности стержня (рис. 350, а). Обозначим угол закручивания сечения, находящегося на расстоянии z , относительно неподвижного сечения через φ , а угол закручивания сечения с координатой

$z + dz$ через $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ (рис. 350, б). Тогда относительный угол закру-

чивания элемента длиной dz будет $\partial \varphi / \partial z$, а крутящие моменты (см. раздел 8.2) в сечениях стержня с крутильной жесткостью GJ_p , ограничивающих элементарную его длину dz слева и справа, соответственно будут

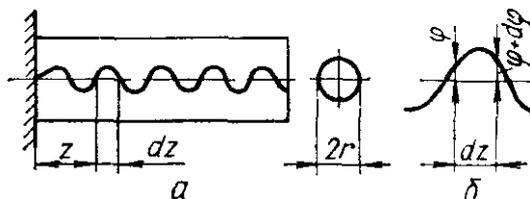


Рис. 350

$$GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ и } GJ_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \right).$$

Приравняв равнодействующую этих крутящих моментов моменту инерции вращения элемента длиной dz , равному $\rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz$, где ρ — плотность материала, получаем дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz,$$

или после сокращения на J_p и dz

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (19.102)$$

Обозначая G/ρ через a^2 , уравнение (19.102) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (19.103)$$

Решение уравнения такого вида рассмотрено выше для случая продольных колебаний стержня.

В табл. 50 приведены частотные уравнения и собственные формы продольных и крутильных колебаний стержней при различных граничных условиях.

19.10. Поперечные колебания призматических стержней

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня получим из рассмотрения динамического равновесия элемента dz (рис. 351), выделенного из произвольно закрепленного стержня.

Проецируя все силы, действующие на рассматриваемый элемент (включая в соответствии с принципом Даламбера силы инерции), на вертикальную ось w , будем иметь

$$Q - q_i dz - Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dz = 0,$$

откуда

$$q_i = -\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad (19.104)$$

где Q — поперечная сила; q_i — интенсивность сил инерции массы:

$$q_i = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (19.105)$$

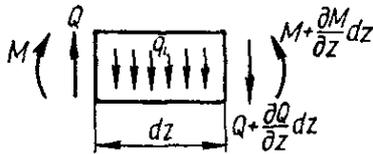
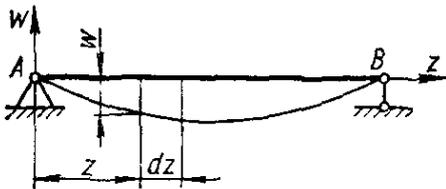


Рис. 351

(F — площадь поперечного сечения; ρ — плотность материала; w — поперечное перемещение; t — время).

Подставив (19.105) в (19.104), найдем уравнение поступательного движения элемента колеблющегося стержня:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial z} \quad (19.106)$$

Для получения уравнения вращательного движения элемента стержня в плоскости wz сложим угол поворота сечения θ , вызванный изгибом, с углом сдвига γ , обусловленным действием поперечной силы:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \theta + \gamma. \quad (19.107)$$

В силу известной связи между изгибающим моментом M и углом поворота θ (раздел 10.5)

$$M = EJ \frac{d\theta}{dz}, \quad (19.108)$$

и между поперечной силой Q и углом сдвига γ для принятой в нашем случае системы координат (раздел 12.3)

$$Q = -k\gamma FG \quad (19.109)$$

(k — коэффициент, учитывающий форму сечения стержня) выражение для Q в соответствии с (19.107) — (19.109) может быть представлено так:

$$Q = -kFG \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right). \quad (19.110)$$

Так как момент инерции вращения массы рассматриваемого элемента равен

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \int y^2 dm = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \int y^2 \rho dF dz = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dz,$$

уравнение вращательного движения элемента на основании принципа Даламбера может быть записано в виде

$$Q dz - \frac{\partial M}{\partial z} dz = -\rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dz$$

или после сокращения на dz и подстановки (19 108) — следующим образом

$$kGF \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right) + EJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0.$$

Продифференцировав это уравнение по z , получим

$$kFG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + EJ \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} - \rho J \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} = 0. \quad (19 111)$$

Подставив (19 110) в (19 106), будем иметь

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kGF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0. \quad (19 112)$$

Исключив из (19.111) и (19.112) угол θ , получим дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \quad (19.113)$$

Если пренебречь силами инерции вращения элемента и влиянием на прогиб поперечной силы, уравнение (19.113) можно представить в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (19.114)$$

Простейшим периодическим решением уравнения (19.114) является так называемое *главное колебание*, в котором функция прогиба колеблющегося стержня изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$w = \varphi(z) \sin(\omega t + \alpha). \quad (19.115)$$

Функция $\varphi(z)$, устанавливающая закон распределения максимальных отклонений точек оси стержня, называется *формой главного колебания* или *собственной формой*.

Для получения уравнений собственных форм подставим (19.115) в (19.114) и после сокращения на $\sin(\omega t + \alpha)$ получим

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} - k^4 \varphi = 0, \quad (19.116)$$

где

$$k^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}. \quad (19.117)$$

Общее решение уравнения (19.116) имеет вид

$$\varphi(z) = A \cos kz + B \sin kz + C \operatorname{ch} kz + D \operatorname{sh} kz, \quad (19.118)$$

или, будучи выражено через функции Крылова, значения которых приведены в Приложении 3, записывается так:

$$\varphi(z) = C_1 S(kz) + C_2 T(kz) + C_3 U(kz) + C_4 V(kz).$$

Здесь A, B, C, D (или C_1, C_2, C_3, C_4) — постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления стержня. Так, для шарнирно-закрепленного стержня (рис. 352) условия на концах будут

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0; & \varphi''(0) &= 0 \text{ при } z = 0; \\ \varphi(l) &= 0; & \varphi''(l) &= 0 \text{ при } z = l. \end{aligned}$$

Исходя из этих условий и из (19 118), будем иметь

$$\begin{aligned} A + C = 0, \quad B \sin kl + D \operatorname{sh} kl = 0 \\ -A + C = 0 \quad -B \sin kl + D \operatorname{sh} kl = 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A = C = D = 0, \\ B \sin kl = 0 \end{aligned}$$

Но так как $B \neq 0$ следовательно $\sin kl = 0$ Из полученного частотного уравнения находим

$$kl = i\pi \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Из равенства

$$k_i^4 = \frac{\rho \Gamma \omega_i^2}{EJ} = \frac{m \omega_i^2}{EJ}$$

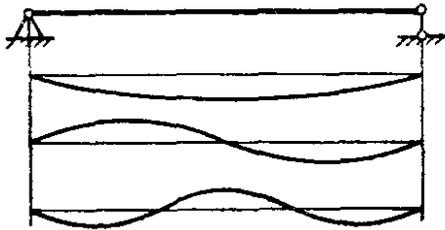


Рис 352

определим собственную круговую частоту

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (19 119)$$

период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2l^2}{i^2 \pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}}$$

и частоту колебаний (в герцах)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{i^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (19 120)$$

Уравнение собственных колебаний стержня будет

$$\varphi_i(z) = B \sin \frac{i\pi z}{l}. \quad (19 121)$$

Первые три собственные формы колебаний балки на двух опорах показаны на рис 352

Общее решение дифференциального уравнения (19 114) применительно к рассматриваемой балке на двух опорах может быть записано в виде

$$w(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \sin \frac{i\pi z}{l}, \quad (19 122)$$

где a_i и b_i должны быть подобраны из начальных условий (при $t = 0$).

Частотные уравнения и их корни, а также уравнения собственных форм поперечных колебаний стержней при различных закреплениях их концов приведены в табл 51. Корни частотных уравнений поперечных колебаний стержней на упругих опорах приведены в табл 52; стержней с сосредоточенными массами — в табл 53 В табл 54 приведены значения некоторых интегралов, встречающихся при расчетах поперечных колебаний стержней

Если колеблющийся стержень испытывает действие продольной сжимающей силы N , то дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EJ \frac{d^2 w}{dz^2} = M(z) - Nw.$$

После двойного дифференцирования и замены согласно принципу Даламбера $\frac{d^2 M}{dz^2} = -\rho I \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ получим дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня

$$EJ \frac{\partial^4 \omega}{\partial z^4} + \rho I \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0$$

Собственная форма колебаний определится в этом случае выражением

$$\varphi(z) = A \cos k_1 z + B \sin k_1 z + C \operatorname{ch} k_2 z + D \operatorname{sh} k_2 z,$$

где

$$k_1 = a \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{l^4}{a^4}}},$$

$$k_2 = a \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{l^4}{a^4}}},$$

$$a^2 = \frac{\rho I}{EJ}$$

Величина k определяется по формуле (19.117)

Выражения для собственных частот поперечных колебаний стержней нагруженных продольными силами, приведены в табл. 5⁵

19.11. Закон сохранения энергии при колебаниях

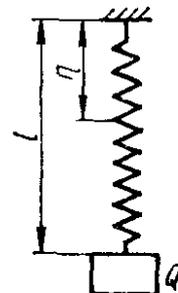
Из принципа сохранения энергии при колебаниях вытекает, что сумма кинетической и потенциальной энергии колебательной механической системы в любой момент времени остается постоянной (энергетическими потерями пренебрегаем) т.е.

$$T + U = \text{const} \quad (19.123)$$

В частности, применительно к системе с одной степенью свободы (рис. 353), для которой

$$T = \frac{Q}{2g} \dot{x}^2;$$

$$U = \frac{cx^2}{2},$$



уравнение (19.123) примет вид

$$\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \text{const}, \quad (19.124) \quad \text{Рис 353}$$

где c — жесткость пружины

Правая часть уравнения (19.124) зависит от начальных условий. Полагая, например, что при $t = 0$ перемещение $(x)_{t=0} = x_0$, а начальная скорость $(\dot{x})_{t=0} = \dot{x}_0 = 0$, получаем

$$\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}, \quad (19.125)$$

т.е. при колебаниях сумма кинетической и потенциальной энергий остается равной начальной энергии деформации пружины, растянутой на величину x_0

Из анализа уравнения (19.125) видно, что в момент, когда колеблющийся груз находится в среднем положении ($x = 0$), энергия системы определяется кинетической энергией, т. е. максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{Qx_{\max}^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2}, \quad (19.126)$$

а в момент, когда груз находится в крайнем положении (x_{\max}), энергии системы определяется потенциальной энергией, поскольку $\dot{x} = 0$, т. е. максимальная потенциальная энергия

$$U_{\max} = \frac{cx_{\max}^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (19.127)$$

Как видно,

$$T_{\max} = U_{\max}. \quad (19.128)$$

Уравнения (19.126), (19.127) могут быть использованы для определения частоты колебаний. Действительно, положив

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad \dot{x}_{\max} = x_0 \omega; \quad x_{\max} = x_0 \omega,$$

после подстановки значения \dot{x}_{\max} в (19.126) или x_{\max} в (19.127) получим

$$\frac{Qx_0^2 \omega^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (19.129)$$

что совпадает с полученной ранее формулой (19.3).

Заметим, что исходя из уравнения (19.124), выражающего закон сохранения энергии при колебаниях, легко получить дифференциальное уравнение движения колеблющегося груза. Для этого достаточно уравнение (19.124) продифференцировать по времени t и произвести соответствующее сокращение.

19.12. Некоторые приближенные методы определения собственных частот колебаний упругих систем

Способ Рэлея. Частота колебаний определяется из рассмотрения баланса энергии системы при определенных допущениях относительно деформирования колебательной упругой системы. В частности, для учета массы пружины в колебательной системе с одной степенью свободы (рис. 353) делается допущение, что масса пружины мала по сравнению с массой подвешенного груза Q , форма колебаний не зависит существенно от массы пружины и с достаточной точностью можно принять, что перемещение любого ее поперечного сечения на расстоянии η от закрепленного конца такое же, как если бы пружина была невесомой, и равно $x\eta/l$ (l — длина пружины).

При весе единицы длины пружины q кинетическая энергия элемента пружины длиной $d\eta$ будет

$$dT_n = \frac{q}{2g} \left(\frac{\eta}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta,$$

а полная кинетическая энергия всей пружины выразится интегралом

$$T_n = \int_0^l \frac{q}{2g} \left(\frac{\eta}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta = \frac{1}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{ql}{3}.$$

Это значение кинетической энергии пружины следует прибавить к кинетической энергии груза

$$T_Q = \frac{Q}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия будет

$$T = T_Q + T_n = \frac{1}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(Q + \frac{ql}{3} \right).$$

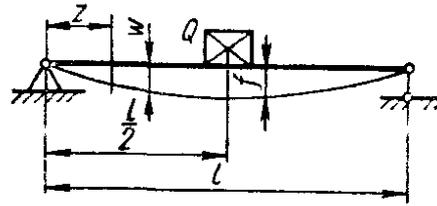


Рис. 354

Выражение потенциальной энергии останется прежним:

$$U = \frac{cx^2}{2}.$$

Теперь условие сохранения энергии колеблющейся системы может быть представлено в виде

$$\frac{1}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(Q + \frac{ql}{3} \right) + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}.$$

Сравнивая это уравнение с (19.125), находим, что для оценки влияния массы пружины на частоту собственных колебаний нужно к весу груза прибавить одну треть веса пружины. Таким образом, угловая частота определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{Q + \frac{ql}{3}}}. \quad (19.130)$$

Рассмотрим колебания груза, расположенного посередине балки (рис. 354). Следуя методу Рэля, полагаем, что вес балки ql мал сравнительно с грузом Q и что кривая прогиба балки при колебаниях имеет такую же форму, как и кривая статического прогиба. Обозначив через f перемещение груза Q при колебаниях, получим выражение поперечного перемещения любого элемента балки длиной dz и весом qdz , находящегося на расстоянии z от опоры (стр. 295):

$$w = f \frac{3zl^2 - 4z^3}{l^3}. \quad (19.131)$$

Кинетическая энергия самой балки

$$T_6 = 2 \frac{\gamma F}{2g} \int_0^{l/2} \left(\frac{df}{dt} \frac{3zl^2 - 4z^3}{l^3} \right)^2 dz = \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2,$$

где γ — удельный вес материала, F — площадь поперечного сечения балки.

Кинетическая энергия груза

$$T_r = \frac{Q}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2.$$

Полная кинетическая энергия системы будет

$$T = T_r + T_6 = \frac{Q + \frac{17}{35} \gamma F l}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2. \quad (19.132)$$

Пользуясь известным выражением для потенциальной энергии деформации изгиба балки с изгибной жесткостью поперечного сечения EJ

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EJ},$$

а также учитывая, что изгибающий момент

$$M = EJ \frac{d^2 w}{dz^2},$$

где для рассматриваемого случая согласно (19.131)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{24}{l^3} f z,$$

находим

$$U = 2 \int_0^{l/2} \frac{EJ}{2} \left(\frac{24}{3} f z \right)^2 dz = \frac{24EJ}{l^3} f^2.$$

Условие сохранения энергии при колебаниях примет вид

$$T + U = \frac{Q + \frac{17}{35} \gamma F l}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{24EJ}{l^3} f^2 = \text{const.}$$

Продифференцировав последнее уравнение по времени t , после сокращения получим

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{48EJ}{l^3} \frac{g}{Q + \frac{17}{35} \gamma F l} f = 0,$$

или, введя понятие приведенного прогиба

$$\delta_{\text{пр}} = \frac{Q + \frac{17}{35} \gamma F l}{48 EJ} l^3, \quad (19.133)$$

дифференциальное уравнение колебаний груза на балке с учетом массы последней (19.133) окончательно можно представить в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{g}{\delta_{\text{пр}}} f = 0.$$

Отсюда круговая частота колебаний груза согласно (19.129) определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{пр}}}}. \quad (19.134)$$

Из (19.133) следует, что для учета массы балки при определении частоты собственных колебаний груза, расположенного посередине балки, достаточно к весу последней прибавить $\frac{17}{35} = 0,483$ веса балки.

Величина $\frac{17}{35} \gamma F \frac{l}{g}$ называется *приведенной массой балки*.

Используем метод Рэлея для определения частоты поперечных колебаний стержня с сосредоточенными массами (рис. 348). Полагая, что все массы колеблются синфазно с одинаковой частотой, перемещение сечения балки с абсциссой z в функции времени можем описать синусоидальным законом

$$\varphi(z, t) = \omega(z) \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

где $\omega(z)$ — функция, определяющая форму колебаний.

Скорость перемещения оси балки будет

$$v(z, t) = \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = \omega \omega(z) \cos(\omega t + \alpha),$$

$$v_{\text{max}} = \omega \omega(z).$$

Максимальное значение кинетической энергии n сосредоточенных точечных масс m_1, \dots, m_n и непрерывно распределенной массы упругой балки ρF (где ρ — плотность материала; F — площадь поперечного сечения балки)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \omega^2 \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 \omega^2 dz, \quad (19.135)$$

где ω_i — амплитудное значение прогиба в месте i -й сосредоточенной массы; l — длина балки.

Максимальная потенциальная энергия деформации балки

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 \omega(z)}{dz^2} \right)^2 dz, \quad (19.136)$$

где EJ — изгибная жесткость поперечного сечения.

Приравняв правые части уравнений (19.135) и (19.136) исходя из условия $T_{\text{max}} = U_{\text{max}}$ и решая полученное уравнение относительно ω^2 , находим

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 \omega}{dz^2} \right)^2 dz}{\sum_{i=1}^n m_i \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 dz}. \quad (19.137)$$

Если действительная форма колебаний $w(z)$ известна формула (19.137) дает точные значения частоты. Обычно функция прогиба $w(z)$ заранее не известна и ее, следуя методу Рэля приходится задавать. При этом на функцию $w(z)$ накладываются граничные условия $w = 0$; $d^2w/dz^2 = 0$ в шарнирно опертых сечениях и $w = 0$; $dw/dz = 0$ в закрепленных сечениях.

В случае продольных колебаний стержня с постоянной жесткостью EF поперечного сечения при растяжении и несущего n сосредоточенных масс m_1, \dots, m_n

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EF \left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz}{\sum_{i=1}^n m_i u_i^2 + \int_0^l \rho F u^2 dz}, \quad (19.138)$$

где ρ — плотность материала; F — площадь поперечного сечения стержня; u — продольное перемещение.

В закрепленных сечениях $u(z)$ должно удовлетворять условию $u = 0$.

В случае крутильных колебаний стержня с постоянной крутильной жесткостью GJ_p поперечного сечения и насаженными n дисками (рис. 346)

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l GJ_p \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz}{\sum_{i=1}^n J_i \varphi_i^2 + \int_0^l J_p \varphi^2 dz}, \quad (19.139)$$

где J_p — полярный момент инерции площади поперечного сечения; ρ — плотность материала стержня; J_i — момент инерции массы i -го диска относительно оси стержня, φ — угол поворота сечений стержня (в закрепленных сечениях $\varphi = 0$).

Наряду с представленными формулами Рэля (19.137) — (19.139) существуют иные варианты их записи, приведенные в табл. 56. В первом варианте задаются внутренними усилиями в стержне $N(z)$, $M_{кр}(z)$, $M(z)$ и путем интегрирования соотношений

$$N = EF \frac{du}{dz}, \quad M_{кр} = GJ_p \frac{d\varphi}{dz}; \quad M = EJ \frac{d^2w}{dz^2}$$

определяют соответствующие функции $u(z)$, $\varphi(z)$ и $w(z)$. Во втором варианте задаются некоторыми распределенными нагрузками: продольной — $p(z)$, моментной — $m_{кр}(z)$ и поперечной — $q(z)$, а затем определяют вызываемые этими нагрузками соответственно перемещения $u(z)$, $\varphi(z)$ и $w(z)$. В третьем варианте задаваемая нагрузка содержит сосредоточенные силы N_j , P_j или сосредоточенные крутящие моменты $M_{кр j}$. В четвертом варианте в качестве нагрузок принимают фактическую массу стержня и имеющиеся сосредоточенные массы. Последний вариант, обладая наибольшей определенностью, дает завышенные значения частот.

Остальные варианты могут дать точные результаты, если принимаемые внутренние усилия соответствуют истинной форме колебаний, а принимаемые нагрузки (второй и третий варианты) пропорциональны истинным силам инерции при колебаниях.

Формула Граммеля. В отличие от способа Рэлея здесь предусматривается вычисление потенциальной энергии деформации U упругой системы по внутренним усилиям (N , $M_{кр}$, M), определенным от действия сил инерции масс системы, найденным, как и кинетическая энергия системы, для выбранной формы колебаний ($u(z)$, $\varphi(z)$, $\omega(z)$). Приравняв найденные выражения для T_{max} и U_{max} , находят значение собственной частоты по формулам, приведенным в табл. 57. Формула Граммеля при том же выборе формы колебаний (u , φ , ω) дает более точные результаты, чем формула Рэлея.

Формула Донкерлея. В отличие от формул Рэлея и Граммеля формула Донкерлея является наиболее простой и дает заниженные значения низшей собственной частоты колебаний. Это позволяет, используя формулы Рэлея и Донкерлея, определять интервал, в котором находится истинное значение собственной частоты.

По формуле Донкерлея квадрат собственной частоты продольных и изгибных колебаний

$$\omega^2 = 1 : \left[\int_0^l \rho F \delta(z, z) dz + \sum m_i \delta(z_i, z_i) \right], \quad (19.140)$$

а крутильных колебаний

$$\omega^2 = 1 : \left[\int_0^l \rho J_p \delta(z, z) dz + \sum J_i \delta(z_i, z_i) \right], \quad (19.141)$$

где $\delta(z, z)$ — функция влияния, т. е. продольное (u), поперечное (w) или угловое (φ) перемещение сечения с абсциссой z под действием единичной продольной, поперечной силы или единичного крутящего момента соответственно при продольных, изгибных или крутильных колебаниях.

Способ Ритца является дальнейшим развитием способа Рэлея. В уравнение упругой линии колеблющейся системы вводятся некоторые параметры, величина которых подбирается таким образом, чтобы частота основного тона была минимальной. Так, при поперечных колебаниях стержня функция прогиба выбирается в виде ряда

$$w(z) = a_1 \omega_1(z) + a_2 \omega_2(z) + \dots, \quad (19.142)$$

каждый член которого должен удовлетворять граничным условиям для перемещений, а коэффициенты ряда a_1, a_2, a_3, \dots должны выбираться из условия минимума частоты

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l \rho F w^2 dz} = 0. \quad (19.143)$$

Продифференцировав это выражение и разделив результат на $\int_0^l \rho F \omega^2 dz$, с учетом (19.137) для случая $m_l = 0$ получим

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l \left[EJ \left(\frac{d^2 \omega}{dz^2} \right)^2 - \omega^2 \rho F \omega^2 \right] dz = 0. \quad (19.144)$$

Таких уравнений будет столько, сколько членов в ряде (19.142). Полученная система уравнений будет однородна относительно коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Приравняв определитель этой системы нулю, получим частотное уравнение. Этот метод позволяет найти не только низшую частоту собственных колебаний, но и значения высших частот, хотя и с меньшей точностью.

Способ Бубнова—Галеркина. Применим этот способ при решении, например, задачи о поперечных колебаниях стержня переменного сечения, описываемых дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ(z) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] - \rho F(z) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0, \quad (19.145)$$

где ρ, E — плотность и модуль упругости материала; $F(z), J(z)$ — площадь и осевой момент инерции площади поперечного сечения стержня.

Решение этого уравнения можно найти с помощью подстановки

$$\omega = Z(z) T(t),$$

использовав которую, получим дифференциальное уравнение для определения функции прогиба $Z(z)$:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EJ(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} \right] - \rho F(z) \omega^2 Z = 0. \quad (19.146)$$

Согласно способу Бубнова — Галеркина действительная кривая прогиба, выражаемая функцией $Z(z)$, заменяется некоторой приближенной функцией $\psi(z)$, удовлетворяющей граничным (геометрическим и статическим) условиям задачи. Функция $\psi(z)$ должна быть ортогональна исходному дифференциальному оператору. С этой целью образуем интеграл

$$\int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[EJ(z) \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} \right] - \rho F(z) \omega^2 \psi(z) \right\} \psi(z) dz = 0. \quad (19.147)$$

Отсюда, в частности, может быть получена формула Рэлея

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l [EJ(z) \psi''(z)]' \psi(z) dz}{\int_0^l \rho F(z) \psi^2(z) dz}. \quad (19.148)$$

Если представить $\psi(z)$ в виде ряда

$$\psi(z) = a_1 \psi_1(z) + a_2 \psi_2(z) + \dots \quad (19.14)$$

и рассмотреть каждое из слагаемых $\psi_l(z)$ как возможное перемещение, то вместо (19.147) получим соотношение, выражающее равенство нулю виртуальной работы.

$$\int_0^l \{ [EJ(z) \psi''(z)]' - \rho F(z) \omega^2 \psi(z) \} \psi_l(z) dz = 0. \quad (19.150)$$

Таких равенств можно записать столько, сколько слагаемых $\psi_l(z)$ принято для $\psi(z)$ выражение (19.149).

Каждое из уравнений (19.150) однородно и содержит неизвестные коэффициенты a_1, a_2, a_3, \dots в первой степени.

Приравняв нулю определитель системы уравнений (19.150), получим частотное уравнение, из которого может быть определена угловая частота собственных колебаний.

19.13. Общий метод расчета колебаний механических систем с учетом рассеяния энергии

Любая реальная механическая колебательная система обладает источниками поглощения энергии колебаний. За счет применения соответствующих материалов и конструкции узлов сочленения механических систем их диссипативные свойства могут существенно изменяться, а следовательно, может изменяться и степень динамической напряженности отдельных элементов конструкции, особенно при попадании этих элементов в резонанс. В связи с этим большой практический интерес представляет разработка эффективных методов расчета колебаний механических систем с учетом рассеяния энергии в системе с целью оценки уровня динамической напряженности в резонансной и в околорезонансной зонах. Здесь возникают сложности как в описании физически обоснованных гистерезисных зависимостей между внутренними силовыми факторами и соответствующими деформациями (перемещениями), так и в решении получаемых в этом случае нелинейных дифференциальных уравнений колебаний.

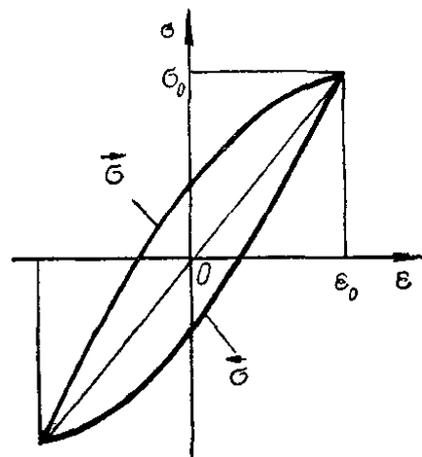


Рис. 355

Из анализа возможных гистерезисных зависимостей (19.54), описывающих диссипативные свойства материала, следует, что в обобщенном виде напряжения можно представить как сумму упругой и неупругой составляющих, определяющих нелинейность и неоднозначность уравнений восходящей (\rightarrow) и нисходящей (\leftarrow) ветвей петли гистерезиса (рис. 355):

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\epsilon) = \sigma_y + \overleftrightarrow{\sigma}_s = E\epsilon + \overleftrightarrow{E}f(\epsilon, \epsilon_0) \quad (19.151)$$

Для нормальных напряжений;

$$\overleftrightarrow{\tau}(\gamma) = \tau_y + \overleftrightarrow{\tau}_s = G\gamma + \overleftrightarrow{G}f(\gamma, \gamma_0) \quad (19.152)$$

для касательных напряжений. При этом разность интегралов от неупругой составляющей восходящей и нисходящей ветвей в пределах цикла деформирования материала с амплитудой деформации ϵ_0 определяет площадь петли гистерезиса

$$\Delta W(\epsilon_0) = E \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \vec{f}(\epsilon, \epsilon_0) d\epsilon - E \int_{\epsilon_0}^{-\epsilon_0} \overleftarrow{f}(\epsilon, \epsilon_0) d\epsilon, \quad (19.153)$$

которая может быть выражена согласно (19.55), (19.57) через логарифмический декремент колебаний:

$$\Delta W(\epsilon_0) \approx \Psi(\epsilon_0) W(\epsilon_0) = E\delta(\epsilon_0) \epsilon_0^2. \quad (19.154)$$

Аналогично зависимостям (19.151), (19.152) можно в обобщенном виде записать и внутренние усилия (продольную силу \vec{N} , крутящий $\vec{M}_{кр}$ или изгибающий \vec{M} моменты) как функции соответствующих перемещений (продольного u , угла закручивания φ и поперечного ω) с учетом несовершенной упругости материала деформируемого стержня:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= N_y + \vec{N}_s = EF \frac{\partial u}{\partial z} + \int_F \vec{\sigma}_s dF; \\ \vec{M}_{кр} &= M_{крy} + \vec{M}_{крs} = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \int_F \vec{\tau}_s \rho dF; \\ \vec{M} &= M_y + \vec{M}_s = EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \int_F \vec{\sigma}_s y dF, \end{aligned} \quad (19.155)$$

где EF , GJ_p , EJ — жесткость поперечного сечения стержня соответственно при растяжении, кручении и изгибе; z — координата, направленная вдоль оси стержня.

Такого рода зависимостями можно формально описать несовершенную упругость колебательной системы, обусловленную не только рассеянием энергии в материале ее деформируемых элементов, но и относительным перемещением контактирующих поверхностей различного рода сочленений (так называемый *конструкционный гистерезис*) и сопротивлением обтекающей систему среды, определяющим аэрогидродинамическое демпфирование колебаний, а также их совместным проявлением.

Рассмотрим расчет колебаний механической системы, обладающей какой-либо несовершенной упругостью, на наиболее простом примере крутильных колебаний диска с моментом инерции массы J , насаженного на конце вертикального стержня с жесткостью поперечного сечения на кручение GJ_p и длиной l (рис. 334).

Пользуясь принципом Даламбера и пренебрегая силами инерции массы стержня, получаем уравнение свободных колебаний диска, приравняв крутящий момент в стержне $\vec{M}_{кр}$ (19.155), при учете, что $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi}{l}$, моменту сил инерции массы диска $J \frac{d^2\varphi}{dt^2}$:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c[\varphi + \epsilon \Phi(\varphi)] = 0, \quad (19.156)$$

где c — жесткость стержня при кручении; $c = \frac{GJ_p}{l}$; $\varepsilon\Phi = \frac{1}{c} \frac{\vec{M}_{кр}}{J}$. Здесь введение множителем малого параметра ε отражает малость рассматриваемой нелинейности.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний диска под действием внешнего периодического момента $M = M_0 \sin pt$ в резонансной зоне можно записать в виде

$$J \frac{d^2\Phi}{dt^2} + c [\varphi + \varepsilon\Phi(\varphi)] = \varepsilon M_0 \sin pt \quad (19.157)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = \varepsilon m_0 \sin pt - \varepsilon\Phi(\varphi), \quad (19.158)$$

где $m_0 = M_0/J$; ω — собственная частота колебаний;

$$\omega^2 = \frac{GJ_p}{Jl}; \quad \vec{\Phi}(\varphi) = \omega^2 \vec{\Phi}_s(\varphi) = \frac{\vec{M}_{кр}}{J}; \quad t — \text{время.} \quad (19.159)$$

Здесь внешний момент M имеет тот же порядок малости, что и несовершенная упругость стержня, о чем свидетельствует стоящий множителем малый параметр ε .

В соответствии с асимптотическими методами решения слабонелинейных дифференциальных уравнений общее решение уравнения (19.158) ищем в виде следующего разложения по степеням малого параметра:

$$\varphi = a \cos \tau + \varepsilon u_1(a, \tau) + \varepsilon^2 u_2(a, \tau) + \dots, \quad (19.160)$$

где $\tau = pt + \psi$; p — частота вынуждающей силы; ψ — сдвиг фаз.

Амплитуду колебаний a и фазу τ определяем из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots; \\ \frac{d\tau}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (19.161)$$

Следует заметить, что для рассматриваемых слабонелинейных диссипативных систем оказывается достаточным решение задачи в первом приближении. Поэтому в дальнейшем ограничимся членами, содержащими малый параметр ε в первой степени.

Для обеспечения однозначности определения искоемых функций $A_1(a)$ и $B_1(a)$ будем полагать, что члены ряда (19.160) u_i не содержат главных гармоник и являются периодическими функциями угла τ с периодом 2π , т. е.

$$\int_0^{2\pi} u_i(a, \tau) \cos \tau d\tau = \int_0^{2\pi} u_i(a, \tau) \sin \tau d\tau = 0.$$

Взяв вторую производную от выражения угла закручивания согласно (19.160) с учетом (19.161), подставив ее в левую часть уравнения (19.158) с учетом (19.161) и затем в полученном выражении собрав члены при ε в первой степени и приравняв их правой части уравнения

(19.158), содержащего также малый параметр в первой степени, получим

$$-2\omega A_1 \sin \tau - 2\omega a B_1 \cos \tau + \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + u_1 \right) = m_0 \cos pt - \overleftarrow{\Phi}(\varphi). \quad (19.162)$$

Умножая уравнение (19.162) на $\sin \tau d\tau$ и $\cos \tau d\tau$ и интегрируя от 0 до 2π , получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + u_1 \right) \sin \tau d\tau &= 2\pi\omega A_1 + \\ + m_0 \int_0^{2\pi} \cos pt \sin \tau d\tau - \int_0^{2\pi} \overleftarrow{\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau; \end{aligned} \quad (19.163)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - u_1 \right) \cos \tau d\tau &= 2\pi\omega B_1 + \\ + m_0 \int_0^{2\pi} \cos pt \cos \tau d\tau - \int_0^{2\pi} \overleftarrow{\Phi}(\varphi) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (19.164)$$

Поскольку при установившихся вынужденных колебаниях в резонансе $d\psi/dt = 0$, т. е. $\psi = \text{const}$, то обозначая $\theta = pt$, имеем

$$\begin{aligned} \tau &= \theta + \psi; \quad d\tau = d\theta; \\ \int_0^{2\pi} \cos pt \cos \tau d\tau &= \cos \psi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \sin \psi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi \cos \psi; \\ \int_0^{2\pi} \cos pt \sin \tau d\tau &= \cos \psi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta + \sin \psi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \sin \psi. \end{aligned}$$

Учитывая также, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + u_1 \right) \sin \tau d\tau &= 0; \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - u_1 \right) \cos \tau d\tau &= 0, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \sin \tau d\tau = - \int_0^{2\pi} u_1 \sin \tau d\tau = 0,$$

Из уравнений (19.163) и (19.164) соответственно находим

$$A_1 = \frac{1}{2\pi\omega} \left[\int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau - \pi m_0 \sin \psi \right]; \quad (19.165)$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi\omega} \left[\int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\Phi}(\varphi) \cos \tau d\tau - \pi m_0 \cos \psi \right]. \quad (19.166)$$

Подставляя полученные выражения A_1 и B_1 в (19.161), для случая установившихся колебаний $da/dt=0$; $d\tau/dt = \rho$ будем иметь выражение для синуса сдвига фаз

$$\sin \psi = \frac{1}{\pi \varepsilon m_0} \int_0^{2\pi} \varepsilon \overleftrightarrow{\Phi}(\psi) \sin \tau d\tau \quad (19.167)$$

и выражение для амплитудно-частотной зависимости, или *резонансной кривой*:

$$\rho = \omega - \frac{\varepsilon m_0 \pi \cos \psi - \int_0^{2\pi} \varepsilon \overleftrightarrow{\Phi}(\psi) \cos \tau d\tau}{2\pi a \omega}. \quad (19.168)$$

Из (19.167) можно найти косинус сдвига фаз:

$$\cos \psi = \pm \frac{1}{\pi \varepsilon m_0} \sqrt{(\varepsilon m_0)^2 \pi^2 - \left[\int_0^{2\pi} \varepsilon \overleftrightarrow{\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau \right]^2}. \quad (19.169)$$

Тогда, подставляя (19.169) в (19.168), получаем уравнение резонансной кривой

$$\begin{aligned} \rho &= \omega - \frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} \varepsilon \overleftrightarrow{\Phi}(\varphi) \cos \tau d\tau \mp \\ &\mp \frac{1}{2\pi a \omega} \sqrt{\pi^2 (\varepsilon m_0)^2 - \left[\int_0^{2\pi} \varepsilon \overleftrightarrow{\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau \right]^2}. \end{aligned} \quad (19.170)$$

Интеграл $\int_0^{2\pi} \varepsilon \overleftrightarrow{\Phi}(\varphi) \cos \tau d\tau$ определяет сдвиг $\Delta\omega(a)$ резонансной час-

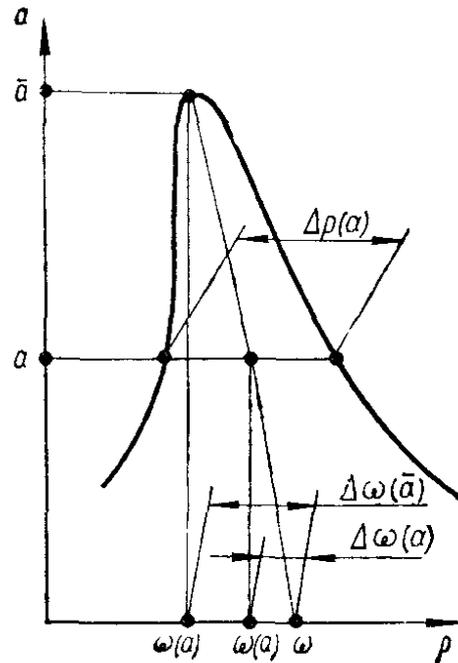


Рис. 356

тоги относительно собственной частоты колебаний системы ω (рис. 356):

$$\int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\varepsilon\Phi}(\varphi) \cos \tau d\tau = 2\pi a \omega \cdot \Delta\omega(a).$$

Следовательно, резонансная частота системы $\omega(a)$ при данной амплитуде ее колебаний будет

$$\omega(a) = \omega + \Delta\omega(a) = \omega - \frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\varepsilon\Phi}(\varphi) \cos \tau d\tau. \quad (19.171)$$

Интеграл $\int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\varepsilon\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau$ характеризует величину необратимо поглощенной энергии $\Delta W(a)$ в системе за цикл ее деформирования с амплитудой a :

$$aJ \int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\varepsilon\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau = \frac{\Delta W(a)}{aJ}. \quad (19.172)$$

Учитывая, что $\Delta W(a) \approx 2\delta(a) W(a)$, где значение потенциальной энергии деформации системы $W(a)$ можно определить через максимальную кинетическую энергию

$$W(a) = \frac{1}{2} J a^2 \omega^2(a) \approx \frac{1}{2} J a^2 \omega^2, \quad (19.173)$$

интеграл (19.172) можно выразить через логарифмический декремент колебаний

$$\int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\varepsilon\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau = a \omega^2(a) \delta(a) \approx a \omega^2 \delta(a), \quad (19.174)$$

и, как видно из (19.170), значение интеграла или декремента определяет при заданной амплитуде вынуждающего момента m_0 ширину пика $\Delta\rho(a)$ резонансной кривой (рис. 356) на данном уровне амплитуды колебаний a :

$$\begin{aligned} \Delta\rho(a) &= \frac{1}{\pi a \omega^2} \sqrt{\pi^2 (\varepsilon m_0)^2 - \left[\int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\varepsilon\Phi}(\varphi) \sin \tau d\tau \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{m_0}{a\omega} \right)^2 - \left(\frac{\delta(a)}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\omega(a)}{\omega} \right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{m_0}{a\omega} \right)^2 - \left(\frac{\delta(a)}{\pi} \right)^2} \omega^2. \quad (19.175) \end{aligned}$$

С учетом (19.171), (19.174) формулы (19.169) и (19.170) можно представить в виде

$$\cos \psi = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 (\varepsilon m_0)^2 - [\omega^2 a \delta(a)]^2}}{\pi \varepsilon m_0}; \quad (19.176)$$

$$\rho = \omega(a) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon m_0}{a\omega} \right)^2 - \left(\frac{\delta(a)}{\pi} \right)^2} \omega^2. \quad (19.177)$$

При несовершенной упругости колебательной системы, обусловленной гистерезисным рассеянием энергии в материале стержня, описываемым гистерезисными зависимостями в виде (19.54) при $\sigma \equiv \tau$ и $\epsilon \equiv \gamma$, или

иной функционал $\overleftrightarrow{\epsilon\Phi}(\varphi)$ (19.159) можно (с учетом того, что $\gamma = \rho \frac{q}{l}$, $\varphi = a \cos \tau$) представить в виде

$$\overleftrightarrow{\epsilon\Phi}(\varphi) = \frac{1}{J} \int_F \overleftrightarrow{\tau_s} \rho dF = \frac{G}{J} \sum \kappa_n \left(\frac{a}{l}\right)^n [(1 \pm \cos \tau)^n - 2^{n-1}] \int_F \rho^{n-1} dF. \quad (19.178)$$

Подставляя (19.178) в (19.171), (19.174) и выражая параметр κ_n согласно (19.59) через параметры амплитудной зависимости логарифмического декремента материала (19.58), где $\epsilon_0 \equiv \gamma_0$, получаем следующие выражения для $\omega(a)$ и $\delta(a)$:

$$\omega(a) = \omega \left[1 - \sum_n \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n} (n-1) [\Gamma(n)]^2} k_n \left(\frac{a}{l}\right)^{n-1} \right] \frac{\int_F \rho^{n+1} dF}{\int_F \rho^2 dF}; \quad (19.179)$$

$$\delta(a) = \frac{2^{n+1} (n-1)}{n+1}, \quad (19.180)$$

где Γ — гамма-функция.

Выражения (19.176) и (19.177) являются окончательными формулами, пользуясь которыми можно построить резонансные амплитудно-частотную и фазо-частотную зависимости вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы как крутильных, так и продольных и изгибных. В случае продольных колебаний груза массой M , подвешенного к стержню, под m_0 следует понимать амплитуду продольной внешней силы $P = P_0 \sin pt$, приходящуюся на единицу массы груза (т. е. $m_0 = P_0/M$) и приложенную к этому грузу. Также и в случае изгибных колебаний безмассового стержня с точечным грузом массой M , к которому приложена внешняя поперечная сила $Q = Q_0 \sin pt$, $m_0 = Q_0/M$. Под a понимается амплитуда соответственно продольного и поперечного перемещений груза.

Максимальная резонансная амплитуда \bar{a} определяется из уравнения, получаемого из условия равенства нулю подкоренного выражения

$$\bar{a} = \frac{\pi m_0}{\omega^2 \delta(\bar{a})}. \quad (19.181)$$

В качестве другого примера рассмотрим расчет вынужденных поперечных колебаний балки постоянного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение установившихся колебаний балки с учетом несовершенной упругости колебательной системы может быть представлено следующим образом

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\overleftrightarrow{\epsilon\Phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right] = \epsilon q(z) \cos pt, \quad (19.182)$$

где $w(z, t)$ — функция деформации прогиба; $\epsilon q(z)$ — амплитуда

вынуждающей распределенной силы; m — масса единицы длины; p — круговая частота внешней вынуждающей силы; z — координата, направленная вдоль оси стержня; t — время; ε — малый параметр; $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\varepsilon \overleftarrow{\Phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right]$ — некоторый функционал, характеризующий несовершенную упругость колебательной системы такого же порядка малости, как и внешняя вынуждающая сила; при этом функционал $\overleftarrow{\Phi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$ представляет собой момент сил неупругого сопротивления (см. (19.155)).

Для решения рассматриваемого слабонелинейного уравнения (19.182), содержащего малый параметр ε , также целесообразно применить асимптотические методы нелинейной механики. Следуя этим методам, функцию деформации $w(z, t)$, квадрат частоты колебаний p и сдвиг фаз $\bar{\psi}$ представим в виде следующих асимптотических разложений:

$$w(z, t) = a\varphi(z) \cos(pt + \bar{\psi}) + \varepsilon u_1(z, t) + \varepsilon^2 u_2(z, t) + \dots \quad (19.183)$$

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon \Delta_1 + \varepsilon^2 \Delta_2 + \dots \quad (19.184)$$

$$\bar{\psi} = \psi + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (19.185)$$

При этом предполагаем, что $u_1(z, t)$; $u_2(z, t)$ и т. д. не содержат главных гармоник.

После подстановки разложений (19.183) — (19.185) в уравнение (19.182) и приравнивания множителей, стоящих при различных степенях малого параметра ε , уравнение (19.182) распадается на систему уравнений

$$EJ \frac{d^4 \varphi(z)}{dz^4} - m\omega^2 \varphi(z) = 0; \quad (19.186)$$

$$EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + m\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - m\Delta_1 a\varphi(z) \cos \theta - q \cos(\theta - \psi) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\overleftarrow{\Phi}(a\varphi''(z) \cos \theta) \right] = 0; \quad (19.187)$$

.....

Здесь $\theta = pt + \bar{\psi}$.

Для определения функции деформации $\varphi(z)$ и собственной частоты колебаний ω в нулевом приближении, т. е. без учета рассеяния энергии в колебательной системе, необходимо решить уравнение (19.186), представляющее собой не что иное, как уравнение (19.182) при $\varepsilon = 0$, т. е. уравнение (19.114), где $\rho F = m$ и решение которого известно (19.118).

Для решения задачи об учете демпфирования в первом приближении рассмотрим уравнение (19.187). Пользуясь принципом энергетического баланса, согласно которому изменение энергии колеблющейся системы за цикл равно нулю, умножим уравнение (19.187) один раз на $\varphi(z) \cos \theta \, dz d\theta$, а второй раз на $\varphi(z) \sin \theta \, dz d\theta$. Полученные уравнения проинтегрируем по длине стержня l и по циклу колебаний. Ин-

тегрируя по частям по z и θ и учитывая при этом граничные условия, а также то, что функция $u_1(z, \theta)$ не содержит главной гармоники, получаем следующую систему четырех уравнений:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left[EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + m\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right] \varphi(z) \cos \theta dz d\theta = 0; \quad (19.188)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ -am\Delta_1 \varphi(z) \cos \theta - q \cos(\theta - \psi) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\overset{\rightarrow}{\Phi}(a\varphi''(z) \cos \theta)] \right\} \varphi(z) \cos \theta dz d\theta = 0; \quad (19.189)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left[EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + m\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right] \varphi(z) \sin \theta dz d\theta = 0; \quad (19.190)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ -am\Delta_1 \varphi(z) \cos \theta - q \cos(\theta - \psi) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\overset{\rightarrow}{\Phi}(a\varphi''(z) \cos \theta)] \right\} \varphi(z) \sin \theta dz d\theta = 0. \quad (19.191)$$

Решая уравнения (19.188) — (19.191) относительно искомым величин $\sin \psi$ и Δ_1 , находим

$$\sin \psi = \frac{\int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\overset{\rightarrow}{\Phi}(a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \sin \theta dz d\theta}{\pi \int_0^l \varepsilon q \varphi(z) dz}; \quad (19.192)$$

$$\Delta_1 = \frac{\int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\overset{\rightarrow}{\Phi}(a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \cos \theta dz d\theta - \pi \cos \psi \int_0^l \varepsilon q \varphi(z) dz}{\pi am \int_0^l \varphi^2(z) dz}. \quad (19.193)$$

Подставляя в (19.184) значение Δ_1 и выражая $\cos \psi$ через значение $\sin \psi$, получаем амплитудно-частотную зависимость первого приближения

$$\begin{aligned}
 p^2 = \omega^2 + & \frac{\int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\varepsilon \overleftrightarrow{\Phi} (a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \cos \theta dz d\theta}{\pi a m \int_0^l \varphi^2(z) dz} \mp \frac{1}{\pi a m \int_0^l \varphi^2(z) dz} \times \\
 & \times \sqrt{\left[\pi \int_0^l \varepsilon \eta \varphi(z) dz \right]^2 - \left\{ \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\varepsilon \overleftrightarrow{\Phi} (a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \sin \theta dz d\theta \right\}^2}.
 \end{aligned} \tag{19.194}$$

Здесь первые два члена определяют квадрат резонансной частоты колебаний системы $\omega^2(a)$ с учетом ее несовершенной упругости при данной амплитуде колебаний a :

$$\omega^2(a) = \omega^2 + \frac{\int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\varepsilon \overleftrightarrow{\Phi} (a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \cos \theta dz d\theta}{\pi a m \int_0^l \varphi^2(z) dz}, \tag{19.195}$$

а двойной интеграл в подкоренном выражении пропорционален энергии, рассеиваемой в стержне за цикл колебаний с амплитудой a :

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\varepsilon \overleftrightarrow{\Phi} (a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \cos \theta dz d\theta = \frac{\Delta W'(a)}{a}. \tag{19.196}$$

Учитывая, что $\Delta W(a) = 2\delta(a) W(a)$, где

$$W(a) = \frac{1}{2} a^2 \omega^2(a) m \int_0^l \varphi^2(z) dz \approx \frac{1}{2} a^2 \omega^2 m \int_0^l \varphi^2(z) dz, \tag{19.197}$$

указанный двойной интеграл можно выразить через значение логарифмического декремента колебаний

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\varepsilon \overleftrightarrow{\Phi} (a\varphi''(z) \cos \theta)] \varphi(z) \cos \theta dz d\theta = \delta(a) \omega^2(a) a m \int_0^l \varphi^2(z) dz. \tag{19.198}$$

С учетом (19.198) зависимость (19.194) примет вид

$$p^2 = \omega^2(a) \mp \omega \sqrt{\left[\frac{\int_0^l q\varphi(z) dz}{a\omega m \int_0^l \varphi^2(z) dz} \right]^2 - \left(\frac{\delta(a)}{\pi} \right)^2} \tag{19.199}$$

т. е., учитывая, что $p^2 - \omega^2(l) \approx [p - \omega(a)] 2\omega$,

$$p = \omega(a) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\int_0^l q\varphi(z) dz}{a\omega m \int_0^l \varphi^2(z) dz} \right]^2 - \left(\frac{\delta(l)}{\pi} \right)^2 \omega^2} \quad (19.20)$$

Максимальная резонансная амплитуда \bar{a} (рис. 356) при данной амплитуде возбуждения q определяется из уравнения

$$\bar{a} = \frac{\pi \int_0^l q\varphi(z) dz}{\omega^2 \delta(\bar{a}) m \int_0^l \varphi^2(z) dz} \quad (19.20')$$

Для несовершенной упругости колебательной системы, обусловленной рассеянием энергии в материале балки и описываемой гистерезисными зависимостями (19.54), нелинейный функционал $\overleftrightarrow{\varepsilon} \Phi(a\varphi''(z) \cos \theta)$ можно (учитывая, что $\varepsilon = y \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}$; $\omega = a\varphi(z) \cos \theta$) представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\varepsilon} \Phi(a\varphi''(z) \cos \theta) &= \int_F \overleftrightarrow{\sigma}_s u dF = \mp E \sum_n k_n a^n \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^n [(1 \pm \cos \theta)^n - \\ &\quad - 2^{n-1}] \int_F y^{n+1} dF. \end{aligned} \quad (19.202)$$

Подставляя (19.202) в (19.195) и (19.198) и учитывая (19.59), а также то, что $\omega^2(a) - \omega^2 \approx [\omega(a) - \omega] 2\omega$ и $\omega^2 m \int_0^l \varphi^2(z) dz = EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)^2 dz$, получаем выражения для $\omega(a)$ и $\delta(a)$:

$$\begin{aligned} \omega(a) &= \omega \left[1 - \sum_n \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n} (n-1) [\Gamma(n)]^2} k_n a^{n-1} \times \right. \\ &\quad \times \frac{\int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^n dz \int_F y^{n+1} dF}{\int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right)^2 dz \int_F y^2 dF} \left. \right] \quad (19.203) \end{aligned}$$

$$\delta(a) = \sum_n k_n a^{n-1} \frac{\int_0^l \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)^n dz \int_F y^{n+1} dF}{\int_0^l \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)^2 dz \int_F y^2 dF} \quad (19.204)$$

Следует отметить, что выражения (19.199) — (19.201) пригодны и в случае рассмотрения продольных и крутильных колебаний стержня постоянного поперечного сечения. При продольных колебаниях под $q(z)$ понимается амплитуда продольной распределенной внешней нагрузки, а при крутильных — амплитуда распределенного внешнего крутящего момента $m_{кр}(z)$. В последнем случае под распределенной массой стержня m в формулах следует понимать распределенный момент инерции массы стержня относительно его продольной оси, равный ρJ_p , где ρ — плотность материала, J_p — полярный момент инерции площади поперечного сечения стержня.

Полученные уравнения (19.177), как и (19.199), (19.200), показывают, что для построения амплитудно-частотной характеристики колебательной системы с учетом ее несовершенной упругости, независимо от физической природы последней, необходимо знать не только интегральную характеристику ее диссипативных свойств — логарифмический декремент колебаний $\delta(a)$, но и интегральную характеристику ее нелинейной упругости — резонансную частоту $\omega(a)$, причем обе характеристики выступают как функции амплитуды колебаний. Это усложняет решение задачи, хотя, как видно из определений указанных характеристик, не исключена возможность их аналитической связи, так как обе определяются через один и тот же функционал, характеризующий несовершенную упругость колебательной системы.

Так, в случае несовершенной упругости, обусловленной рассеянием энергии в материале и описываемой гистерезисными зависимостями между напряжением и деформацией в виде (19.54), как видно из (19.179), (19.180) или (19.203), (19.204), эти характеристики как при крутильных, так и изгибных колебаниях выражаются через параметры (k_n, n) амплитудной зависимости логарифмического декремента материала (19.58).

В общем случае колебаний деформируемого тела при известных собственной частоте ω и распределении деформаций ε по объему V тела, определяемых из решения задачи в нулевом приближении, т. е. без учета рассеяния энергии, логарифмический декремент $\delta(a)$ и резонансная частота $\omega(a)$ тела могут быть выражены через указанные параметры амплитудной зависимости логарифмического декремента материала следующим образом:

$$\delta(a) = \frac{\int_V \delta(\varepsilon_0) \varepsilon_0^2 dV}{\int_V \varepsilon_0^2 dV} = \sum_n k_n \frac{\int_V \varepsilon_0^{n+1} dV}{\int_V \varepsilon_0^2 dV}; \quad (19.205)$$

$$\omega(a) = \omega \left[1 - \sum_n k_n d_n \frac{\int_V \varepsilon_0^{n+1} dV}{\int_V \varepsilon_0^2 dV} \right], \quad (19.206)$$

где

$$d_n = \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n} (n-1) [\Gamma(n)]^2}. \quad (19.207)$$

Для целого положительного n

$$d_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2n} (n-1) [(n-1)!]^2}. \quad (19.208)$$

Амплитуда колебаний a деформируемого тела обычно связывается со значением максимальной амплитуды деформации в теле $\varepsilon_{0 \max}$

Для степенной зависимости логарифмического декремента материала от амплитуды деформации ($\delta(\varepsilon_0) = k\varepsilon_0^{n-1}$) будем иметь

$$\delta(a) = k \frac{\int_V \varepsilon_0^{n+1} dV}{\int_V \varepsilon_0^2 dV}; \quad (19.209)$$

$$\omega(a) = \omega [1 - d_n \delta(a)]. \quad (19.210)$$

В этом случае уравнение резонансной кривой, например (19.177), принимает вид

$$p = \omega [1 - d_n \delta(a)] \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{m_0}{a\omega}\right)^2 - \left(\frac{\delta(a)}{\pi}\right)^2} \omega^2. \quad (19.211)$$

Здесь d_n определяется выражениями (19.207), (19.208) и $d_2 = 3/8$ при $n=2$; $d_3 = 15/64$ при $n=3$; $d_4 = 35/192$ при $n=4$.

Таблица 49. Собственные частоты колебаний систем с одной и двумя степенями свободы

m — масса груза; c — жесткость упругого элемента; l — длина стержня; G — модуль упругости при сдвиге; EF — жесткость поперечного сечения стержня при растяжении; GJ_p — жесткость поперечного сечения стержня при кручении; EJ — жесткость поперечного сечения стержня при изгибе

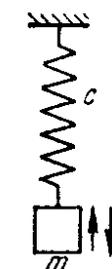
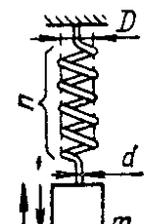
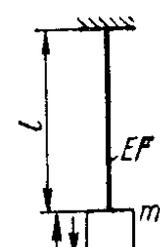
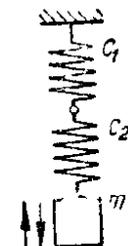
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Gd^4}{8nmD^3}}$ <p>n — число витков пружины</p>
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EF}{ml}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$

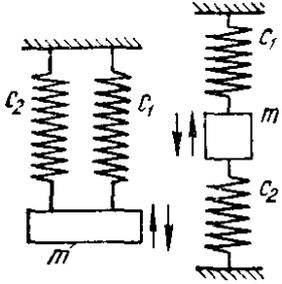
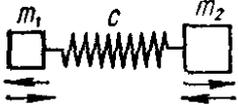
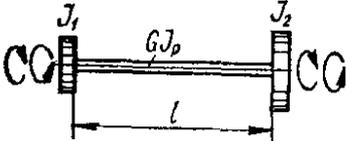
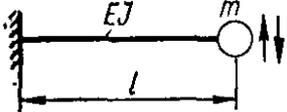
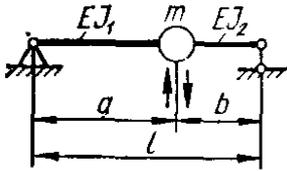
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}}$ <p>J — момент инерции массы диска относительно оси стержня</p>
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ_p(J_1 + J_2)}{lJ_1 \cdot J_2}}$ <p>J_1, J_2 — моменты инерции масс дисков</p>
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
	1	$f = \frac{l}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJ_1J_2}{m(aJ_2 + bJ_1)}}$ <p>при $J_1 = J_2 = J$</p> $f = \frac{1}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJl}{m}}$

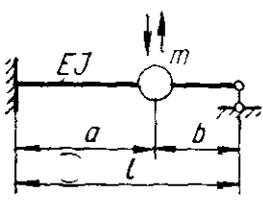
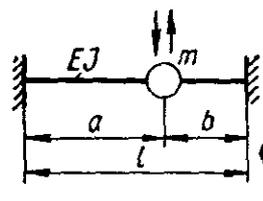
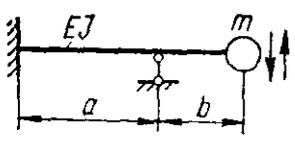
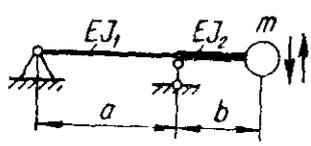
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
		при $J_1 = J_2 = J$ и $a = b = \frac{l}{2}$ $f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
	1	$f = \frac{l}{\pi ab} \sqrt{\frac{3EJl}{ma(3a+4b)}}$ при $a = b = \frac{l}{2}$ $f = \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{7ml^3}}$
	1	$f = \frac{l}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJl}{mab}}$ при $a = b = \frac{l}{2}$ $f = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
	1	$f = \frac{1}{\pi b} \sqrt{\frac{3EJ}{m(3a+4b)}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi b} \sqrt{\frac{3EJ_1J_2}{m(aJ_2 + bJ_1)}}$ при $J_1 = J_2 = J$ $f = \frac{1}{2\pi b} \sqrt{\frac{3EJ}{m(a+b)}}$

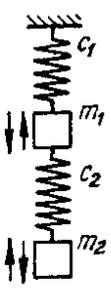
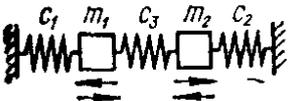
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} - \frac{c_2}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{c_2^2}{m_1 m_2}} \right]}$ <p>при $c_1 = c_2 = c$ и $m_1 = m_2 = m$</p> $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{m_1 m_2}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_3}{m_1} - \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{c_3^2}{m_1 m_2}} \right]}$

Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
		при $c_1 = c_2 = c$ и $m_1 = m_2 = m$ $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$; $f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c + 2c_3}{m}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} \right) + \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_2}{m_3} \right) \right] \mp \sqrt{\left[\left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} \right) - \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_2}{m_3} \right) \right]^2 + 4 \frac{c_1 c_2}{m_2^2}} \right\}}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_3} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_3} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)^2 - 4c_1 c_2 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}} \right]}$ при $c_1 = c_2 = c$ и $m_1 = m_2 = m_3 = m$ $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$; $f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3c}{m}}$ $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_2}{J_2} + \frac{c_1 + c_2}{J_1} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_2}{J_2} + \frac{c_1 + c_2}{J_1} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2}{J_1 J_2}} \right]}$

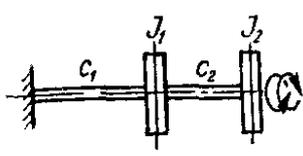
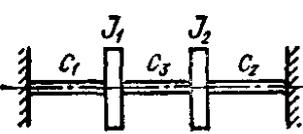
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
	2	$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1 + c_2}{J_1} + \frac{c_2}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{J_1} - \frac{c_2}{J_2} \right)^2 + 4 \frac{c_2^2}{J_1 J_2}} \right]}$ <p>J_1, J_2 — моменты инерции масс дисков относительно оси вала при $c_1 = c_2 = c$ и $J_1 = J_2 = J$</p> $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{c}{J}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1 + c_3}{J_1} + \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_3}{J_1} + \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{J_1 J_2}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1 + c_3}{J_1} + \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_3}{J_1} - \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right)^2 + 4 \frac{c_3^2}{J_1 J_2}} \right]}$

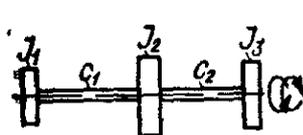
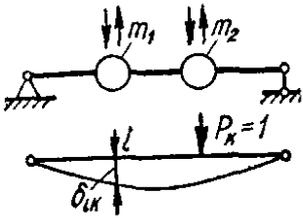
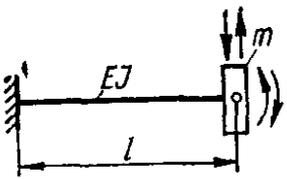
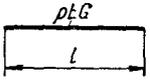
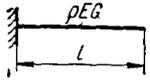
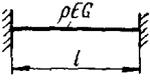
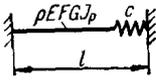
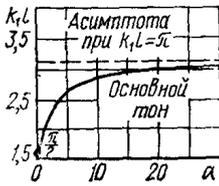
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
		<p>J_1, J_2 — моменты инерции масс дисков относительно оси вала при $c_1 = c_2 = c$ и $J_1 = J_2 = J$</p> $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{J}}; f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c+2c_3}{J}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3} + \frac{c_1+c_2}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3} + \frac{c_1+c_2}{J_2} \right)^2 - 4c_1c_2 \frac{J_1+J_2+J_3}{J_1J_2J_3}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{c_1}{J_1} + \frac{c_1}{J_2} \right) + \left(\frac{c_2}{J_2} + \frac{c_2}{J_3} \right) \right] \mp \sqrt{\left[\left(\frac{c_1}{J_1} + \frac{c_1}{J_2} \right) - \left(\frac{c_2}{J_2} + \frac{c_2}{J_3} \right) \right]^2 + 4 \frac{c_1c_2}{J_2^2}} \right\}}$ <p>J_1, J_2, J_3 — моменты инерции масс дисков относительно оси вала при $c_1 = c_2 = c$ и $J_1 = J_2 = J_3 = J$</p> $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2c \mp c}{J}}$

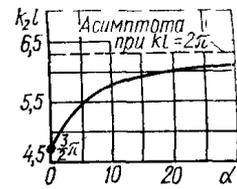
Схема колебательной системы	Число степеней свободы	Собственная частота f , Гц
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \times$ $\times \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} \mp$ $\mp \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} \right)^2 -$ $- 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]$ <p>δ_{ik} — прогиб оси балки в сечении от единичной силы, приложенной в сечении k; $\delta_{ik} = \delta_{ki}$</p>
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6EJ}{ml^3} \left(1 + \frac{l^2}{3i_0^2} \mp$ $\mp \sqrt{1 + \frac{l^2}{3i_0^2} + \frac{l^2}{9i_0^4}} \right)}$ <p>i_0 — радиус инерции груза относительно его центра тяжести при $l \gg i_0$</p> $f_1 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3} \left(1 - \frac{3i_0^2}{l^2} \right)}$ $f_2 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3} \left(3 + \frac{4l^2}{3i_0^2} \right)}$

898 Таблица 50. Частотные уравнения и собственные формы продольных и крутильных колебаний стержней постоянного сечения

Схема закрепления стержня	Частотное уравнение	Корни частотного уравнения*	Собственная форма колебаний
	$\sin kl = 0$	$k_i l = i\pi$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\varphi(z) = C \cos kz$
	$\cos kl = 0$	$k_i l = \frac{\pi}{2} (2i - 1)$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\varphi(z) = C \sin kz$
	$\sin kl = 0$	$k_i l = i\pi$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\varphi(z) = C \sin kz$
	$\operatorname{tg} kl = -\frac{kl}{\alpha}$ При продольных колебаниях $\alpha = \frac{cl}{EF};$ при крутильных колебаниях		$\varphi(z) = C \sin kz$

$$\alpha = \frac{cl}{GJ_p}$$

где F и J_p — площадь и полярный момент инерции поперечного сечения стержня; c — жесткость опоры относительно продольных или крутильных перемещений



$$\operatorname{tg} kl = \alpha kl$$

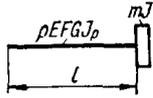
При продольных колебаниях

$$\alpha = \frac{\rho Fl}{m}$$

при крутильных колебаниях

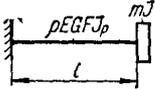
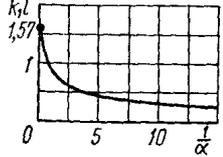
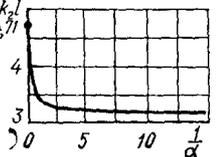
$$\alpha = \frac{\rho J_p l}{J}$$

где m — масса груза; J — момент инерции массы груза относительно оси стержня; F — площадь сечения; J_p — полярный момент инерции сечения стержня



$$\varphi(z) = C \cos kz$$

α	0	0,5	1,0	10	∞
$k_1 l$	π	4,26	4,50	4,69	$\frac{3}{2} \pi$

Схема закрепления стержня	Частотное уравнение	Корни частотного уравнения*	Собственная форма колебаний
 <p>где m — масса груза; J — момент инерции массы груза относительно оси стержня; F — площадь сечения; J_p — полярный момент инерции сечения стержня</p>	$kl \cdot \operatorname{tg} kl = \alpha$ <p>При продольных колебаниях</p>	α 0,01 0,05 0,20 0,30 0,50 0,70	$\varphi(z) = C \sin kz$
	$\alpha = \frac{\rho Fl}{m};$	$k_1 l$ 0,10 0,21 0,42 0,52 0,65 0,75	
	<p>при крутильных колебаниях</p>	α 0,90 1,00 1,50 2,00 3,00 4,00	
	$\alpha = \frac{\rho J_p l}{J},$	$k_1 l$ 0,82 0,86 0,98 1,08 1,20 1,27	
		α 5,00 10,0 20,0 100,0 ∞	
		$k_1 l$ 1,32 1,42 1,52 1,568 $\pi/2$	 

	<p>Продольные колебания</p> $\left[m_1 m_2 \left(\frac{k}{\rho F} \right)^2 - 1 \right] \operatorname{tg} kl -$ $- (m_1 + m_2) \frac{k}{\rho F} = 0;$ <p>крутильные колебания</p> $\left[J_1 J_2 \left(\frac{k}{\rho J_\rho} \right)^2 - 1 \right] \operatorname{tg} kl -$ $- (J_1 + J_2) \frac{k}{\rho J_\rho} = 0,$ <p>m_1, m_2—массы грузов; J_1, J_2—моменты инерции массы грузов относительно оси стержня; F—площадь сечения; J_ρ—полярный момент инерции сечения стержня</p>	<p>—</p>	$\varphi(z) = C \left(\cos kz - \frac{m_1}{\rho F} k \sin kz \right)$ $\varphi(z) = C \left(\cos kz - \frac{J_1}{\rho J_\rho} k \sin kz \right)$
--	---	----------	---

* Собственные частоты определяют по формуле $f_l = \frac{k_l}{2\pi} a$, где $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ для продольных и $a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ для крутильных колебаний.

Таблица 51. Частотные уравнения и собственные формы поперечных колебаний стержней постоянного сечения

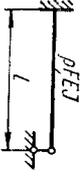
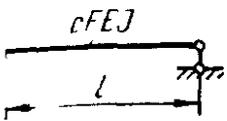
Схема закрепления стержня	Частотное уравнение	Корни частотного уравнения*		Собственная форма колебаний
		i	$k_i l$	
	$\cos kl \operatorname{ch} kl = 1$	1	0	$\varphi(z) = \operatorname{ch} kl - \cos kl) (\operatorname{sh} kz + \sin kz) - (\operatorname{sh} kl - \sin kl) (\operatorname{ch} kz + \cos kz)$
		2	4,730	
3	7,853			
4	10,996			
5	14,137			
	$\sin kl = 0$	$i > 3$	$\frac{\pi}{2} (2i - 1)$	$\varphi(z) = \sin kz$
		1	3,142	
	$\cos kl \operatorname{ch} kl = 1$	2	6,283	$\varphi(z) = (\operatorname{sh} kl - \sin kl) (\operatorname{ch} kz - \cos kz) - (\operatorname{ch} kl - \cos kl) (\operatorname{sh} kz - \sin kz)$
		3	9,425	
4	12,566			
4	$i\pi$			
4	$i\pi$			
	$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1$	$i > 2$	$\frac{\pi}{2} (2i + 1)$	$\varphi(z) = (\operatorname{sh} kl + \sin kl) (\operatorname{ch} kz + \cos kz) - (\operatorname{ch} kl + \cos kl) (\operatorname{sh} kz + \sin kz)$
		1	1,875	
2	4,694			
3	7,855			
4	10,996			
	$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$	$i > 3$	$\frac{\pi}{2} (2i - 1)$	$\varphi(z) = (\operatorname{sh} kl + \sin kl) (\operatorname{ch} kz - \cos kz) - (\operatorname{ch} kl + \cos kl) (\operatorname{sh} kz - \sin kz)$
		1	3,927	
2	7,069			
3	10,210			
4	13,352			
			$\frac{\pi}{4} (4i + 1)$	

Схема закрепления стержня	Частотное уравнение	Корни частотного уравнения*		Собственная форма колебаний
	$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$	1 2 3 4 5	0 3,927 7,069 10,210 13,352	$\varphi(z) = (\operatorname{ch} kl + \cos kl)(\operatorname{sh} kz + \sin kz) - (\operatorname{sh} kl + \sin kl)(\operatorname{ch} kz + \cos kz)$
		$i > 1$	$\frac{\pi}{4}(4i - 3)$	

* Собственные частоты определяют по формуле $f_i = \frac{(k_i l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$, где $m = \rho F$.

Таблица 52. Корни частотных уравнений поперечных колебаний стержней постоянного сечения на упругих опорах*

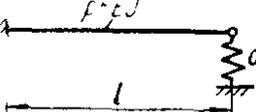
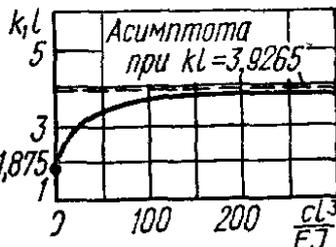
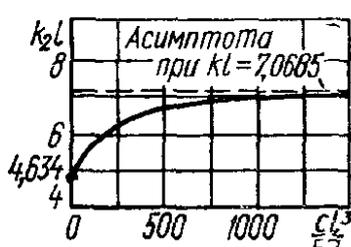
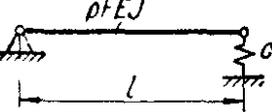
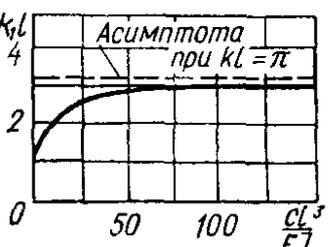
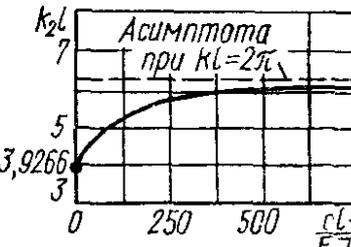
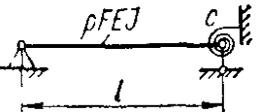
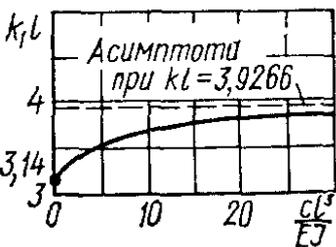
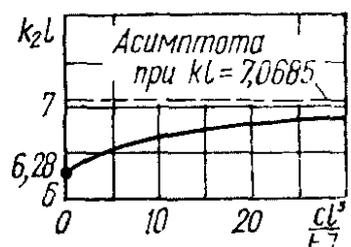
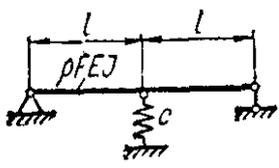
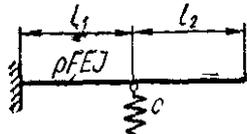
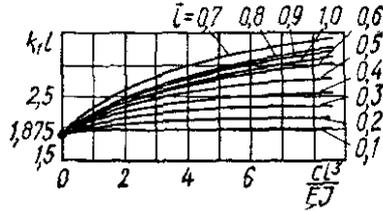
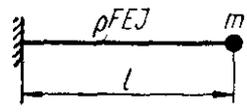
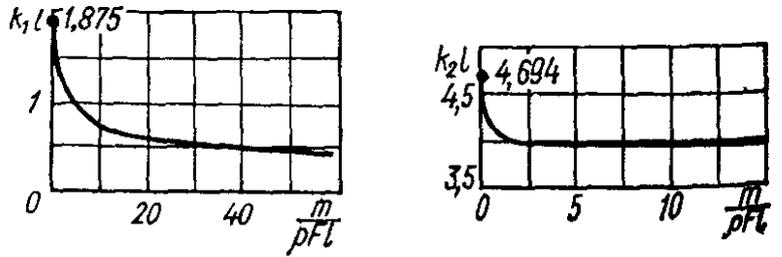
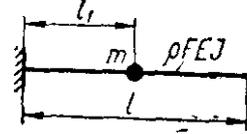
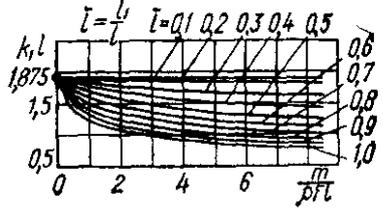
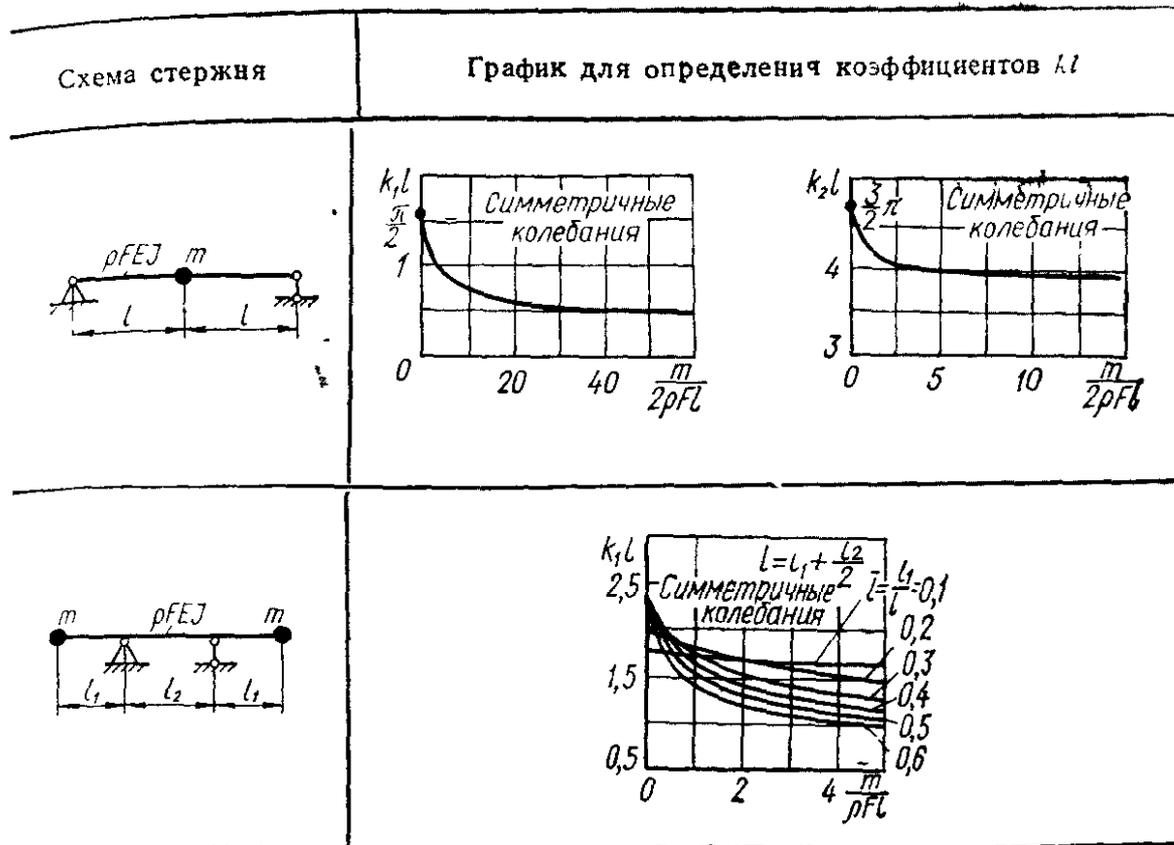
Схема закрепления стержня	График для определения коэффициентов kl	
		
		
		

Схема закрепления стержня	График для определения коэффициентов kl
	
 <p>$l = l_1 + l_2; \bar{l} = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$</p>	

* Собственные частоты определяют по формуле $f = \frac{(kl)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$ —
 $= \frac{k^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$, где $m = \rho F$.

Таблица 53. Корни частотных уравнений поперечных колебаний стержней постоянного сечения с сосредоточенными массами m^*

Схема стержня	График для определения коэффициентов kl
	
	



* Собственные частоты определяют по формуле $f = \frac{(l \cdot l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$.

Таблица 54. Значения некоторых интегралов, встречающихся при расчетах поперечных колебаний стержней (φ_i — i -я собственная форма колебаний)

Схема закрепления стержня	i	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i^2 dx$	$i \int_0^l (\varphi_i')^2 dx$	$l^3 \int_0^l (\varphi_i'')^2 dx$
	1	0,6366	0,5	4,9343	48,705
	2	0	0,5	19,739	779,28
	3	0,2122	0,5	44,413	3945,1
	4	0	0,5	78,955	12468
	5	0,1273	0,5	123,37	30440
	1	0,8445	1,0359	12,775	518,52
	2	0	0,9984	45,977	3797,1
	3	0,3637	1,0000	98,920	14619
	4	0	1,0000	171,58	39940
	5	0,2314	1,0000	264,01	89138

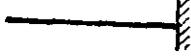
Схема закрепления стержня	i	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i^2 dx$	$l \int_0^l (\varphi_i')^2 dx$	$l^3 \int_0^l (\varphi_i'')^2 dx$
	1 2 3 4 5	0,6147 -0,0586 0,2364 -0,0310 0,1464	0,4996 0,5010 0,5000 0,5000 0,5000	5,5724 21,451 47,017 82,462 127,79	118,80 1250,40 5433,0 15892 36998
	1 2 3 4 5	1,0667 0,4252 0,2549 0,1819 0,1415	1,8556 0,9639 1,0014 1,0000 1,0000	8,6299 20,176 77,763 152,83 205,52	22,933 467,97 3808,5 14619 39940

Таблица 55. Собственные частоты поперечных колебаний стержней постоянного сечения, нагруженных продольными силами

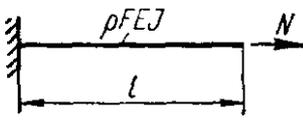
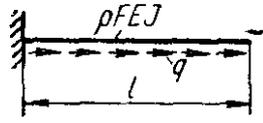
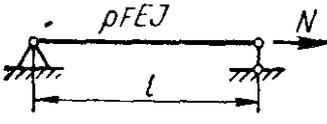
Схема стержня	Собственная частота колебаний
	$f_1 = \frac{0,562}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \left(1 + \frac{5Nl^2}{14EJ} \right)}$
	$f_1 = \frac{0,562}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \left(1 + \frac{ql^3}{8EJ} \right)}$
	$f_i = \frac{\pi}{2} \frac{i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \left(1 + \frac{Nl^2}{i^2 \pi^2 EJ} \right)}$

Таблица 56. Варианты записи формул Рэлея (19.137)—(19.139) для определения квадрата собственной частоты колебаний стержня:

Номер варианта	Колебания		
	продольные	крутильные	изгибные
1	$\frac{\int_0^l \frac{N^2}{EF} dz}{\sum m_i u_i^2 + \int_0^l \rho F u^2 dz}$	$\frac{\int_0^l \frac{M_{кр}^2}{GJ_p} dz}{\sum J_i \varphi_i^2 + \int_0^l \rho J_p \varphi^2 dz}$	$\frac{\int_0^l \frac{\Delta I^2}{EJ} dz}{\sum m_i \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 dz}$
2	$\frac{\int_0^l p(z) u dz}{\sum m_i u_i^2 + \int_0^l \rho F u^2 dz}$	$\frac{\int_0^l m_{кр}(z) \varphi dz}{\sum J_i \varphi_i^2 + \int_0^l \rho J_p \varphi^2 dz}$	$\frac{\int_0^l q(z) \omega dz}{\sum m_i \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 dz}$
3	$\frac{\int_0^l p(z) u dz + \sum N_j u_j}{\sum m_i u_i^2 + \int_0^l \rho F u^2 dz}$	$\frac{\int_0^l m_{кр}(z) \varphi dz + \sum M_{крj} \varphi_j}{\sum J_i \varphi_i^2 + \int_0^l \rho J_p \varphi^2 dz}$	$\frac{\int_0^l q(z) \omega dz + \sum P_j \omega_j}{\sum m_i \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 dz}$
4	$\frac{\int_0^l \rho F u dz + \sum m_i u_i}{\sum m_i u_i^2 + \int_0^l \rho F u^2 dz}$	—	$\frac{\int_0^l \rho F \omega dz + \sum m_i \omega_i}{\sum m_i \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 dz}$

Таблица 57. Выражения для определения квадрата собственной частоты по способу Грэмеля

Вид колебаний	Формула
Продольные	$\frac{\sum m_i u_i^2 + \int_0^l \rho F u^2 dz}{\int_0^l \frac{N^2 dz}{EF}}$
Крутильные	$\frac{\sum J_i \varphi_i^2 + \int_0^l \rho J_p \varphi^2 dz}{\int_0^l \frac{M_{кр}^2 dz}{GJ_p}}$
Изгибные	$\frac{\sum m_i \omega_i^2 + \int_0^l \rho F \omega^2 dz}{\int_0^l \frac{M^2 dz}{EJ}}$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ДЕЙСТВИЮ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

20.1. Явление усталости материалов

Усталостью материалов (в частности, металлов) называется явление разрушения при многократном повторении напряжений. Способность материалов сопротивляться разрушению при повторно-переменных напряжениях называется *выносливостью материала*.

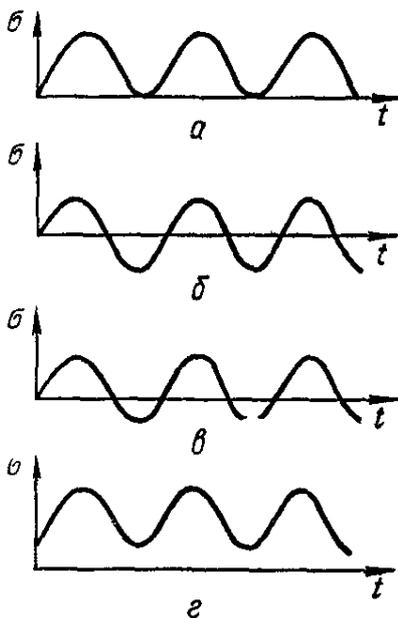


Рис. 357

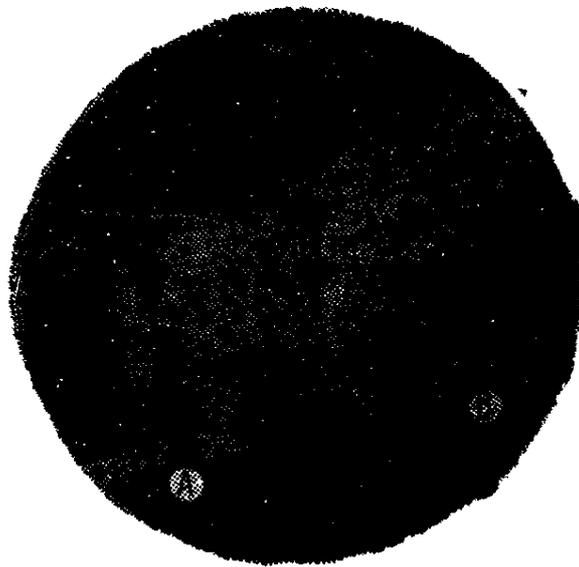


Рис. 358

Усталостное разрушение наблюдается при наличии одной из следующих особенностей нагружения:

1) при многократном нагружении одного знака, например, периодически изменяющегося от нуля до максимума (рис. 357, а);

2) при многократном нагружении, периодически изменяющемся не только по величине, но и по знаку (знакопеременное нагружение), когда на выносливость материала одновременно оказывает влияние и повторность, и переменность нагружения. При этом различают симметричное нагружение (рис. 357, б) и несимметричное (рис. 357, в, г).

Для разрушения от усталости недостаточно переменности напряжений. Необходимо также, чтобы напряжения имели определенную величину. *Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе повторений нагружений, называется пределом выносливости.*

Усталостный излом металла имеет характерный вид (рис. 358). На нем обычно можно наблюдать две зоны: одна из них (А) гладкая,

притертая, образованная вследствие постепенного развития трещины; другая (B) крупнозернистая, образованная при окончательном изломе ослабленного развившейся усталостной трещиной сечения детали. Зона B у хрупких материалов имеет крупнокристаллическое, а у вязких — волокнистое строение.

Механизм образования трещин при повторно-переменном напряжении весьма сложен и не может считаться полностью изученным. Из несомненных положений теории усталости можно отметить следующие.

- 1) процессы, происходящие в материале при повторно-переменном нагружении носят резко выраженный местный характер;
- 2) решающее влияние на явление усталости до образования первой трещины оказывают касательные напряжения, вызывающие пластические сдвиги и разрушение путем среза. Развитие усталостных трещин ускоряется при наличии растягивающих напряжений и у пластич-

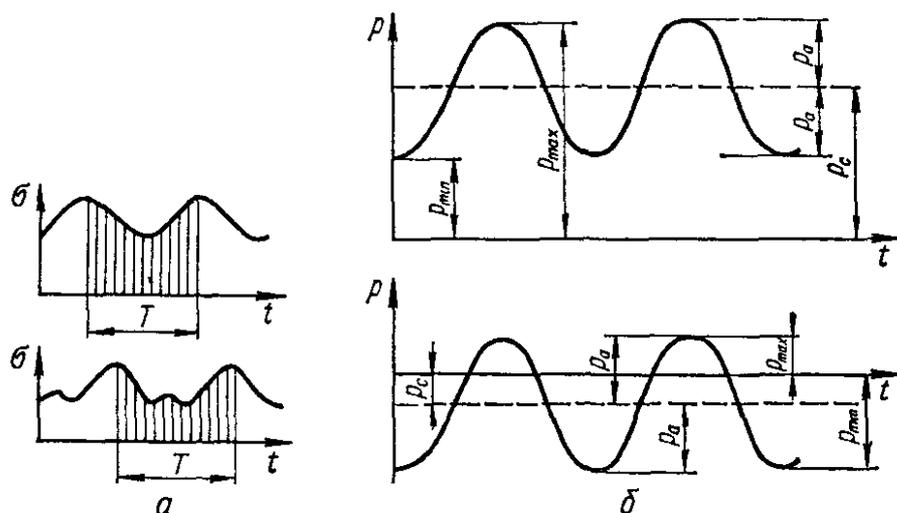


Рис. 359

ных, и в особенности у хрупких материалов (типа чугуна), в которых появление трещин отрыва значительно повышает чувствительность к растягивающим напряжениям

Предел выносливости определяется экспериментально на соответствующих испытательных машинах путем испытания партии образцов из данного материала в количестве не менее 6—12 штук. Предел выносливости зависит от многих факторов, в том числе от формы и размера образца или детали, способа ее обработки, состояния поверхности, вида напряженного состояния (растяжение — сжатие, кручение, изгиб), закона изменения нагрузки во времени при испытании, температуры и т. п.

В большинстве случаев переменные напряжения, вызывающие разрушение от усталости, представляют собой функцию времени $\sigma = f(t)$ с периодом, равным T . Совокупность всех значений напряжений за один период, называется *циклом напряжений* (рис. 359, а)

На величину предела выносливости оказывают влияние максимальные (p_{\max}) и минимальные (p_{\min}) напряжения цикла. Основной характеристикой цикла является *коэффициент асимметрии цикла*

$$R = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (20.1)$$

Различают также *среднее напряжение цикла* (рис. 359, б)

$$p_c = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (20.2)$$

и *амплитуду цикла*

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}. \quad (20.3)$$

Среднее напряжение цикла может быть как положительным, так и отрицательным; амплитуда цикла определяется абсолютной величиной (без учета знака).

В соответствии с (20.2) и (20.3), очевидно,

$$p_{\max} = p_c + p_a; \quad p_{\min} = p_c - p_a.$$

Наиболее опасным циклом является так называемый *симметричный цикл* (когда $p_{\max} = -p_{\min}$ и $p_c = 0$), при котором

$$R = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = -1.$$

Предел выносливости при симметричном цикле обозначается p_{-1} .

При *пульсирующем цикле*, когда $p_{\min} = 0$,

$$R = \frac{0}{p_{\max}} = 0,$$

предел выносливости обозначают через p_0 . При *постоянной нагрузке*, когда $p_{\max} = p_{\min} = p$,

$$R = \frac{p}{p} = 1.$$

В самом общем случае при коэффициенте асимметрии R предел выносливости обозначают p_R . В частном случае, например при $R = 0,5$, предел выносливости обозначают $p_{-0,5}$. Циклы, имеющие одинаковые характеристики R , называют *подобными*. Характеристика цикла, или коэффициент асимметрии, может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$ (см. табл. 58).

Следует иметь в виду, что в случаях, когда речь идет об усталости при растяжении — сжатии или изгибе, вместо обозначений p_a , p_c , p_0 , p_{\max} , p_{\min} и т. д. необходимо использовать обозначения соответственно σ_a , σ_c , σ_0 , σ_{\max} , σ_{\min} и т. д., а в случае рассмотрения сопротивления материалов действию повторно-переменных касательных напряжений (при циклическом кручении) следует применять обозначения τ_a , τ_c , τ_0 , τ_{\max} , τ_{\min} и т. д.

20.2. Методы определения предела выносливости.

Диаграммы усталости

При испытании материала на выносливость чаще всего используют гладкие цилиндрические образцы диаметром 7—10 мм.

В зависимости от типа действующих в образце повторно-переменных напряжений (растяжения — сжатия, переменного изгиба, пере-

менного кручения), а также характеристики цикла (коэффициента асимметрии R), значения предела выносливости будут различными. Поэтому, ставя перед собой цель получения предела выносливости материала, следует заранее указать, при каком виде деформации (изгибе, кручении и т. п.), а также при каком характере изменения напряжений за цикл, т. е. при каком значении R , требуется определить предел выносливости.

В соответствии с поставленной задачей выбирают испытательную машину. Для испытания на усталость при изгибе применяют машины (рис. 360), в которых циклические симметричные напряжения в испытываемом образце возникают за счет вращения образца, нагруженного укрепленным на конце с помощью шарнирного подшипника грузом. Число оборотов в минуту таких машин обычно составляет около 3000 (50 Гц). Для испытаний используются также вибрационные машины с механическим (низкочастотные — до 50—100 Гц), электромагнитным (обычно на фиксированных частотах 50 и 100 Гц, возможно

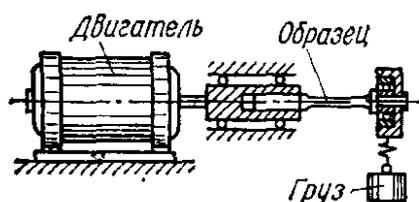


Рис. 360



Рис. 361

с частотами от 15 до 500 Гц), электродинамическим (обычно в диапазоне частот от 5 до 5000 Гц), гидроэлектромагнитным и гидроэлектродинамическим (в большинстве конструкций частота возбуждения до 100 Гц, иногда до 400 Гц) возбужденной вибрации, а также магнито-стрикционные установки, частотный диапазон которых составляет 1—20 кГц.

Испытания проводятся при симметричном и асимметричном циклах нагружения в основном при изгибе или при растяжении — сжатии образцов.

При испытании партии образцов с целью определения предела выносливости необходимо обеспечивать в отдельных образцах различные напряжения для выявления закономерности изменения числа циклов до разрушения при тех или иных уровнях напряжений.

Обработка получаемых экспериментальных данных осуществляется путем построения кривых усталости, часто называемых кривыми Веллера (рис. 361).

Кривая усталости строится по точкам в координатах: максимальное напряжение цикла ρ_{\max} (σ_{\max} или τ_{\max}) — число циклов до разрушения N . Каждой точке соответствует один разрушившийся образец, проработавший N циклов с заданным ρ_{\max} .

По мере снижения напряжения образцы выдерживают до разрушения все большее число циклов, а кривая усталости $\rho_{\max} = f(N)$ как бы приближается к некоторой асимптоте, параллельной оси абсцисс N . Число циклов, при котором кривая усталости практически начинает совпадать с асимптотой, может быть принято за базу испытания на выносливость, т. е. за такое число циклов, превышение которого при данном напряжении практически не должно приводить к разрушению образца. Таким образом, базой испытания на выносливость является наибольшее число повторно-переменных нагружений, существен-

ное превышение которого не должно приводить к усталостным разрушениям испытываемого образца при данном напряжении.

Для черных материалов (сталь, чугун и т. п.) в инженерной практике за базу испытания принимают 10 млн. циклов; для цветных (медь, алюминий и т. п.) — база испытания берется в 5—10 раз больше, чем для черных металлов.

В некоторых случаях, особенно для цветных материалов, кривая усталости в координатах N, ρ медленно стремится к асимптоте, поэтому базу испытания приходится выбирать значительно большей. В таких случаях вообще трудно говорить об истинном, так называемом физическом пределе выносливости, поскольку таковой практически отсутствует. Говорят об условном пределе выносливости, понимая под ним максимальное напряжение, при котором не происходит разрушения при осуществлении определенного наперед заданного числа циклов, принимаемого за базу испытания.

Кроме построения первичных диаграмм усталости в координатах N, σ_{\max} при растяжении — сжатии и изгибе или в координатах N, τ_{\max} при кручении, эти диаграммы строят также в полупологарифмических координатах $\lg N, \sigma_{\max}$ (рис. 362) или $\lg N, \tau_{\max}$. В этом случае предел выносливости будет характеризоваться ординатой горизонтального прямого участка кривой усталости.



Рис 362

Как показывают многочисленные испытания на усталость, для некоторых материалов можно заметить следующие соотношения между пределами выносливости при симметричном цикле, полученными при изгибе σ_{-1}^H , кручении τ_{-1} и растяжении — сжатии σ_{-1}^0 на гладких образцах. Для стали $\sigma_{-1}^0 = 0,7\sigma_{-1}^H$; для чугуна $\sigma_{-1}^0 = 0,65\sigma_{-1}^H$, $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}^H$; для сталей и легких сплавов $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}^H$. Замечено также, что для стали существуют следующие соотношения указанных пределов выносливости с временным сопротивлением при растяжении: $\sigma_{-1}^0 = 0,2\sigma_B$; $\sigma_{-1}^H = 0,4\sigma_B$; $\tau_{-1} = 0,22\tau_B$. Для цветных металлов $\sigma_{-1}^H = (0,24 — 0,50)\sigma_B$.

Диаграмма предельных напряжений. Для характеристики сопротивляемости материала повторно-переменным напряжениям при различной асимметрии цикла строится так называемая *диаграмма предельных напряжений* (рис. 363) в координатах $\sigma_{\max}, \sigma_{\min} — \sigma_c$ (диаграмма Смита).

Ординаты кривой $СAB$ диаграммы соответствуют значениям пределов выносливости (максимальным значениям напряжения) при различной асимметрии циклов, которые берутся из первичных диаграмм усталости.

Тангенс угла наклона луча, проведенного из начала координат до пересечения с предельной кривой $СAB$ и образующего угол β с осью абсцисс σ_c , будет

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} = \frac{2\sigma_{\max}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{2}{1 + R}. \quad (20.4)$$

Ординаты луча под углом $\beta = 45^\circ$ определяют среднее напряжение цикла σ_c .

Диаграммы предельных напряжений обычно ограничивают в верхней части пределом прочности или пределом текучести материала.

Примерный вид диаграммы предельных напряжений, ограниченной пределом текучести τ_T , для случая циклического кручения приведен на рис. 364.

Можно строить также диаграмму предельных амплитуд напряжений в координатах $\sigma_a - \sigma_c$ (диаграмма Хейя). В этом случае (рис. 365) тангенс угла β , образованного лучом, проведенным из начала координат, с предельной кривой будет выражаться так:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1 - R}{1 + R}. \quad (20.5)$$

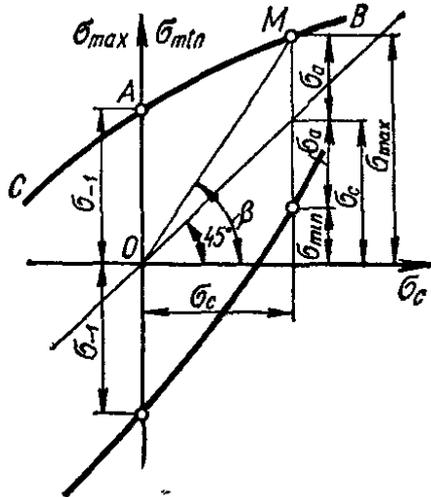


Рис. 363

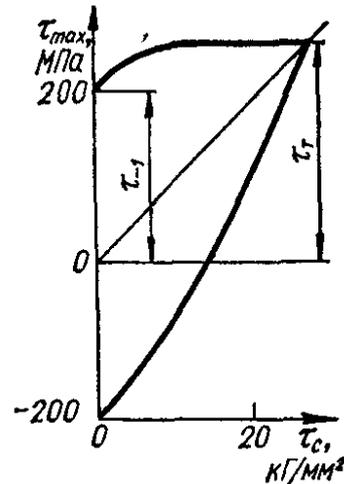


Рис. 364

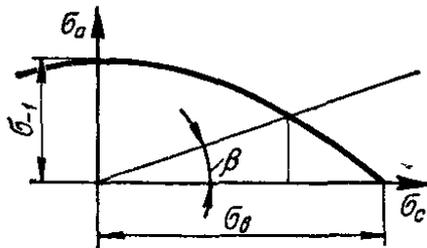


Рис. 365

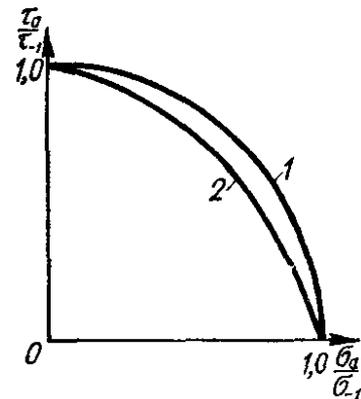


Рис. 366

Для оценки сопротивляемости материалов повторно-переменным напряжениям при сложном напряженном состоянии, например при совместном действии циклического изгиба и кручения, используют соответствующие усталостные машины, позволяющие получать интересное нас напряженное состояние.

На рис. 366 приведены результаты экспериментов с гладкими образцами при различном сочетании переменных нормальных (σ) и касательных (τ) напряжений при симметричном цикле. Через σ_{-1} и τ_{-1} обозначены пределы выносливости соответственно только при изгибе и только при кручении, а через σ_a и τ_a — предельные амплитуды при одновременном действии изгиба и кручения. Экспериментальные данные группируются около кривой, которая с достаточной степенью точ-

ности может быть аппроксимирована для конструкционных сталей тугой круга (рис. 366, кривая 1), описываемой уравнением

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1. \quad (20.6)$$

Для высокопрочных сталей и чугунов экспериментальные данные располагаются ближе к эллиптическим дугам (рис. 366, кривая 2)

В случае симметричного цикла с соблюдением синхронности и синфазности напряжений условие прочности в амплитудах главных напряжений в соответствии с третьей теорией прочности запишется так

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a = \sigma_{-1}, \quad (20.7)$$

а по четвертой теории прочности

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (20.8)$$

При сложном напряженном состоянии, характеризуемом совместным действием циклического изгиба и кручения, условие прочности (20.8) с учетом соотношения $\sigma_{-1} \approx \sqrt{3} \tau_{-1}$ будет иметь вид

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}. \quad (20.9)$$

Это условие совпадает с выражением (20.6), вытекающим из экспериментальных данных.

20.3. Влияние на предел выносливости конструктивно-технологических факторов

Влияние концентрации напряжений. Наибольшее влияние на предел выносливости оказывает концентрация напряжений, степень которой характеризуется теоретическим коэффициентом концентрации α (раздел 4.4). Как показывают опыты, предел выносливости образцов с концентраторами напряжений $\rho_{-1к}$ оказывается больше вычисленного через теоретический коэффициент концентраций α , т. е.

$$\rho_{-1к} \geq \frac{\rho_{-1}}{\alpha}.$$

Поэтому наряду с теоретическим коэффициентом концентраций введено понятие *эффективного*, или *действительного*, коэффициента концентрации k . Эти коэффициенты обозначены так: для нормальных напряжений

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}},$$

для касательных напряжений

$$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}},$$

где σ_{-1} и τ_{-1} — пределы выносливости, полученные при действии циклических нормальных и касательных напряжений на гладких образцах, $\sigma_{-1к}$ и $\tau_{-1к}$ — пределы выносливости образцов с концентраторами напряжений.

Практически оказалось удобнее определять эффективный коэффициент концентрации через так называемый коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений

$$q = \frac{k - 1}{\alpha - 1} \quad (20.10)$$

Коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений зависит от самого материала и величины коэффициента концентрации α . Ниже приведены ориентировочные значения коэффициента q_σ для различных материалов.

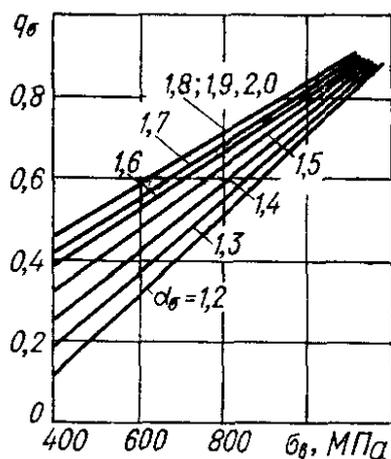


Рис. 367

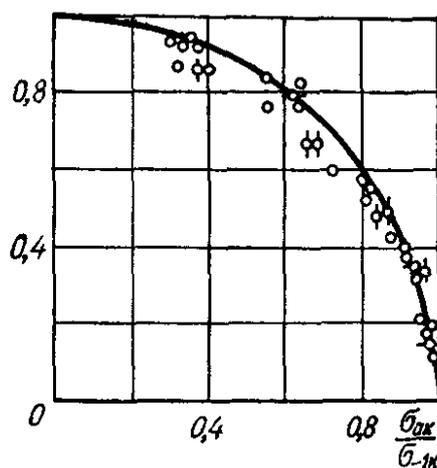


Рис. 368

Материалы	q_σ
Литые материалы и материалы с внутренними источниками концентрации и дефектами (серый чугун и др.)	0,1—0,2
Литые жаропрочные сплавы, стальное и алюминиевое литье, модифицированные чугуны	0,1—0,4
Низкоуглеродистые стали, жаропрочные деформируемые сплавы, аустенитные коррозионностойкие стали, алюминиевые деформируемые сплавы	0,3—0,5
Среднеуглеродистые стали, низколегированные стали	0,4—0,6
Конструкционные легированные стали	0,6—0,7
Высоколегированные стали (типа коррозионностойких сталей мартенситного класса), титановые сплавы	0,7—0,9

Для определения коэффициента чувствительности q в литературе имеются графики (рис. 367). Зная q , а также теоретический коэффициент концентрации напряжений α , можно определить согласно (20.10) эффективный коэффициент концентрации по формуле

$$k = 1 + q(\alpha - 1). \quad (20.11)$$

Для материала, чувствительного к концентрации напряжения, когда $q \rightarrow 1$, $k \rightarrow \alpha$. Для материала, не чувствительного к концентрации напряжения, когда $q \rightarrow 0$, $k \rightarrow 1$.

Влияние концентрации напряжений при сложном напряженном состоянии оценивается на основе испытания образцов с концентраторами и получения соответствующих диаграмм (рис. 368), которые ана-

логично диаграммам, приведенным для гладких образцов (рис. 366), описываются эллиптической зависимостью

$$\left(\frac{\sigma_{ак}}{\sigma_{-1к}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ак}}{\tau_{-1к}}\right)^2 = 1, \quad (20.12)$$

где $\sigma_{-1к}$, $\tau_{-1к}$ — пределы выносливости при симметричном цикле для образцов с концентраторами только при изгибе и только при кручении соответственно; $\sigma_{ак}$, $\tau_{ак}$ — амплитудные значения напряжений при одновременном синхронном и синфазном изменении напряжений при сложном напряженном состоянии и различных сочетаниях переменных нормальных и касательных напряжений.

Влияние размеров (масштабный фактор). Эксперименты показывают, что с увеличением размеров образца предел выносливости падает. Это снижение обычно учитывается с помощью некоторого коэффициента, обозначаемого, например, применительно к нормальным напряжениям так:

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}, \quad (20.13)$$

где $(\sigma_{-1})_{d_0}$ — предел выносливости гладкого лабораторного образца диаметром $d_0 = 7 - 10$ мм; $(\sigma_{-1})_d$ — предел выносливости рассматриваемой детали диаметром $d > d_0$. Поскольку $(\sigma_{-1})_d < (\sigma_{-1})_{d_0}$ то, очевидно, коэффициент влияния абсолютных размеров $\epsilon_{\sigma} < 1$.

При наличии концентратора влияние масштаба оценивается так же, как и для гладких образцов, с помощью коэффициента

$$\epsilon_{\sigma к} = \frac{(\sigma_{-1к})_d}{(\sigma_{-1к})_{d_0}}. \quad (20.14)$$

Здесь $(\sigma_{-1к})_d$ и $(\sigma_{-1к})_{d_0}$ — пределы выносливости детали и лабораторного образца соответственно. На рис. 369 приведены кривые зависимости $\epsilon = f(d)$. Здесь кривая 1 соответствует детали из углеродистой стали без концентратора; кривая 2 — детали из легированной стали ($\sigma_B = 1000 - 1200$ МПа) при отсутствии концентратора и из углеродистой стали при наличии концентратора; кривая 3 соответствует детали из легированной стали при наличии концентратора; кривая 4 — для любой стали при весьма большой концентрации напряжений (например, при концентраторе типа надреза).

Снижение предела выносливости с увеличением размеров особенно сильно выражено у неоднородных материалов. Так, с увеличением размера образца из серого чугуна с 5—10 мм до 50 мм снижение σ_B и σ_{-1} может достигнуть 60—70 %. Для углеродистой стали увеличение диаметра образца с 7 мм до 150 мм приводит к снижению предела выносливости примерно на 45 %.

Кроме эффективного коэффициента концентрации $(k_{\sigma})_d$ для образца вводят понятие *эффективного коэффициента концентрации напря-*

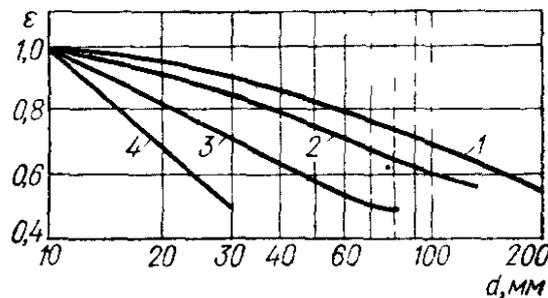


Рис. 369

жений для детали $(k_{\sigma})_D$, учитывающего одновременно и размеры и концентрацию:

$$(k_{\sigma})_D = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1K})_d} \quad (20.15)$$

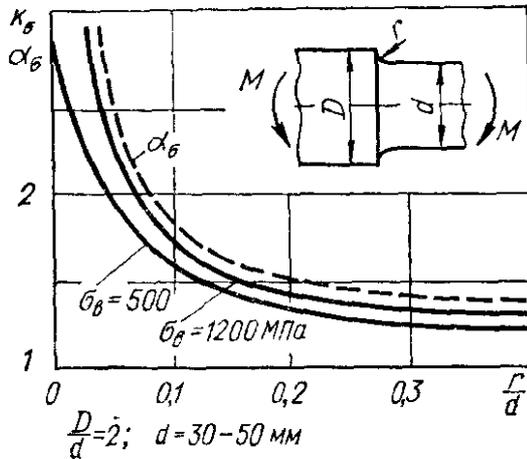


Рис. 370

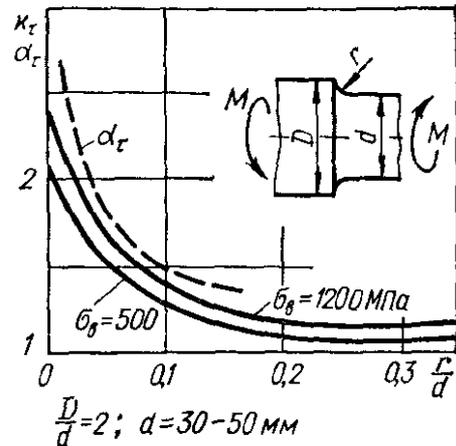


Рис. 371

Если $(k_{\sigma})_d$ определяется на образцах достаточно большого диаметра (когда дальнейшее увеличение диаметра мало влияет на $(k_{\sigma})_d$), то

$$(k_{\sigma})_D = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\epsilon_{\sigma})_d (\sigma_{-1K})_d} = \frac{(k_{\sigma})_d}{(\epsilon_{\sigma})_d} \quad (20.16)$$

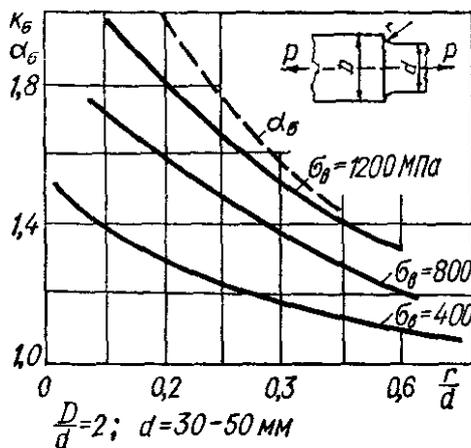


Рис. 372

Влияние концентраторов напряжения существенно зависит от вида напряженного состояния. При циклическом кручении, например, коэффициент концентрации оказывается более низким, чем при изгибе при той же форме концентратора. Это видно, в частности, из рис. 370 и 371, на которых приведены значения эффективных коэффициентов концентрации для ступенчатых валов с галтелью соответственно для изгиба и кручения. Соотношение между k_{τ} и k_{σ} может быть представлено формулой

$$k_{\tau} = 1 + 0,6(k_{\sigma} - 1).$$

На рис. 372 приведены графики, характеризующие эффективные коэффициенты концентрации при растяжении — сжатии. Из графиков (рис. 370 и 372) видно, что значения эффективных коэффициентов при растяжении — сжатии несколько превышают таковые при изгибе. Более полные данные о коэффициентах концентрации и чувствительности к концентрации напряжений приведены в Приложении 2.

Влияние состояния поверхности. На предел выносливости существенное влияние оказывает состояние поверхности детали или образца. Это объясняется тем, что на поверхности почти всегда имеют место

дефекты, связанные с качеством ее механической обработки, а также с коррозией под влиянием окружающей среды. Поэтому усталостные трещины, как правило, начинаются с поверхности, а плохое качество последней приводит к снижению предела выносливости.

Влияние качества механической обработки поверхности на выносливость можно оценить некоторым коэффициентом $\beta \leq 1$, который равен отношению предела выносливости испытуемого образца с определенной обработкой поверхности к пределу выносливости тщательно отполированного образца. На рис. 373 приведена зависимость коэффициента β от предела прочности для различных видов обработки поверхности стальных образцов. Кривая 1 соответствует полированным образцам; 2 — шлифованным; 3 — образцам с тонкой обточкой; 4 — образцам с грубой обточкой; 5 — с наличием окалины. Из графика видно, что при грубой обточке предел выносливости снижается на 40 %, а при наличии окалины — на 70 %.

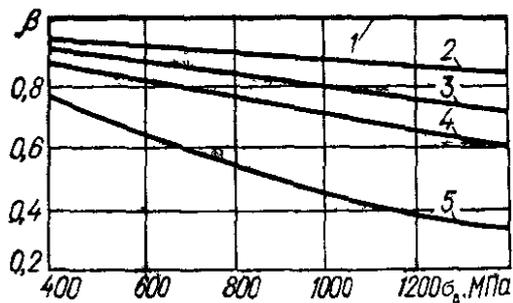


Рис. 373

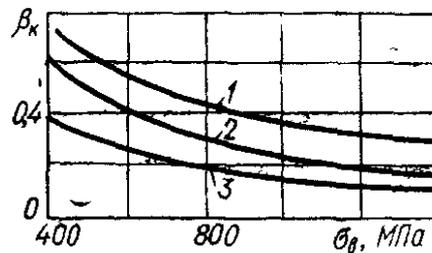


Рис. 374

Влияние коррозии в процессе испытания на предел выносливости при ротационном изгибе показано в виде графиков на рис. 374, где по оси ординат отложено значение коэффициента

$$\beta_k = \frac{\sigma_{-1}^k}{\sigma_{-1}}$$

выражающего отношение предела выносливости корродированного образца σ_{-1}^k к пределу выносливости полированного образца σ_{-1} , а по оси абсцисс — временное сопротивление материала исследуемых образцов. Кривая 1 характеризует влияние коррозии в пресной воде при наличии концентраторов напряжений; 2 — в пресной воде при отсутствии концентраторов и в морской воде при наличии концентрации; 3 — в морской воде при отсутствии концентрации.

Влияние пауз. На предел выносливости имеют влияние паузы (перерывы нагружения). Иногда за счет пауз число циклов до разрушения увеличивается на 15—20 %. Увеличение числа циклов тем больше, чем чаще паузы и чем они длительнее (последний фактор влияет слабее).

Влияние перегрузок (нагрузок, больших предела выносливости) на величину предела выносливости зависит от характера перегрузок. При малых перегрузках до определенного числа циклов сопротивление усталостному разрушению повышается, при больших перегрузках после определенного числа циклов — понижается.

Влияние тренировок. Если создавать в образце напряжения немного ниже предела выносливости, а затем постепенно их увеличивать, то сопротивление усталости материала может быть существенно повышено. Это явление, называемое тренировкой материала, широко ис-

пользуется в технике. Особого эффекта можно достигнуть при постепенном увеличении перегрузки. При этом упрочнение можно получить при сравнительно кратковременных тренировках (порядка 50 000 циклов), но при сильных перегрузках.

Влияние температуры. Применительно к обычным конструкционным материалам повышение температуры приводит к снижению предела выносливости, а снижение температуры — к повышению предела выносливости как гладких образцов, так и образцов с концентраторами.

Для стали при температурах выше 573 К с повышением на каждые 100 К предел выносливости падает на 15—20 %. Однако для некоторых сталей с повышением температуры от 293 до 573 К наблюдается некоторое повышение предела выносливости. Это повышение, по-видимому, связано с физико-химическими процессами, протекающими в материале под одновременным воздействием температуры и циклических напряжений. Влияние концентрации напряжений на выносливость, как правило, с повышением температуры уменьшается.

При понижении температуры от 293 до 83 К предел выносливости у некоторых сталей увеличивается более чем вдвое, хотя ударная вязкость при этом существенно падает.

20.4. Расчет на прочность при повторно-переменными нагрузками

При простых видах деформации детали, работающей при симметричном цикле, например, при циклическом растяжении — сжатии или изгибе и фактически действующем знакопеременном напряжении σ_a , запас прочности можно определить по формуле

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a},$$

где $(\sigma_{-1k})_d$ — предел выносливости детали при растяжении — сжатии или изгибе, который может быть определен по пределу выносливости лабораторных полированных образцов $(\sigma_{-1})_d$, с учетом эффективного коэффициента концентрации $(k_\sigma)_d$, масштабного фактора ϵ_σ , состояния поверхности и среды, характеризующихся соответственно коэффициентами β и β_k , по формуле

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(k_\sigma)_d \epsilon_\sigma \beta \beta_k}.$$

В случае сложного напряженного состояния согласно (20.9)

$$(\sigma_{-1k})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[\frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_d} \right]^2 \tau_a^2}$$

или согласно (20.6)

$$\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1k})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1k})_d^2} = 1. \quad (20.17)$$

Тогда, учитывая, что коэффициенты запаса прочности

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a}$$

и

$$n_{\tau} = \frac{(\tau_{-1k})d}{\tau_a}$$

на основании (20.17) получаем

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}$$

откуда запас прочности при сложном напряженном состоянии определится формулой

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \quad (20.18)$$

В случае определения запаса прочности при асимметричном цикле и любом виде циклического нагружении (изгиб, растяжение — сжатие, кручение) можно исходить из схематизированной диаграммы предельных напряжений для гладких образцов (рис. 375), представив ее в виде прямой, проходящей через точки A и B с координатами $0, \sigma_{-1}$ и $\sigma_0/2, \sigma_0$, уравнение которой имеет вид

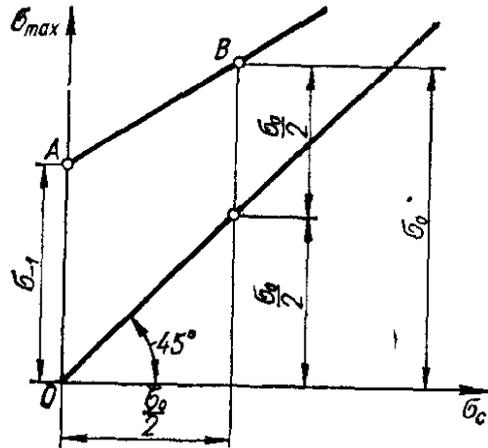


Рис. 375

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_c = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \sigma_c$$

или

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_{\sigma}) \sigma_c \quad (20.19)$$

где ψ_{σ} — коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла:

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (20.20)$$

При действии касательных напряжений уравнение предельной кривой максимальных напряжений по аналогии с (20.19) имеет вид

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + (1 - \psi_{\tau}) \tau_c \quad (20.21)$$

Значения коэффициентов ψ_{σ} и ψ_{τ} для сталей с различным временным сопротивлением приведены ниже.

σ_B , МПа	ψ_{σ}	ψ_{τ}
350—550	0	0
520—750	0,05	0
700—1000	0,1	0,05
1000—1200	0,2	0,10
1200—1400	0,25	0,15

Предельная амплитуда напряжений для гладкого образца на основании (20.19) может быть выражена формулой

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c = \sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_c$$

Предельная амплитуда напряжений для детали $(\sigma_{ак})_d$ будет

$$(\sigma_{ак})_d = \frac{\sigma_a}{(k_{\sigma})_Д} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_c}{(k_{\sigma})_Д}, \quad (20.22)$$

а уравнение кривой предельных напряжений для детали (рис. 376) может быть записано в виде

$$(\sigma_{max})_d = (\sigma_{ак})_d + \sigma_c = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_Д} + \left[1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_Д} \right] \sigma_c. \quad (20.23)$$

Для определения запаса прочности детали, напряжение в которой на диаграмме предельных напряжений (рис. 377) характеризуется точкой

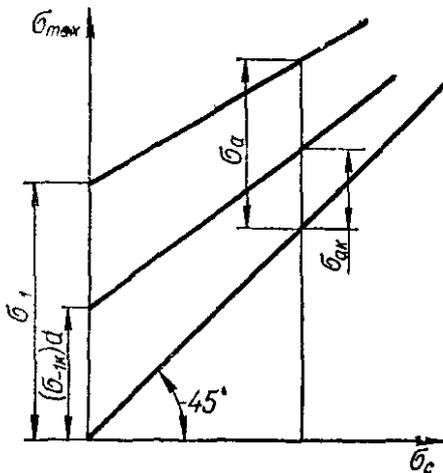


Рис. 376

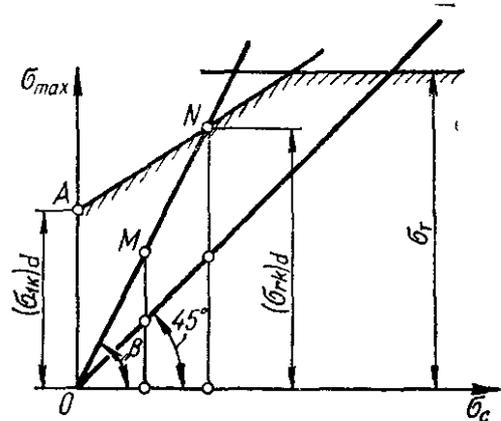


Рис. 377

М с координатами σ_a , σ_c , необходимо найти координаты точки N, находящейся на пересечении луча, выходящего из начала координат, с кривой предельных напряжений для детали. Координаты точки N определяются из совместного рассмотрения уравнений кривой (линии) AN предельных напряжений для детали

$$(\sigma'_{max, k})_d = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_Д} + \left[1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_Д} \right] \sigma'_c \quad (20.24)$$

и уравнения луча

$$\sigma'_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_c} \sigma'_c = \operatorname{tg} \beta \cdot \sigma'_c, \quad (20.25)$$

где штрихами обозначены текущие координаты.

Ордината точки N, лежащей на пересечении прямых AN и ON, будет одна и та же, т. е.

$$(\sigma_{max, k})_d = \sigma'_{max},$$

или

$$\frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_Д} + \left[1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_Д} \right] \sigma_c = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_c} \sigma'_c,$$

откуда находим абсциссу точки N :

$$\sigma'_c = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} - 1 + \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_D} \right]} = \frac{\sigma_{-1}\sigma_c}{(k_\sigma)_D \sigma_{\max} - \sigma_c (k_\sigma)_D + \psi_\sigma \sigma_c}.$$

Учитывая, что $\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c$, получаем

$$\sigma'_c = \frac{\sigma_{-1}\sigma_c}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c}. \quad (20.26)$$

Подставляя это значение σ'_c в (20.25) и обозначая эту ординату (σ'_{\max}) через $(\sigma_{r\kappa})_d$, находим

$$(\sigma_{r\kappa})_d = \frac{\sigma_{-1}\sigma_{\max}}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c}.$$

Таким образом, окончательное выражение для запаса прочности запишется так:

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{r\kappa})_d}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c}. \quad (20.27)$$

Аналогично при кручении

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_D \tau_a + \psi_\tau \tau_c}. \quad (20.28)$$

При сложном сопротивлении и несимметричном цикле запас прочности может быть определен по формуле

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

где n_σ и n_τ находят соответственно по формулам (20.27) и (20.28).

Выбор запаса прочности при расчетах на действие повторно-переменных напряжений зависит от точности определения усилий и напряжений, от однородности материала, качества обработки детали и других факторов. При повышенной точности определения напряжений (в частности, с использованием тензометрирования), однородном материале и качественной обработке принимают запас прочности $n = 1,3 - 1,4$.

Для обычной точности определения усилий и умеренной однородности материала $n = 1,44 - 1,7$. При пониженной точности определения усилий и напряжений, а также пониженной однородности материала $n = 1,7 - 3,0$.

Остановимся на порядке *проектировочного расчета* на выносливость, например, штока поршневого двигателя, когда даны нагрузки, действующие на проектируемую деталь (p_{\max} и p_{\min}); задан материал, т. е. известны σ_B , σ_T , σ_{-1} , ψ_σ ; известна технология обработки детали; известен тип концентратора (предположим, задан диаметр поперечного отверстия в детали δ) и требуется определить размеры детали. При решении поставленной задачи прежде всего устанавливают опасное сечение детали, которым, очевидно, будет сечение в месте концентратора. Так как соотношения диаметра отверстия концентратора и диаметра самой детали неизвестны, следует задаться теоретическим коэффициентом концентрации

α_σ и для данного материала по известному (σ_B) из графика (рис. 367) при данном α_σ определить коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений q_σ , а затем по формуле

$$(k_\sigma)_d = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1)$$

найти значение эффективного коэффициента концентрации. Из графика (рис. 373) находят значение коэффициента β , характеризующего качество обработки поверхности. Задавшись коэффициентом ϵ , учитывающим размеры, определяют эффективный коэффициент концентрации детали

$$(k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_d}{\epsilon \beta}$$

Затем, задавшись коэффициентом запаса прочности n_σ , по формуле

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c} = \frac{\sigma_{-1} F}{(k_\sigma)_D \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} + \psi_\sigma \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2}}$$

находят площадь поперечного сечения детали

$$F = \frac{n_\sigma}{\sigma_{-1}} \left[(k_\sigma)_D \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} + \psi_\sigma \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} \right]$$

и ее диаметр

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}}$$

По окончании расчета необходимо проверить правильность выбранного коэффициента ϵ по графику (рис. 369) при известном теперь диаметре детали d . В случае резкого расхождения полученного значения ϵ с принятым ранее расчет необходимо уточнить.

В случае *проверочного расчета* известны форма и размеры детали (предположим, речь идет о круглом ступенчатом стержне, подверженном осевой повторно-переменной нагрузке с заданной асимметрией цикла); заданы максимальный диаметр d и радиус закругления r в месте сопряжения разных диаметров вала; известен материал детали (σ_B , σ_T , σ_{-1}) и качество ее механической обработки. Требуется определить допустимое усилие, которое может выдержать деталь. Решать поставленную задачу следует в таком порядке.

1. Установить теоретический коэффициент концентрации пользуясь, например, графиком, приведенным на рис. 372.

2. По графику (рис. 367) найти коэффициент чувствительности к концентрации напряжений q_σ .

3. Определить эффективный коэффициент концентрации

$$(k_\sigma)_d = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1).$$

4. По графику (рис. 369) найти коэффициент влияния абсолютных размеров ϵ .

5. По графику (рис. 373) определить коэффициент β , учитывающий качество обработки поверхности.

6. Найти эффективный коэффициент концентрации напряжений для детали

$$(k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_d}{\epsilon \beta}$$

7. Задаться коэффициентом запаса прочности n_σ .

8. Определить амплитуду напряжений, исходя из формулы

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c};$$
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma} \frac{1}{(k_\sigma)_D + \psi_\sigma \cdot \frac{\sigma_c}{\sigma_a}}.$$

Обычно для некачественных сталей $\psi_\sigma = 0$, тогда

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma (k_\sigma)_D}.$$

9. Определить допускаемое амплитудное усилие

$$p_a = F_{\min} \sigma_a = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma (k_\sigma)_D}.$$

10. Найти среднее усилие

$$p_c = p_a \frac{1 + R}{1 - R}.$$

11. Определить максимальное и минимальное усилие цикла

$$p_{\max} = p_a + p_c;$$

$$p_{\min} = p_{\max} R.$$

Наконец, рассмотрим *порядок определения запаса прочности* для вращающегося круглого трубчатого вала с поперечным отверстием для смазки δ , испытывающего переменный изгиб при симметричном цикле с заданным $M_{\max} = M_a$ совместно с переменным кручением с $M_{\text{кр max}}$ при известной асимметрии цикла R . Известен наружный D и внутренний d диаметры вала, материал вала ($\sigma_B, \sigma_T, \sigma_{-1}, \tau_{-1}$), а также качество механической обработки поверхности вала.

Задачу следует решать в таком порядке.

1. Определить номинальные напряжения в вале от изгиба и кручения (разделы 9.1, 10.1)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W};$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max}, \sigma_c = 0;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_\rho};$$

$$\tau_{\min} = R \tau_{\max};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2};$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2}.$$

2. Определить коэффициент концентрации при изгибе при известном δ/D (рис. 188).

3. Определить по графику (рис. 367) при найденном α_σ и известном σ_B коэффициент чувствительности к концентрации напряжений q_σ и найти эффективный коэффициент концентрации при изгибе

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1).$$

4. Выбрав по графику (рис. 369) ϵ , а по графику (рис. 373) — β , определить эффективный коэффициент концентрации для детали

$$(k_\sigma)_D = \frac{k_\sigma}{\epsilon\beta}.$$

5. Определить запас прочности при изгибе по формуле

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \sigma_a}$$

(так как для рассматриваемого случая $\sigma_c = 0$).

6. Установить коэффициент концентрации при кручении α_τ , а также, приняв $q_\tau \approx q_\sigma$, определить эффективный коэффициент концентрации при кручении

$$k_\tau = 1 + q_\tau (\alpha_\tau - 1).$$

Приняв те же значения ϵ и β , что и при изгибе, найти эффективный коэффициент концентрации для детали при кручении

$$(k_\tau)_D = \frac{k_\tau}{\epsilon\beta}.$$

7. Определить запас прочности при кручении

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_D \tau_a + \psi_\tau \tau_c}.$$

8. Вычислить общий коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}.$$

В Приложении 1 приведены данные о пределе выносливости основных конструкционных материалов.

20.5. Понятие о малоцикловой усталости материалов

Во многих реальных инженерных конструкциях наблюдается разрушение после относительно небольшого числа циклов нагружения, выражаемого несколькими тысячами. При этом в материале могут происходить явления, типичные для усталости (возникновение и развитие трещины). Поэтому разрушение материала при сравнительно небольшом числе циклов нагружения ($10^2 - 10^5$) называют *малоцикловой усталостью*. Это является определенным упрощением, так как для конструкционных пластичных материалов при числе циклов до $10^3 -$

— $2 \cdot 10^4$ может иметь место квазистатическое разрушение. Разрушение от малоциклового усталости обычно происходит при значительной (около 1 %) пластической циклической деформации в макрообъемах рассматриваемого элемента конструкции.

Расчеты элементов конструкций на малоцикловую усталость базируются на экспериментальных данных изучения закономерностей сопротивления деформированию и разрушению при циклическом упруго-пластическом деформировании, а также исследованиях кинетики неоднородного напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений в зонах концентраций — местах вероятного разрушения.

Сопротивление материалов циклическому упруго-пластическому деформированию обычно изучают при однородном напряженном состоянии, используя два основных вида нагружения: мягкое — при постоянной амплитуде напряжений и жесткое — при постоянной амплитуде деформаций.

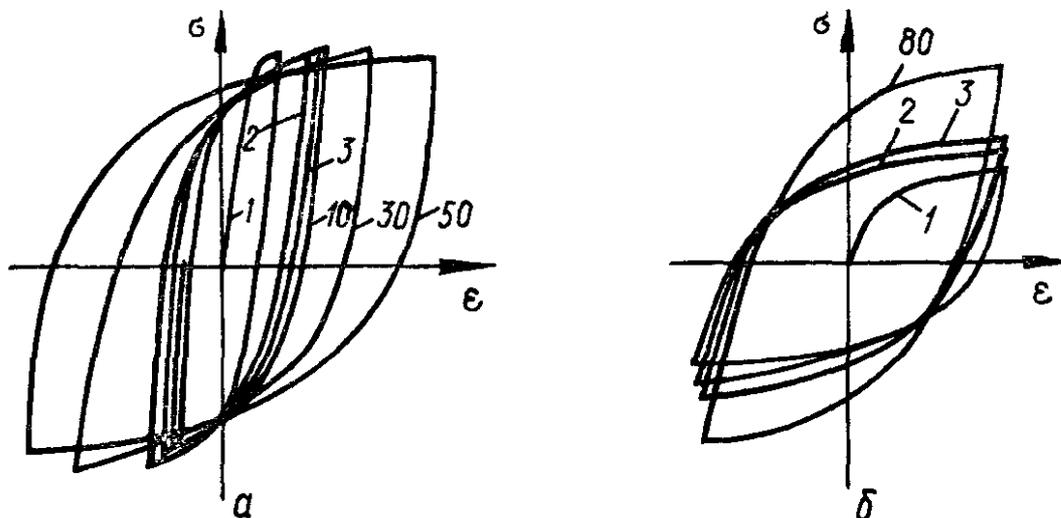


Рис. 378

Процесс упруго-пластического деформирования при малоцикловом нагружении исследуется обычно путем построения петель гистерезиса в координатах напряжение— деформация. Схематическое представление таких петель для указанных основных видов нагружения приведено на рис. 378 (*a* — мягкое нагружение, *b* — жесткое нагружение), где цифры указывают на номера циклов нагружения.

Мягкое нагружение. На рис. 379 для случая одноосного растяжения—сжатия диаграмма циклического деформирования при мягком нагружении построена в относительных координатах $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_T$; $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_T$. Здесь в качестве предела текучести σ_T обычно принимают предел пропорциональности в исходном полуцикле, обозначаемом нулевым; ϵ_T — относительная деформация, соответствующая пределу текучести (пропорциональности).

После исходного деформирования *OAB* и разгрузки *BC*, реверсивного деформирования *CDL* и разгрузки *LM* образуется, вообще говоря, незамкнутая петля упруго-пластического деформирования первого полуцикла: ее ширина обозначена через $\bar{\delta}^{(1)}$. При дальнейшем повторении нагружения и разгрузки получим кривые циклического деформирования в различных полуциклах и соответствующие им петли шириной $\bar{\delta}^{(k)}$.

Переход к нелинейному участку диаграммы в k -м полуцикле наблюдается при напряжениях и деформациях, равных $\bar{\sigma}_T^{(k)}$ и $\bar{\epsilon}_T^{(k)}$. Эти величины являются пределами текучести (пропорциональности) в данном полуцикле и соответствующими им деформациями.

В зависимости от свойств материала в процессе циклического упруго-пластического деформирования пределы текучести (пропорциональности) и форма кривых деформирования могут изменяться. Так, для большого количества металлов и сплавов при растяжении образца напряжением, превышающим предел текучести (пропорциональности) при последующей разгрузке и реверсивном деформировании, т. е. при сжатии, предел текучести (пропорциональности) оказывается ниже исходного. Это явление, названное *эффектом Баушингера*, наблюдается не только при растяжении — сжатии, но и при других видах напряженного состояния.

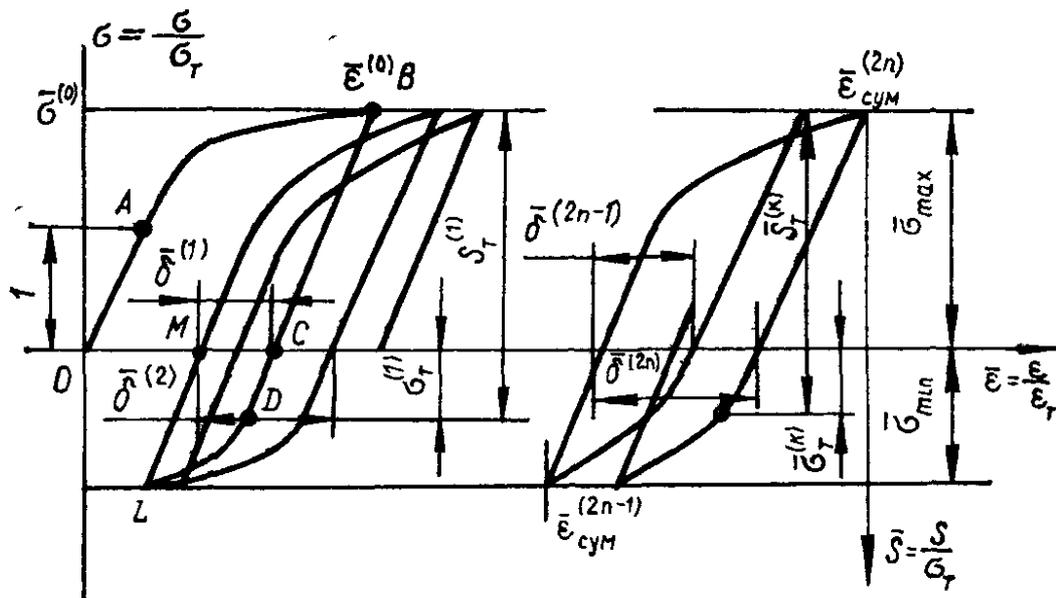


Рис. 379

Для объяснения эффекта Баушингера был предложен ряд моделей. Наиболее вероятной причиной изменения пределов упругости, пропорциональности и условного предела текучести при реверсивном нагружении, по-видимому, являются остаточные ориентированные микронапряжения, возникающие в предшествующей пластической деформации. Они и способствуют более раннему возникновению пластической деформации при повторной нагрузке другого знака.

Модель Мазинга — одна из первых моделей. Мазинг рассмотрел реверсивное деформирование поликристаллического образца в предположении, что зерна, обладая анизотропией свойств, различным образом ориентированы по отношению к деформирующей нагрузке, деформируются по-разному и имеют различные пределы текучести. Эта модель позволила установить следующую зависимость предела текучести при первом реверсивном нагружении для симметричного цикла от величины исходного напряжения в нулевом полуцикле, т. е. от степени предшествующей деформации:

$$\bar{\sigma}_T^{(1)} = \bar{\sigma}^{(0)} - \bar{S}_T^{(1)} \quad \text{при } \bar{S}_T^{(1)} = 2, \quad (20.29)$$

где $\bar{S}_T^{(1)}$ — предел текучести (пропорциональности) при разгрузке,

Однако, как показали многочисленные эксперименты, для многих материалов предел текучести (пропорциональности) при разгрузке $\bar{\sigma}_T^{(1)} \neq 2$. Значения $\bar{\sigma}_T$ для некоторых материалов приведены ниже.

Материал	$\bar{\sigma}_T$	α	β	A	k*
Сталь					
45 (нормализованная)	1,13	0	—	3,55	20—30
1X18H9T (аустенизация)	1,66	0,15	—	1,13	10
30ХГС (отжиг)	1,61	0,03	—	0,90	—
30ХГС (закалка, отпуск 953К)	1,34	—	0,01	1,2	—
30ХГС (закалка, отпуск 633К)	1,60	—	0,10	0,86	—
теплоустойчивая	1,45	—	0,02	1,93	—
Сплав					
В96 (естественное старение)	1,84	0,4	—	1,15	—
АК8 (искусственное старение)	1,67	0,28	—	1,35	—

При последующем циклическом деформировании сопротивление материалов упруго-пластическому деформированию изменяется, что ведет к изменению предела текучести (пропорциональности) $\bar{\sigma}_T^{(k)}$ (рис. 379). С увеличением числа циклов эта характеристика может возрастать или убывать в зависимости от свойств материалов (рис. 380; линия 1 соответствует сплаву Д16, 2 — стали 30ХГСА). Изменяется она и в зависимости от степени исходного деформирования $\bar{\epsilon}^{(0)}$. Однако для практических расчетов обычно принимают, что предел текучести (пропорциональности) не зависит от числа циклов и степени исходного деформирования.

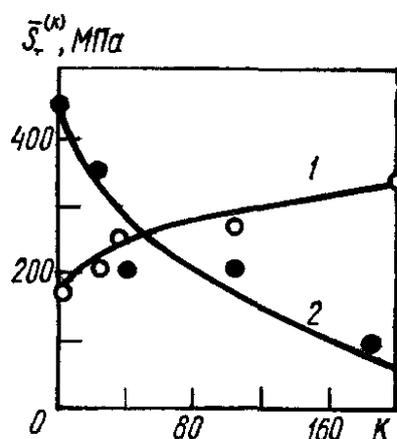


Рис. 380

Основным параметром в исследованиях малоциклового усталости при мягком нагружении является ширина петли гистерезиса — пластическая (остаточная) деформация $\bar{\delta}^{(2n-1)}$ для нечетных и $\bar{\delta}^{(2n)}$ для четных полуциклов (рис. 379). Разность ширины петель в двух соседних полуциклах характеризует накопленную за цикл одностороннюю пластическую деформацию.

Кинетика изменения ширины петли с числом циклов различна для разных материалов. Для циклически упрочняющихся материалов (например, стали 1X18H9T, алюминиевых сплавов В96, Д16Т, АД33, АК8) ширина петли с числом циклов уменьшается, а накопленная в процессе циклического деформирования пластическая деформация стремится к некоторой предельной величине. Для таких материалов, как показывают эксперименты, изменение ширины петли с числом полуциклов хорошо описывается зависимостью

$$\bar{\delta}^{(k)} = \frac{\bar{\delta}^{(1)}}{k^{(\alpha)}}, \quad (20.30)$$

где параметр $\alpha > 0$ зависит от материала и исходной деформации и возрастает с увеличением последней. В первом приближении, однако, его считают постоянным.

Ширина петли в первом полупериоде зависит от начальной деформации $\bar{\epsilon}^{(0)}$ и предела текучести $\bar{\sigma}_T^{(1)}$ и при симметричном цикле нагружения может быть представлена выражением

$$\bar{\delta}^{(1)} = A \left(\bar{\epsilon}^{(0)} - \frac{\bar{\sigma}_T^{(1)}}{2} \right). \quad (20.31)$$

Здесь A — константа материала, характеризующая сопротивление деформированию в первом полупериоде.

В случае циклически разупрочняющихся материалов (например, теплоустойчивых сталей, чугунов) ширина петли с числом полупериодов увеличивается, а также увеличивается суммарная деформация. Зависимость ширины петли от числа полупериодов достаточно хорошо описывается выражением

$$\bar{\delta}^{(k)} = \bar{\delta}^{(1)} \beta^{(k-1)}, \quad (20.32)$$

где β — константа материала, зависящая от степени исходного деформирования.

Для некоторых материалов константы α , β , A приведены выше.

В случае циклически стабильных материалов (например, среднеуглеродистых и аустенитных сталей) ширина петли упруго-пластического гистерезиса практически не зависит от числа циклов деформирования. При различной ширине петель в четных и нечетных полупериодах происходит одностороннее накопление деформации. Для материалов, стабилизирующихся при определенном числе полупериодов $k = k^*$, ширина петли определяется по формуле (20.30) при $k = k^*$.

Деление материалов на циклически упрочняющиеся, стабильные и разупрочняющиеся несколько условно, так как поведение определенного материала при циклическом деформировании зависит от температуры, его исходного состояния (наклеп, термообработка) и других факторов. Например, наклеп — предварительное пластическое деформирование при комнатной температуре — ведет к циклическому разупрочнению. То же происходит и при закалке. Так что в нестабильном состоянии материал циклически разупрочняется. В то же время в стабильном состоянии (отжиг) наблюдается циклическое упрочнение.

Пластические свойства материала после определенного числа циклов нагружения характеризует суммарная пластическая деформация, накопленная за k полупериодов. Она связана с шириной петли в четных и нечетных циклах (рис. 379) выражением

$$\bar{\epsilon}^{(k)} = \bar{\epsilon}^{(0)} - \bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \bar{\delta}^{(k)}. \quad (20.33)$$

Жесткое нагружение. При таких испытаниях за счет перераспределения упругой и пластической составляющих деформации максимальные напряжения от цикла к циклу могут измениться. В качестве примера на рис. 381 приведены результаты испытания сплава В96

Кинетика изменения максимальных напряжений зависит от свойств материала и находится в соответствии с поведением различных групп материалов при быстром нагружении. Так, в случае циклически упрочняющихся материалов при жестком нагружении амплитуда напряжений вначале возрастает, а в случае циклически разупрочняющихся — постепенно снижается. Однако эти процессы сравнительно быстро замирают и можно говорить о существовании предельного *асимптотического размаха* напряжений, или *размаха «насыщения»*, зависящего от размаха циклической деформации. Обычно он берется при числе циклов, равном половине разрушающего, т. е. при средней долговечности.

Разрушение при циклическом упруго-пластическом деформировании. Сопротивление разрушению при циклическом деформировании существенно зависит от характера нагружения (мягкое или жесткое) и циклических деформационных свойств материала.

При мягком нагружении циклически разупрочняющихся или стабильных металлов накапливаются пластические деформации, которые могут привести к двум типам разрушения — квазистатическому и усталостному. Квазистатическое связано с возрастанием остаточных деформаций до уровня, соответствующего разрушению при однократном статическом нагружении. Разрушение усталостного характера связа-

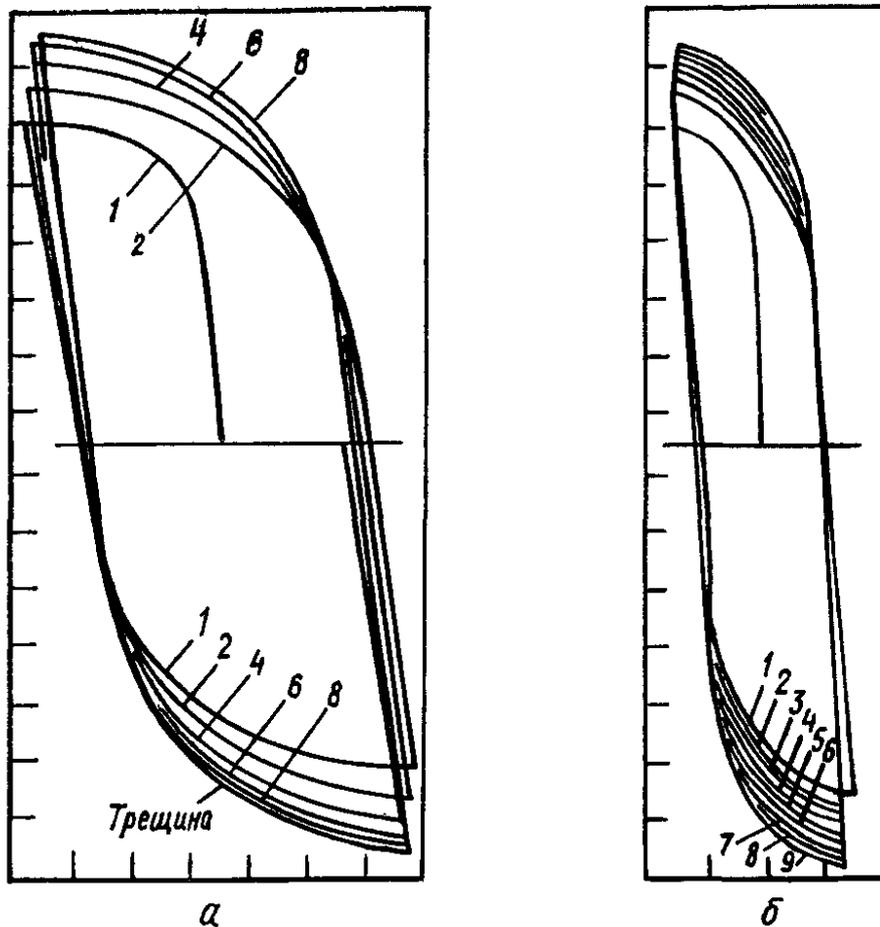


Рис 381

но с накоплением повреждений, образованием прогрессирующих трещин при существенно меньшей пластической деформации. Возможны и промежуточные формы разрушения, когда образуются трещины усталости на фоне заметных пластических деформаций

Циклически упрочняющиеся материалы разрушаются только от усталости. Для них кривая усталости в интервале числа циклов 10^2 — 10^4 достаточно хорошо описывается эмпирическим уравнением

$$\sigma_a N^\mu = \text{const}, \quad (20.34)$$

где σ_a — амплитуда напряжения; μ — показатель степени; N — число циклов до разрушения

Для квазистатического разрушения в качестве критерия перехода в предельное состояние принимают величину накопленной пластической деформации $\bar{\epsilon}_B$ (20.33) при циклическом нагружении, соответ-

ствующую разрушению при однократном статическом нагружении, т. е.

$$\bar{\epsilon}_{\text{пл}}^{(k)} = \bar{\epsilon}_B. \quad (20.35)$$

Зная циклические параметры материала, из формулы (20.35) можно с учетом выражений для накопленной деформации (20.33) и ширины петли гистерезиса (20.30) определить для заданной амплитуды напряжений число циклов до разрушения.

При жестком нагружении нет накопления деформаций, что исключает возможность квазистатического разрушения. В этом случае все материалы разрушаются по усталостному типу с образованием трещин.

Эксперименты с различными материалами показали, что зависимости между размахом пластической деформации за цикл $\epsilon_{\text{пл}} = 2\epsilon_{a \text{ пл}}$ и числом циклов до разрушения в двойных логарифмических координатах близки к линейным. Это явилось основанием для следующего эмпирического соотношения между циклической долговечностью N и размахом пластической деформации за цикл (формула Мэнсоча—Коффина):

$$\epsilon_{\text{пл}} N^m = M, \quad (20.36)$$

где m и M — константы материала.

Показатель степени m для большинства материалов можно принять приблизительно равным 0,5. Постоянную M легко определить в предположении, что формула (20.36) справедлива и при однократном нагружении до разрушения, т. е. при $N = 1/4$ и $\epsilon_{\text{пл}} = \epsilon_B$, где ϵ_B — истинная деформация при статическом разрыве. Тогда $M = \frac{1}{2} \epsilon_B$ и

$$\epsilon_{\text{пл}}^- N^{0,5} = \frac{1}{2} \epsilon_B. \quad (20.37)$$

С учетом истинной деформации формула (20.36) принимает вид

$$\epsilon_{a \text{ пл}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{пл}} = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1 - \Psi} N^{-0,5}. \quad (20.38)$$

Уравнения (20.36) — (20.38) можно считать основными зависимостями для оценки долговечности при малом числе циклов нагружения, когда преобладающее значение имеет сопротивление материала пластическим деформациям.

С увеличением числа циклов до разрушения, т. е. с уменьшением размаха пластической деформации, упругая часть деформации становится соизмеримой с пластической. В связи с этим предложены критерии малоциклового разрушения в упругих и суммарных деформациях.

Опыты со многими материалами показывают, что в области долговечности $10—10^6$ циклов имеет место следующая зависимость между размахом упругой деформации за цикл, вычисленной в результате деления асимптотического размаха напряжения (соответствующего циклической долговечности N) на модуль упругости E , и числом циклов до разрушения:

$$\epsilon_y = \frac{L}{E} N^{-\kappa}, \quad (20.39)$$

где L и κ — постоянные материала.

Из уравнений (20.36) и (20.39) можно получить зависимость между размахом полной деформации и циклической долговечностью

$$\varepsilon = \varepsilon_{пл} + \varepsilon_y = MN^m + \frac{L}{E} N^k. \quad (20.40)$$

В области малых долговечностей основное значение имеет пластическая деформация, так как упругая составляющая деформации незначительна и суммарная деформация асимптотически приближается к прямой пластической составляющей (рис. 382). При больших долговечностях становится незначительной роль убывающей пластической деформации, в то время как упругая деформация вследствие малого наклона линии ε_y сохраняет высокое значение; линия суммарной деформации асимптотически приближается к прямой упругой деформации. Переходная точка между двумя кривыми для большинства материалов находится в области 10^4 циклов.

При использовании критерия (20.40), как показали эксперименты, константы следует принять такими:

$$m = 0,6; k = 0,12; M = \varepsilon_B^{0,6}; L = 3,5\sigma_B,$$

где σ_B — предел прочности.

Следовательно,

$$\varepsilon = 2\varepsilon_a = \left(\ln \frac{1}{1-\Psi} \right)^{0,6} N^{-0,6} + 3,5 \frac{\sigma_B}{E} N^{-0,12}. \quad (20.41)$$

Предельную упругую деформацию можно выразить также через параметры кривой усталости: предел выносливости σ_{-1} при выбранном базовом числе циклов N_δ и показателе степени кривой усталости μ . Подставив эти значения в выражение (20.34), найдем значение константы в правой части уравнения

$$\sigma_a N^\mu = \sigma_{-1} N_\delta^\mu.$$

Следовательно, условная упругая деформация

$$\varepsilon_{ay} = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma_{-1}}{E} N_\delta^\mu N^{-\mu}. \quad (20.42)$$

Уравнение кривой усталости при жестком нагружении принимает вид

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{апл} + \varepsilon_{ay} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\Psi} N^{-0,5} + \frac{\sigma_{-1}}{E} N_\delta^\mu N^{-\mu}. \quad (20.43)$$

Эмпирические формулы (20.42) и (20.43) позволяют с достаточной точностью оценить долговечность материалов в довольно широком диапазоне перемен упруго-пластических деформаций.

Термическая усталость. Разрушение элементов конструкций может быть вызвано действием температурных напряжений от повторяющихся нагревов и охлаждений, обусловленных тепловым процессом машины и внешним воздействием. Такое разрушение деталей при сравнительно небольшом числе циклов (10^2 — 10^5) называют *термиче-*

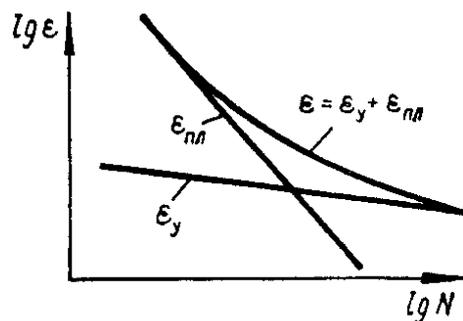
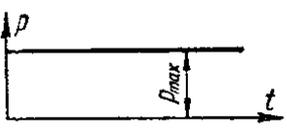
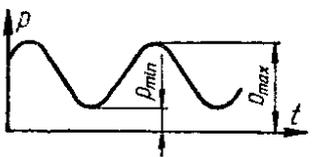
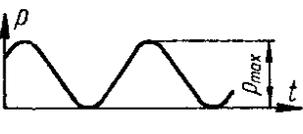
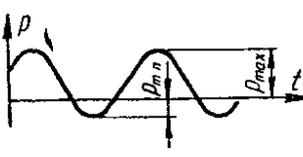
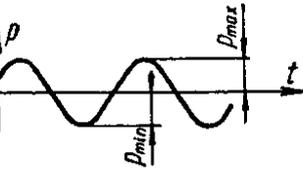
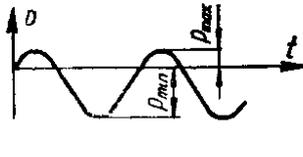
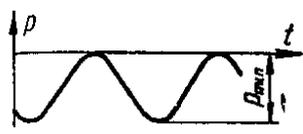
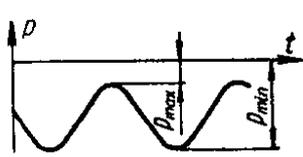


Рис. 382

Таблица 58 Характеристики циклов повторно-переменного нагружения

Наименование цикла	p_{\max} p_{\min}	$p_c = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$ $p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}$	$R = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$
<p>Постоянный положительный</p> 	$p_{\max} = p_{\min} > 0$	$p_c = p_{\max} = p_{\min} > 0$ $p_a = 0$	$R = +1$
<p>Ассиметричный положительный</p> 	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} > 0$	$p_c > 0$ $p_a \neq 0$	$0 < R < +1$
<p>Пульсирующий положительный</p> 	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} = 0$	$p_c = \frac{1}{2} p_{\max}$ $p_a = \frac{1}{2} p_{\max}$	$R = 0$
<p>Несимметричный</p> 	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c > 0$ $p_a \neq 0$	$-1 < R < 0$
<p>Симметричный</p> 	$p_{\max} = -p_{\min}$ $p_{\min} < 0$	$p_c = 0$ $p_a = p_{\max}$	$R = -1$
<p>Несимметричный</p> 	$p_{\max} > 0$ $p_{\min} < 0$ $p_{\max} < p_{\min} $	$p_c < 0$ $p_a \neq 0$	$-\infty < R < -1$

Наименование цикла	$p_{\max}; p_{\min}$	$p_c = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$ $p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}$	$R = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$
Пульсирующий отрицательный 	$p_{\max} = 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c = \frac{1}{2} p_{\min}$ $p_a = \frac{1}{2} p_{\min} $	$R = -\infty$
Несимметричный отрицательный 	$p_{\max} < 0$ $p_{\min} < 0$	$p_c < 0$ $p_a \neq 0$	$+1 < R < +\infty$
Постоянный отрицательный 	$p_{\max} = p_{\min} < 0$	$p_{\max} = p_{\min} = p_c < 0$ $p_a = 0$	$R = +1$

ской усталостью или термоусталостью, которая является частным случаем неизотермической малоцикловой усталости. Сопротивление такому виду разрушения называют *термической прочностью*.

Наиболее полно термическая прочность материала и деталей оценивается по результатам специальных циклических испытаний по режимам, приближенно соответствующим типичным эксплуатационным циклам. При испытаниях материала нагружение образца осуществляется за счет стеснения теплового расширения при его циклическом нагреве (охлаждении). Наиболее распространенной схемой испытания является защемление циклически нагреваемого образца с варьированием жесткости его закрепления (*метод Коффина*).

При испытаниях на термическую усталость строят кривые усталости (рис 382) в координатах размах полиой ϵ или пластической $\epsilon_{\text{пл}}$ деформации — число циклов N до разрушения (образования макротрещины), а также изменение напряжений с числом циклов (полуциклов) нагружения при данных максимальной температуре цикла, размахе температуры цикла, асимметрии цикла и длительности выдержки в цикле при экстремальной температуре.

РАСЧЕТ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

21.1. Расчет на удар при осевом действии нагрузки

Влияние ударного действия нагрузки на величину деформаций или напряжения принято оценивать коэффициентом динамичности

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}, \quad (21.1)$$

где $\delta_{ст}$ — деформация упругого элемента (рис. 383, а) при статическом приложении нагрузки Q (при постепенном увеличении нагрузки от нуля до ее конечного значения); δ_d — деформация (рис. 383, б) при ударном приложении нагрузки (предположим, при падении груза Q с высоты H).

Динамическая деформация может быть выражена через статическую формулой

$$\delta_d = k_d \delta_{ст}.$$

По аналогии установим связь между динамическим и статическим напряжениями:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = k_d \frac{Q}{F}. \quad (21.2)$$

Чтобы воспользоваться формулой (21.2) необходимо знать коэффициент динамичности k_d .

При определении коэффициента динамичности исходят из допущения, что связь между усилиями и деформациями сохраняется одинаковой как при статической $P_{ст}$, так и при динамической P_d нагрузках, т. е.

$$\delta_{ст} = \frac{P_{ст}}{c};$$

$$\delta_d = \frac{P_d}{c},$$

где $c = EF/l$ — жесткость стержня.

Вывод формулы для определения коэффициента динамичности базируется на законе сохранения энергии. Изменение потенциальной энергии груза T при падении с высоты H и прохождении пути $H + \delta_d$ будет

$$T = Q(H + \delta_d). \quad (21.3)$$

Потенциальная энергия деформации стержня, накопленная при ударе, может быть выражена формулой

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \delta_d = \frac{c \delta_d^2}{2}. \quad (21.4)$$

На основании закона сохранения энергии запишем

$$T = U_d$$

или

$$\frac{c \delta_d^2}{2} = Q(H + \delta_d). \quad (21.5)$$

Учитывая, что $\delta_{ст} = Q/c$, уравнение (21.5) можно представить так:

$$\delta_d^2 - 2\delta_{ст}\delta_d - 2\delta_{ст}H = 0.$$

Отсюда определим неизвестную динамическую деформацию

$$\delta_d = \delta_{ст} \pm \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2\delta_{ст}H}.$$

Сохраняя в соответствии с физическим смыслом задачи знак плюс, последнюю формулу можем представить в виде

$$\delta_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right). \quad (21.6)$$

Таким образом, в соответствии с (21.2) находим выражение коэффициента динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}. \quad (21.7)$$

Если учесть, что $H = v^2/2g$ (v — скорость падающего груза в начале удара), то получим

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}}. \quad (21.8)$$

Так как $2H/\delta_{ст} = T_0/U_{ст}$ (где $T_0 = QH = Qv^2/2g$ — кинетическая энергия падающего груза к моменту соударения; $U_{ст} = \frac{1}{2} Q\delta_{ст}$ — потенциальная энергия деформации стержня при статическом приложении нагрузки Q), коэффициент динамичности можно также выразить формулой

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст}}}. \quad (21.9)$$

При $H = 0$ имеем $k_d = 2$. Поскольку, как правило, $H \gg \delta_{ст}$, то в выражении для k_d можно пренебречь единицей по сравнению со вторым слагаемым. Тогда получим

$$k_d \approx 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{ст}}}. \quad (21.10)$$

Динамическое напряжение при ударе согласно (21.2)

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = \sigma_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right) \approx \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{lF}}. \quad (21.11)$$

Динамическая нагрузка при ударе

$$P_d = \sigma_d F = k_d \sigma_{ст} F = Q \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right). \quad (21.12)$$

Из анализа формулы (21.11) видно, что при равномерном распределении напряжений по длине стержня, т. е. когда стержень имеет постоянное сечение, величина динамических напряжений зависит не только от площади поперечного сечения стержня F , как это имеет место при действии статической нагрузки в статически определенных системах, но и от его длины l и модуля упругости материала E . При этом, чем больше объем материала, подвергаемого удару упругого стержня, тем меньше возникающие в нем динамические напряжения

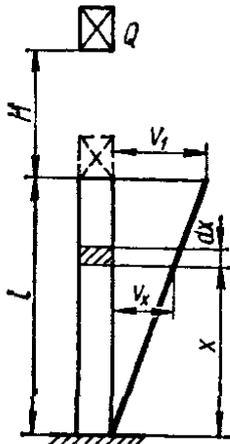


Рис. 384

С другой стороны, снижение напряжений при ударе в стержне с выточкой может быть достигнуто путем уменьшения объема упругого элемента за счет уменьшения площади утолщенной части и увеличения тем самым деформативности стержня. Этой же цели можно достигнуть, взяв материал с более низким модулем упругости, выровняв площади поперечного сечения по длине стержня, увеличив длину стержня, а также путем включения буферных пружин.

Учет массы стержня, испытывающего удар, может быть осуществлен в предположении, что после смятия и снижения скорости груза на первом этапе от v до v_1 , равной скорости движения верхнего сечения стержня в начале второго этапа удара, скорость нижележащих сечений уменьшается по линейному закону, падая до нуля в нижнем сечении (рис. 384), т. е. скорость в любом сечении стержня на расстоянии x от нижнего конца будет

$$v(x) = v_1 \frac{x}{l}.$$

Соответствующая кинетическая энергия элементарного участка стержня длиной dx в рассматриваемом сечении

$$dT_c = \frac{\gamma F dx}{2g} \left(v_1 \frac{x}{l} \right)^2,$$

а полная кинетическая энергия ударяемого стержня может быть выражена формулой

$$T_c = \frac{\gamma F v_1^2}{2g l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma Fl v_1^2}{3 \cdot 2g},$$

или

$$T_c = \frac{Q_c v_1^2}{3 \cdot 2g},$$

где $Q_c = \gamma Fl$ — собственный вес ударяемого стержня.

Выразим потерю энергии на смятие материала в месте соударения груза и стержня в течение первого этапа удара (когда скорость изменяется от $v = \sqrt{2gH}$ до v_1) формулой

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{Q_c v_1^2}{3 \cdot 2g} \right) = \frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{Q_c}{3Q} \right) \right]. \quad (21.13)$$

Эту же потерю энергии можно выразить так:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{2g} (0 - v_1)^2 = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left(1 + \frac{Q_c}{3Q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Приравняв правые части формул (21.13) и (21.14) и решив полученное уравнение относительно v_1 , найдем

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q}}. \quad (21.15)$$

Таким образом, кинетическая энергия, которая при ударе переходит в энергию деформации ударяемого стержня, будет

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \frac{Q_c v_1^2}{2g} = \frac{Qv^2}{2g \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right)}. \quad (21.16)$$

Подставим в (21.9) вместо T_0 полученное значение T , выразим коэффициент динамичности формулой

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{ст}}},$$

или

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qv^2}{2g \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) U_{ст}}}. \quad (21.17)$$

Учитывая, что $v^2/2g = H$; $HQ = T_0$, и обозначая $Q_c/Q = \beta$, формулу (21.17) переписываем в виде

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст} \left(1 + \frac{1}{3} \beta \right)}}. \quad (21.18)$$

Максимальное напряжение при ударе определится формулой

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = \sigma_{ст} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст} \left(1 + \frac{1}{3} \beta \right)}} \right],$$

или

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EFH}{Ql \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Fl\gamma}{Q} \right)}} \right].$$

Значения коэффициента, учитывающего массу ударяемого элемента, для некоторых частных случаев приведены в табл. 59.

21.2. Напряжение при скручивающем ударе

В случае ударного кручения, осуществляемого, например, по схеме, приведенной на рис. 385, максимальные динамические напряжения в вале τ_d определяются по формуле

$$\tau_{d\max} = k_d \tau_{ст\max}, \quad (21.19)$$

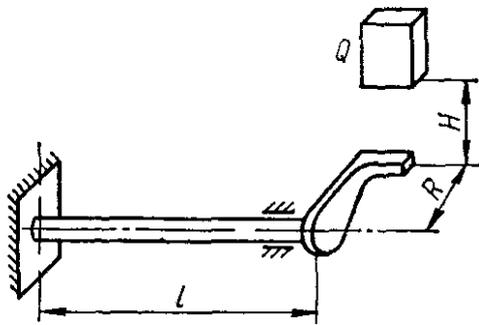


Рис. 385

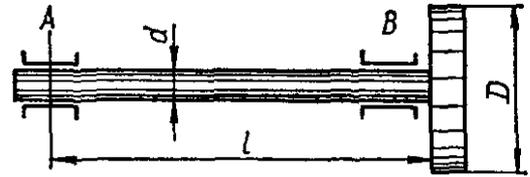


Рис. 386

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}; \quad (21.20)$$

$$\delta_{ст} = \varphi R = \frac{M_{кр} l}{GJ_p} R = \frac{QR^2 l}{GJ_p};$$

$$\tau_{ст\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{QR}{W_p}.$$

Здесь H — высота падения груза; Q — вес падающего груза; R — радиус кривошипа; l — длина вала; J_p , W_p — полярные момент инерции и момент сопротивления сечения вала.

Динамические напряжения, возникающие в вале при резком торможении быстро вращающегося маховика (рис. 386), имеющего запас кинетической энергии T_0 , можно найти также исходя из закона сохранения энергии

$$T_0 = U_d, \quad (21.21)$$

где U_d — потенциальная энергия деформации вала при ударном кручении.

Учитывая, что

$$U_d = \frac{1}{2} M_{кр. д} \varphi_d = \frac{M_{кр. д}^2 l}{2GJ_p}, \quad (21.22)$$

и то, что

$$\tau_{\text{дmax}} = \frac{M_{\text{кр.д}}}{W_{\rho}}$$

или

$$M_{\text{кр.д}} = \tau_{\text{дmax}} W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \tau_{\text{дmax}},$$

можно записать

$$U_{\text{д}} = \frac{\tau_{\text{дmax}}^2 \pi^2 d^6 l}{16^2 G J_{\rho}^2} = \frac{\tau_{\text{дmax}}^2 l F}{4G}. \quad (21.23)$$

Подставив (21.23) в (21.21) и решив полученное уравнение относительно искомого максимального динамического напряжения, получим

$$\tau_{\text{дmax}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}}, \quad (21.24)$$

где кинетическая энергия маховика весом Q , вращающегося с угловой скоростью ω , определится формулой

$$T_0 = \frac{J}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{J}{2} \omega^2; \quad J = \frac{QD^2}{8g}$$

(D — диаметр маховика).

21.3. Расчет на удар при изгибе

Максимальные динамические напряжения при ударном изгибе могут быть определены по формуле

$$\sigma_{\text{дmax}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{стmax}},$$

где

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}},$$

($f_{\text{ст}}$ — статический прогиб в месте удара, зависящий от схемы нагружения и условий опирания).

В случае удара посередине балки с изгибной жесткостью сечения EJ (рис. 387) получим

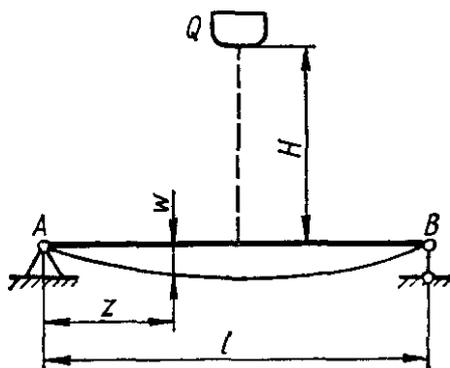


Рис. 387

$$f_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EJ}, \quad \sigma_{\text{стmax}} = \frac{M}{W} = \frac{Ql}{4W},$$

а максимальные динамические напряжения в этом случае будут

$$\sigma_{\text{дmax}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{стmax}} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Ql^3}} \right].$$

Обозначив $QH = T_0$, получим

$$\sigma_{\text{дmax}} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right). \quad (21.25)$$

Условие прочности в этом случае запишется так:

$$\sigma_{\text{дmax}} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right) < [\sigma_{\text{д}}], \quad (21.26)$$

где

$$[\sigma_{\text{д}}] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{д}}}$$

($n_{\text{д}}$ — запас прочности с учетом динамической нагрузки; $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала балки)

Учесть массу ударяемой балки можно, применив методнку, рассмотренную при продольном ударе. Будем полагать, что и конце первого этапа удара скорость балки в месте падения груза равна v_1 . Кинетическая энергия груза, очевидно, будет равна $Qv_1^2/2g$. Предположим также, что при ударе и при статическом приложении нагрузки (и нашем случае посредине пролета балки) изогнутая ось балки может быть описана одним и тем же уравнением

$$w = \frac{f}{l^3} (3l^2 z - 4z^3),$$

где $f = \frac{Ql^3}{48EJ}$ — стрела прогиба балки

Обозначив величину максимального прогиба посредине балки через w_{max} , величину прогиба в сечении на расстоянии z от левого конца балки определим по формуле

$$w = \frac{w_{\text{max}}}{l^3} (3l^2 z - 4z^3),$$

а скорость движения этого сечения — из выражения

$$v = \frac{dw}{dt} = \frac{dw_{\text{max}}}{dt} \frac{1}{l^3} (3l^2 z - 4z^3).$$

Кинетическая энергия элемента балки dz , находящегося на расстоянии z от левого конца балки, будет

$$dT_6 = \frac{v^2 \gamma F dz}{2g} = \frac{\gamma F}{2g} \left[\frac{dw_{\text{max}}}{dt} \frac{1}{l^3} (3l^2 z - 4z^3) \right]^2 dz,$$

а кинетическая энергия всей балки определится формулой

$$T_6 = 2 \int_0^{l/2} \frac{\gamma F}{2g} \left(\frac{dw_{\text{max}}}{dt} \right)^2 \frac{1}{l^6} (3l^2 z - 4z^3)^2 dz = \frac{17}{35} \frac{\gamma F l}{2g} \left(\frac{dw_{\text{max}}}{dt} \right)^2.$$

Поскольку в конце первого этапа удара скорость посредине балки будет равна v_1 , т. е.

$$\frac{dw_{\text{max}}}{dt} = v_1,$$

то кинетическая энергия балки в начале второго этапа удара будет

$$T_6 = \frac{17}{35} \frac{\gamma F l}{2g} v_1^2. \quad (21.27)$$

Выразив потерю энергии на смятие в месте удара за первый этап в виде

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 \right) = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right], \end{aligned} \quad (21.28)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} (0 - v_1)^2 = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[v - 2vv_1 + v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right], \end{aligned} \quad (21.29)$$

а затем, приравняв правые части уравнений (21.28) и (21.29) и решив полученное уравнение относительно v_1 , найдем

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q}}. \quad (21.30)$$

Кинетическая энергия системы (балка — груз), которая должна трансформироваться в энергию деформации балки при ударе, определится формулой

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 = \frac{Qv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q}}. \quad (21.31)$$

Обозначив

$$T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g},$$

формулу (21.31) может переписать в виде

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q}}. \quad (21.32)$$

Максимальное динамическое напряжение согласно формуле (21.25) после замены в ней T_0 на T определится так:

$$\sigma_{d\max} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2l^3}} \right),$$

или с учетом (21.32)

$$\sigma_{d\max} = k_d \sigma_{ст\max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}} \right], \quad (21.33)$$

где

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}}. \quad (21.34)$$

Таблица 59. Значения коэффициента α , учитывающего массу ударяемого элемента в формуле коэффициента динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}(1 + \alpha\beta)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}(1 + \alpha\beta)}};$$

H — высота падения ударяющего тела; v — скорость ударяющего тела в момент начала удара; $\delta_{ст}$ — деформация ударяемого упругого элемента при статическом приложении силы, равной весу ударяющего тела; $\beta = \frac{Q_{эл}}{Q}$, где $Q_{эл}$ — вес ударяемого элемента, Q — вес ударяющего тела; g — ускорение свободного падения

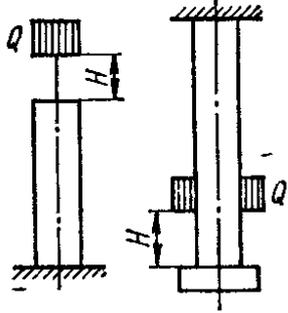
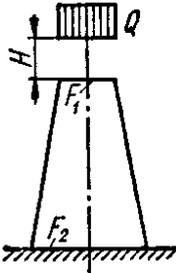
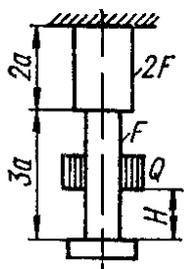
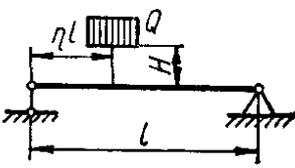
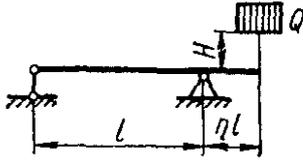
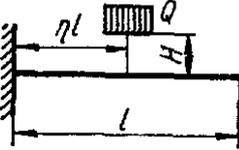
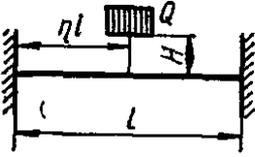
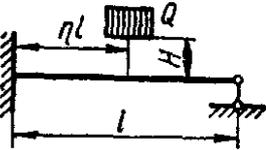
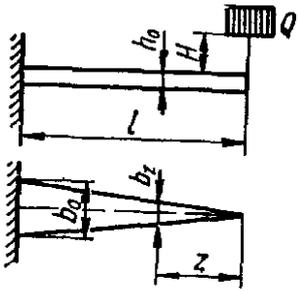
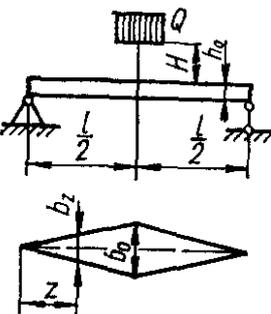
Схема упругого элемента и характер его нагружения	α
	1/3
	$\frac{F_1}{F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 F_2}}$
	$\frac{67}{336}$
	$\frac{2 + 4\eta - \eta^2 - 6\eta^3 + 3\eta^4}{105\eta^2(1 - \eta)^2}$

Схема упругого элемента и характер его нагружения	α
	$\frac{8 + \eta^3 (140 + 231\eta + \eta^2)}{420 (1 + \eta)^3 \eta^2}$
	$\frac{105 - 105\eta + 35\eta^2 - 2\eta^3}{140\eta^2}$
	$\frac{24 - 24\eta - 4\eta^2 + 8\eta^3 - \eta^4}{35\eta^2 (5\eta - 4 - \eta^2)^2}$
	$\frac{3 + \eta - \eta^2}{140\eta^2 (1 - \eta)^2}$
	$\frac{1}{15}$
	$\frac{11}{15}$

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

22.1. Общие понятия

Механика разрушения, или *механика распространения трещин*, как составная часть науки о механике деформируемого твердого тела изучает законы разделения твердых тел на части под действием напряжений.

Возможно частичное и полное разрушение тела. Кроме того, различают *хрупкое* и *вязкое (пластическое)* разрушение. Однако эти виды разрушения могут проявляться одновременно или последовательно, начинаясь, например, с пластического и переходя затем в хрупкое.

Хрупкое разрушение происходит в результате быстрого распространения трещины после незначительной пластической деформации или без нее. В последнем случае разрушение называют *идеально хрупким*. При хрупком разрушении скорость распространения трещины велика и составляет 0,2—0,5 скорости звука, а излом имеет кристаллический вид. Различают также *квазихрупкое* разрушение, при котором наблюдается некоторая пластическая зона перед краем трещины. Скорость распространения трещины практически того же порядка, что и при хрупком разрушении, и излом также является кристаллическим.

Вязкое разрушение происходит после существенной пластической деформации, протекающей по всему (или значительному) объему тела и является результатом исчерпания способности материала сопротивляться пластической деформации. Скорость распространения трещины мала, не превышает 0,05 скорости звука, излом имеет волокнистый вид.

Особо выделяют постепенное развитие трещины при повторно-переменном циклическом нагружении. Такому усталостному разрушению предшествует накопление в материале необратимого повреждения.

Особую практическую значимость имеет проблема хрупкого разрушения конструкций, обусловленного быстрым распространением трещин при средних напряжениях, не превышающих предел текучести материала и поэтому кажущихся безопасными. Это обстоятельство свидетельствует о недостаточности классических методов расчета конструкции на прочность по упругому и пластическому ее состояниям. Возникает необходимость в дополнении классических методов расчета на прочность новыми, учитывающими законы зарождения и развития трещин, а также во введении новых характеристик материала, по которым могла бы оцениваться его трещиностойкость.

Опыт эксплуатации реальных деталей показывает, что разрушение, состоящее из зарождения и развития трещины, возникает задолго до исчерпания несущей способности и достижения максимальной величины нагрузки, выдерживаемой деталью. Зачастую длительность процесса разрушения и результате роста трещины от начала ее возникновения до полного разрушения занимает до 90 и более процентов времени «жизни» детали. При этом прочность материала детали до конца не используется. Вот почему представляет большой интерес не столько факт возникновения трещины, сколько темп ее роста.

В связи с этим основными вопросами, изучаемыми в рамках механики разрушения, являются прочность тел с трещинами, распространение трещин, или кинетика развития трещин, геометрия трещин, или статика трещин, т. е. установление уравнений траекторий криволинейных (поверхностных) трещин и поверхностей излома.

22.2. Хрупкое разрушение

Хрупкое разрушение связано с возникновением в материале трещин, инициированных дефектами в структуре материала, состоянием поверхности, обусловленным технологией обработки или коррозией, действием повторно-переменных нагрузок (усталостные трещины) и т. п.

Возникшие трещины развиваются во времени сначала медленно, а потом быстро. Рост хрупких трещин во времени может иметь место и при постоянной нагрузке.

Первые основополагающие исследования развития хрупких трещин связывают с именем Гриффитса, впервые рассмотревшего условия развития единичной сквозной трещины в пластине бесконечной длины и единичной толщины, находящейся в условиях линейного напряженного состояния (рис. 388). При этом ставится задача установить, при каком значении внешнего напряжения σ , приложенного к концам пластины на бесконечности, трещина с начальной длиной $2l$ станет неустойчивой, т. е. начнет быстро распространяться при неизменном σ .

Вычисляем освобождаемую потенциальную энергию деформации пластины W при образовании в ней трещины длиной $2l$ с использованием решения плоской задачи теории упругости о растяжении полосы с эллиптическим отверстием.

Для плоского напряженного состояния

$$W = \frac{\pi \sigma^2 l^2}{E}. \quad (22.1)$$

Для плоской деформации

$$W = \frac{\pi (1 - \mu^2) \sigma^2 l^2}{E}, \quad (22.2)$$

где E — модуль упругости материала; μ — коэффициент Пуассона.

Введя поверхностную энергию Γ для образовавшихся двух свободных поверхностей трещины аналогично энергии поверхностного натяжения для жидкости

$$\Gamma = 4\gamma_{II}l, \quad (22.3)$$

где γ_{II} — удельная поверхностная энергия материала, можно определить энергию, необходимую для распространения трещины.

$$\Delta W = \Gamma - W. \quad (22.4)$$

Очевидно, если с увеличением длины трещины l не возрастает значение энергии ΔW или ее значение уменьшается (рис. 389), то трещина распространяется самопроизвольно.

Приравняв производную от ΔW по l нулю, можно определить критическое напряжение (формула Гриффитса):

для плоского напряженного состояния

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{2E\gamma_{II}}{\pi l_k}}; \quad (22.5)$$

для плоской деформации

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{2E\gamma_H}{\pi(1-\mu^2)l_k}}, \quad (22.6)$$

при котором происходит самопроизвольный, без совершения дополнительной работы внешними силами, рост имеющейся в теле трещины критической длиной l_k .

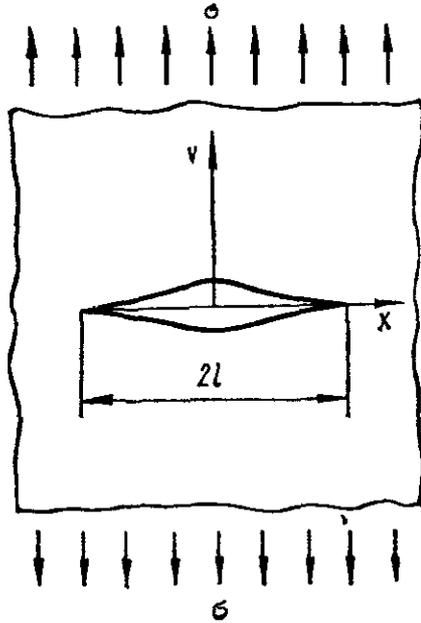


Рис. 388

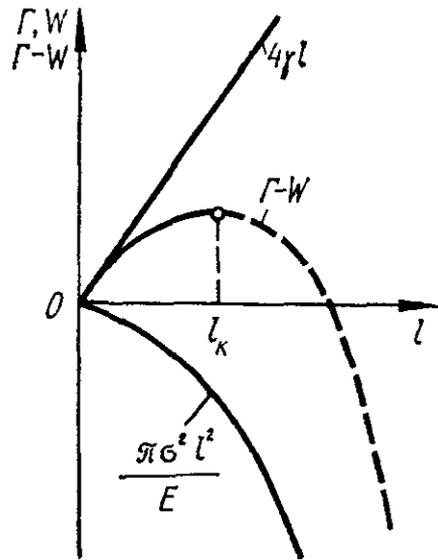


Рис. 389

Значение γ_H получают экстраполяцией на температуру плавления рассматриваемого материала по данным определения физическими методами удельного поверхностного натяжения для расплава исследуемого материала при разных температурах.

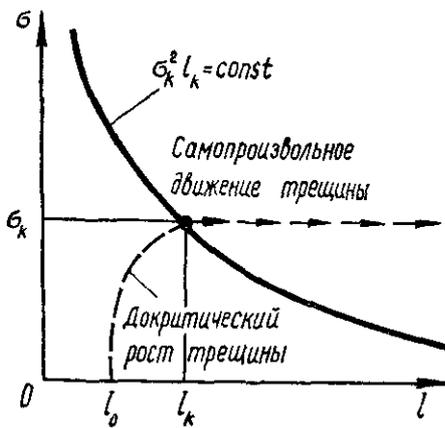


Рис. 390

Графическая иллюстрация зависимости критического напряжения от длины трещины представлена на рис. 390, на котором штриховой линией показан докритический рост трещины.

Теория Гриффитса позволяет выразить хрупкую прочность через физические и механические свойства материала и показывает, что разрушающая нагрузка имеет место не при возникновении начальной трещины, а после достижения трещиной некоторых критических размеров. Следует, однако, заметить, что безопасные, неразвивающиеся трещины могут перейти в опасные за счет

охрупчивания материала, вызванного понижением температуры, динамическим действием нагрузки, старением материала и т. п.

Вытекающее из выражений (22.5), (22.6) условие

$$\sigma_k^2 l_k = \text{const} \quad (22.7)$$

подтвердилось проведенными Гриффитсом опытами на пластинах из силикатного стекла.

В металлических материалах, в которых вблизи конца или вершины трещины образуется зона пластических деформаций, при распространении трещины происходит пластическое деформирование материала с последующей его разгрузкой, т. е. совершается необратимая работа $\Delta W = 4\gamma_{\text{п}}l$, которую по предложению Ирвина и Орована необходимо добавлять к энергии поверхностного натяжения Γ . При принятии $\gamma_{\text{п}}$ за половину необратимо поглощенной энергии пластического деформирования материала при продвижении трещины на единицу длины приведенные формулы (22.5), (22.6) сохраняются при замене $\gamma_{\text{н}}$ на $\gamma = \gamma_{\text{н}} + \gamma_{\text{п}}$. Обычно $\gamma_{\text{п}} \gg \gamma_{\text{н}}$.

22.3. Силовые критерии разрушения

Основы преобразования энергетического критерия Гриффитса в силовой критерий были заложены Ирвином, который предложил за критерий перехода к нестабильному разрушению принимать момент,

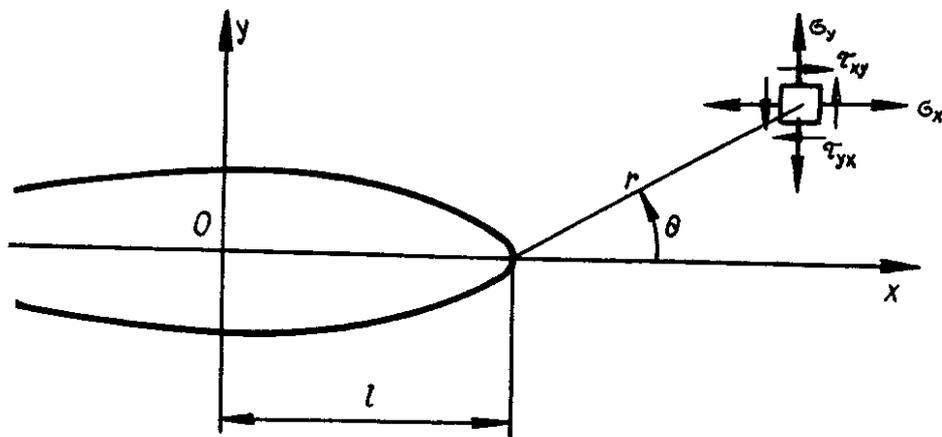


Рис. 391

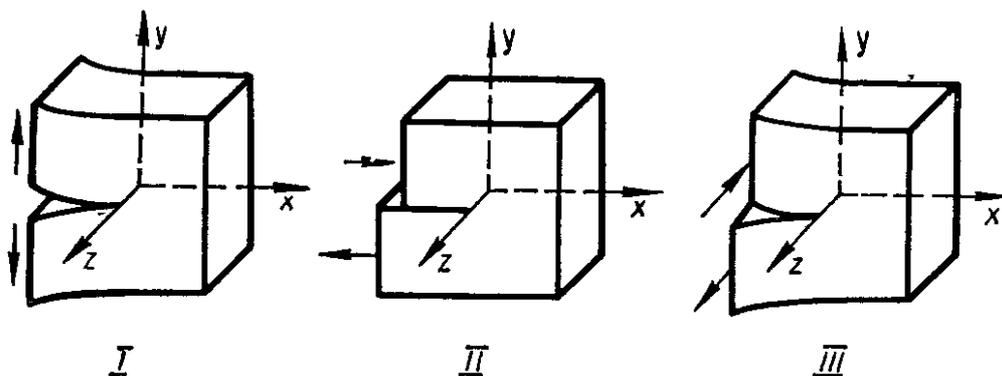


Рис. 392

когда в материале интенсивность напряжений у вершины трещины, определяемая методами теории упругости, достигает критического значения.

Составляющие поля напряжений τ_{ij} ($i, j = x, y$) у вершины трещины (рис. 391) можно представить формулой

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (22.8)$$

где K — коэффициент интенсивности напряжений у вершины трещины (его размерность — сила/длина^{3/2}); r и θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины и в плоскости, перпендикулярной к кромке трещины; f_{ij} — некоторая функция угла θ .

Обозначение коэффициента интенсивности напряжений производится в зависимости от типа деформации трещин.

Различают три простейших типа деформации трещины при действии различных внешних нагрузок (рис. 392). При деформации растяжения по схеме I возникает трещина нормального отрыва, когда поверхности трещины смещаются (расходятся) в перпендикулярном направлении. При деформации сдвига по схеме II возникает трещина поперечного сдвига, при котором поверхности трещины смещаются поперек ее передней кромки. При деформировании по схеме III образуются трещины продольного сдвига, при котором поверхности трещины смещаются вдоль ее передней кромки.

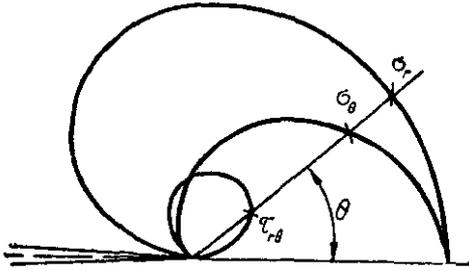


Рис. 393

В соответствии с приведенными схемами производится индексация коэффициентов интенсивности напряжений: K_I , K_{II} , K_{III} . Наибольший практический интерес представляет первая схема нагружения. В частности, при плоском напряженном состоянии для нагрузки по схеме I формулы (22.8) в развернутом виде могут быть представлены следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \quad (22.9)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \quad (22.10)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \quad (22.11)$$

Эпюра напряжений около вершины трещины отрыва ($0 \leq \theta \leq \pi$) показана на рис. 393.

Таким образом, интенсивность поля напряжений в окрестности вершины трещины в линейной механике разрушения контролируется единственным параметром K , являющимся функцией только характера внешнего нагружения, геометрии пластины и размеров трещины.

Для сквозной центрально расположенной трещины в пластине неограниченных размеров коэффициент интенсивности напряжений в зависимости от схемы деформирования трещины (рис. 392) определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi l}; \\ K_{II} &= \tau \sqrt{\pi l}; \\ K_{III} &= \tau \sqrt{\pi l}, \end{aligned} \quad (22.12)$$

где σ , τ — однородные растягивающие и касательные напряжения на бесконечном контуре пластины.

Для трещин другого расположения или пластин ограниченных размеров коэффициенты интенсивности напряжений записываются в виде

$$\begin{aligned} K_I &= f_I \sigma \sqrt{\pi l}; \\ K_{II} &= f_{II} \tau \sqrt{\pi l}; \\ K_{III} &= f_{III} \tau \sqrt{\pi l}, \end{aligned} \quad (22.13)$$

где f_I, f_{II}, f_{III} — некоторые поправочные коэффициенты, выражения которых для ряда схем расположения трещин и нагрузок (рис. 394) приведены ниже.

Схема нагружения и расположения трещины	Поправочный коэффициент
Неограниченная пластина при растяжении с наклонной трещиной в середине (а)	$f_I = \sin^2 \beta$
То же с односторонней трещиной (б)	$f_I = 1,12$
Пластина шириной $2B$ с поперечной трещиной посередине (в) при растяжении и сдвиге (по схеме II)	$f_I = f_{II} = \sqrt{\frac{2B}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2B}}$
То же с двумя боковыми трещинами (г)	$f_I = f_{II} = \sqrt{\frac{0,2B}{\pi l} \sin \frac{\pi l}{B}} \times \sqrt{\frac{2B}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2B}}$
Пластина шириной B и толщиной H с трещиной посередине при изгибе в своей плоскости (д)	$f_I = \frac{8}{3\sqrt{6}} \frac{Hl}{B^2} \sqrt{1 - \mu^2}$ ($\sigma = 6M_n/HB^2$)
Такая же пластина при чистом изгибе распределенным моментом (е)	$f_I = 1$ ($\sigma = 6M_{np}/H^2$)
Цилиндрическая труба диаметром $2R$ и толщиной H под внутренним давлением p при продольной сквозной трещине (ж)	$f_I = \sqrt{1 + 1,61 \frac{B^2}{RH}}$ ($\sigma = pR/H$)

Согласно предложению Ирвина, рост трещин начинается при достижении коэффициентом интенсивности напряжений некоторого критического значения K_c , которое должно быть характерным для каждого материала, т. е. трещина не развивается, когда

$$K < K_c,$$

и может развиваться, когда

$$K = K_c. \quad (22.14)$$

Критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, характеризующее сопротивление материала распространению трещины, называют *вязкостью разрушения*.

Можно показать, что силовой критерий разрушения эквивалентен энергетическому критерию Гриффитса.

Введем интенсивность освобождающейся упругой энергии деформации W (22.1), (22.2) в виде

$$G = \frac{dW}{dl} \quad (22.15)$$

и сравним значение коэффициента интенсивности напряжений K_I (22.12) с полученным выражением для G , найдем следующие зависимости между G и K : для плоского напряженного состояния

$$G = \frac{K_I^2}{E}; \quad (22.16)$$

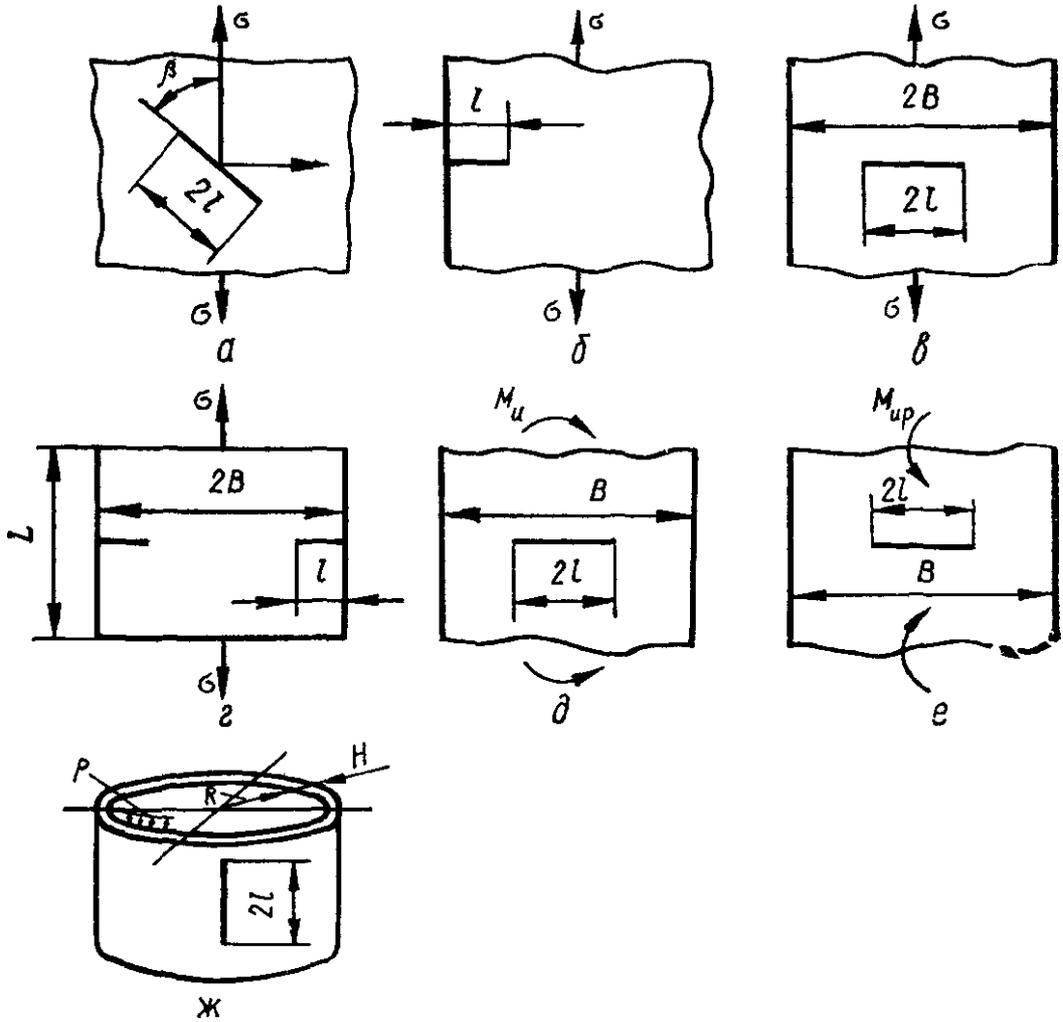


Рис. 394

для плоской деформации

$$G = \frac{1 - \mu^2}{E} K_I^2. \quad (22.17)$$

Таким образом, получены две эквивалентные формулировки критерия разрушения:

1) энергетическая, согласно которой предполагается, что трещина может распространяться тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии G достигает критического значения G_c , определяемого из условия равенства нулю производной от энергии ΔW (22.4), необходимой для распространения трещины, по l ($d\Delta W/dl = 4\gamma - G_c = 0$):

$$G_c = 4\gamma = \text{const}; \quad (22.18)$$

2) силовая, согласно которой трещина может развиваться при достижении коэффициентом интенсивности напряжений K своей критической величины

$$K_c = \text{const.} \quad (22.19)$$

На основании формул (22.16) и (22.17) для плоского напряженного состояния и плоской деформации соответственно получим

$$G_c = \frac{K_c^2}{E}; \quad G_c = \frac{K_{Ic}^2 (1 - \mu^2)}{E}. \quad (22.20)$$

Заметим, что формулы (22.20) справедливы для идеально упругого разрушения, т. е. когда у конца трещины в линеаризованной постановке задачи теории упругости $\sigma_y \rightarrow \infty$. Кроме того, при плоском напряженном состоянии может иметь место разрушение срезом. Поэтому в первой формуле (22.20) индекс I не пишется.

В отличие от рассмотренного идеального случая для большинства реальных материалов в малой области конца трещины имеют место пластические деформации. Однако в схеме квазихрупкого разрушения вследствие малой области пластической деформации по сравнению с длиной трещины полагают, что размеры указанной области и интенсивность происходящей в ней пластической деформации определяются коэффициентом интенсивности напряжений K и пределом текучести $\sigma_{0.2}$ и, таким образом, остаются в силе оба критерия разрушения K_c и G_c с учетом зависимости последнего от характера сопротивления материала пластической деформации.

Соотношения (22.14) и (22.20) в линейной механике разрушения являются основными и с их помощью можно осуществлять расчет предельного состояния элементов конструкций с трещинами, а также производить оценку механических свойств материала и его способности тормозить развитие трещины.

22.4. Учет пластической зоны

Радиус пластической зоны наиболее просто оценить приближенно, приравняв выражение для σ_y (22.10) при $\theta = 0$ пределу текучести материала σ_T , откуда для плоского напряженного состояния найдем

$$r_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2. \quad (22.21)$$

Подставив значение K_I для пластины конечных размеров, определим длину трещины с учетом пластической зоны:

$$l_T = l + r_T = l \left[1 + \frac{1}{2} \left(f_I \frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^2 \right]. \quad (22.22)$$

Зная эффективную длину трещины l_T и подставив ее в формулу (22.12), найдем уточненное значение коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi (l + r_T)}. \quad (22.23)$$

Следует заметить, что поскольку значение r_T зависит от величины K_I , определение значения K_I по (22.23) нужно неоднократно повторять, уточняя значение r_T по (22.21).

Величина рассматриваемой поправки становится более значительной по мере приближения значения K_I к критической величине K_c .

С учетом (22.23) можно определить для плоского напряженного состояния перемещение v у конца трещины σ при $r = r_T$ и $\theta = \pi$:

$$v = \frac{K_I(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\frac{3-\mu}{1+\mu} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (22.24)$$

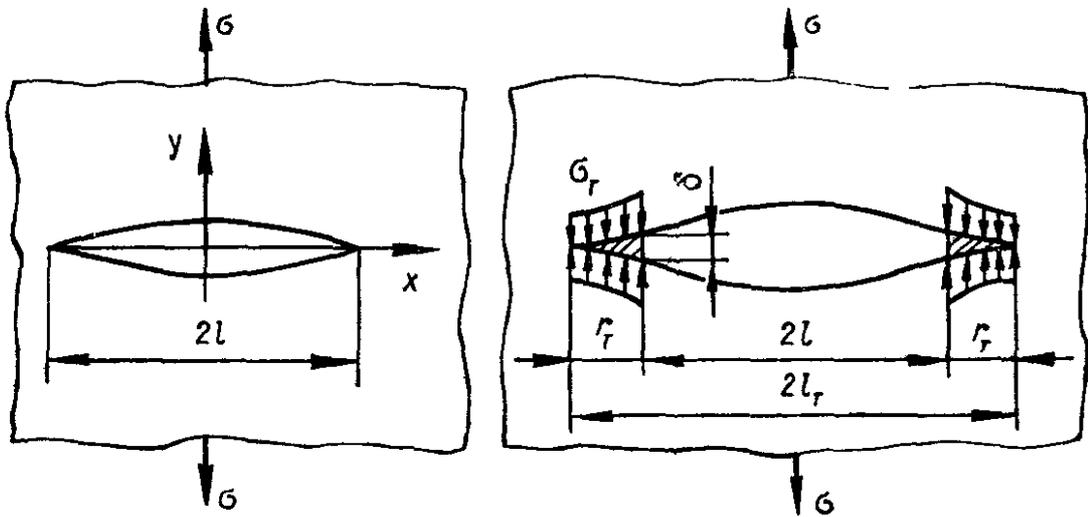


Рис. 395

Удвоенная величина v равна раскрытию трещины δ при плоском напряженном состоянии (рис. 395):

$$\delta = 2v_{r=r_T} = 2(1-\mu) \frac{\sigma^2}{\sigma_T E} l \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^2}. \quad (22.25)$$

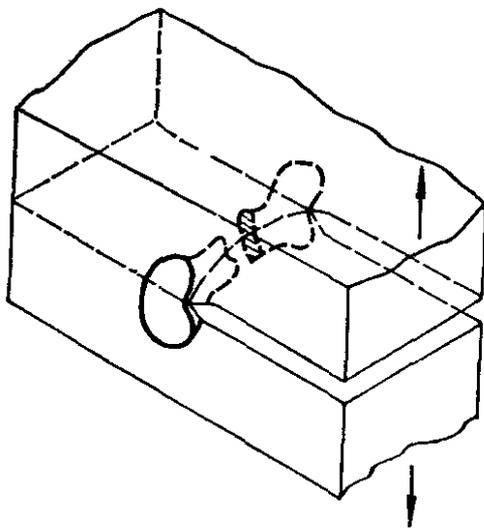


Рис. 396

Расчетные значения δ , получаемые по формуле (22.25) при $\sigma \leq 0,8\sigma_T$, подтверждены экспериментально.

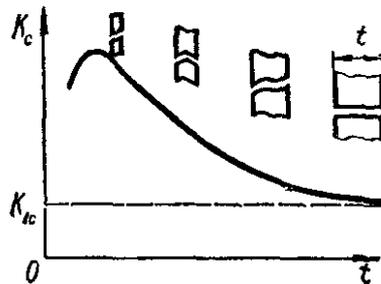


Рис. 397

В случае плоского деформированного состояния протяженность пластической зоны снижается в несколько раз по сравнению с плоским напряженным состоянием.

Размеры пластической зоны у вершины трещины для одного и того же материала зависит от степени стеснения деформации вдоль переднего края трещины. Степень стеснения деформации зависит от толщины

образца. С ее увеличением напряженное состояние изменяется от плоского, когда $\sigma_z = 0$, к объемному при плоской деформации, когда $\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y)$. При этом на боковой поверхности плоского образца при отсутствии на ней внешнего давления всегда имеет место плоское напряженное состояние, а потому размеры пластической области у свободной поверхности образца всегда больше, чем в средней части образца. Вид пластической зоны впереди края трещины в достаточно толстом плоском образце приблизительно имеет форму катушки (рис. 396).

Объемное напряженное состояние в средней части образца обуславливает большую хрупкость в этой зоне по сравнению с зонами трещины, примыкающими к боковым поверхностям, и тем самым снижает сопротивление материала разрушению, а потому фронт продвижения трещины в средней части выдается вперед, имея языкоподобный вид. Из-за относительной разницы пластической зоны для образцов различной толщины с изменением последней изменяется также величина энергии, затрачиваемой на разрушение, а следовательно, имеет место зависимость от толщины образца характеристик трещиностойкости — вязкости разрушения K_{Ic} и интенсивности освобождающейся энергии G_c . Зависимость K_{Ic} от толщины образца t схематически показана на рис. 397. Как видно, с увеличением толщины образца значение K_{Ic} (а следовательно, G_c) уменьшается и асимптотически стремится к предельным значениям K_{Ic} и G_{Ic} при объемном напряженном состоянии в условиях плоской деформации.

22.5. Методика экспериментального определения вязкости разрушения конструкционных материалов

Предельное равновесие трещиноподобных дефектов в конструкции при заданных условиях эксплуатации определяется сопротивлением разрушению (трещиностойкостью) материала, из которого она изготовлена. В качестве меры трещиностойкости применительно к наиболее опасным и распространенным трещинам нормального отрыва чаще всего используют вязкость разрушения — критическое значение величины коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic} , соответствующее моменту старта трещины при наличии в ее вершине плоской деформации.

Вязкость разрушения при плоской деформации K_{Ic} можно считать константой материала, не зависящей от формы и размеров образцов.

Для определения характеристики K_{Ic} данного конкретного материала, соответствующей плоской деформации, обычно используют специальные компактные образцы (рис. 398) с трещиной, удовлетворяющие следующему размерному требованию:

$$lB (\omega - l) \geq 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{0,2}} \right)^2, \quad (22.26)$$

где l — длина надреза с трещиной; B — толщина образца; $(\omega - l)$ — ширина рабочего участка образца; $\sigma_{0,2}$ — предел текучести материала образца.

Режим выращивания исходной усталостной трещины и ее длина должны соответствовать определенным условиям, обеспечивающим получение достоверных значений характеристики K_{Ic} .

В процессе внецентренного растяжения образца возрастающим усилием регистрируют диаграмму нагрузка P — смещение берегов трещины u . Величину критического коэффициента интенсивности напряже-

ния K_{Ic} испытываемого материала рассчитывают по нагрузке P_Q , соответствующей на диаграмме $P-u$ старту трещины, с использованием некоторой, зависящей от конфигурации образца, функции его размеров и длины трещины $Y(l/w)$.

Коэффициент интенсивности напряжений K_Q , соответствующий нагрузке P_Q , определяется по формуле

$$K_Q = \frac{P_Q}{B\sqrt{w}} Y\left(\frac{l}{w}\right), \quad (22.27)$$

где

$$Y\left(\frac{l}{w}\right) = 29,6 \left(\frac{l}{w}\right)^{1/2} - 185,5 \left(\frac{l}{w}\right)^{3/2} + 665,7 \left(\frac{l}{w}\right)^{5/2} - \\ - 1017 \left(\frac{l}{w}\right)^{7/2} + 638,9 \left(\frac{l}{w}\right)^{9/2}.$$

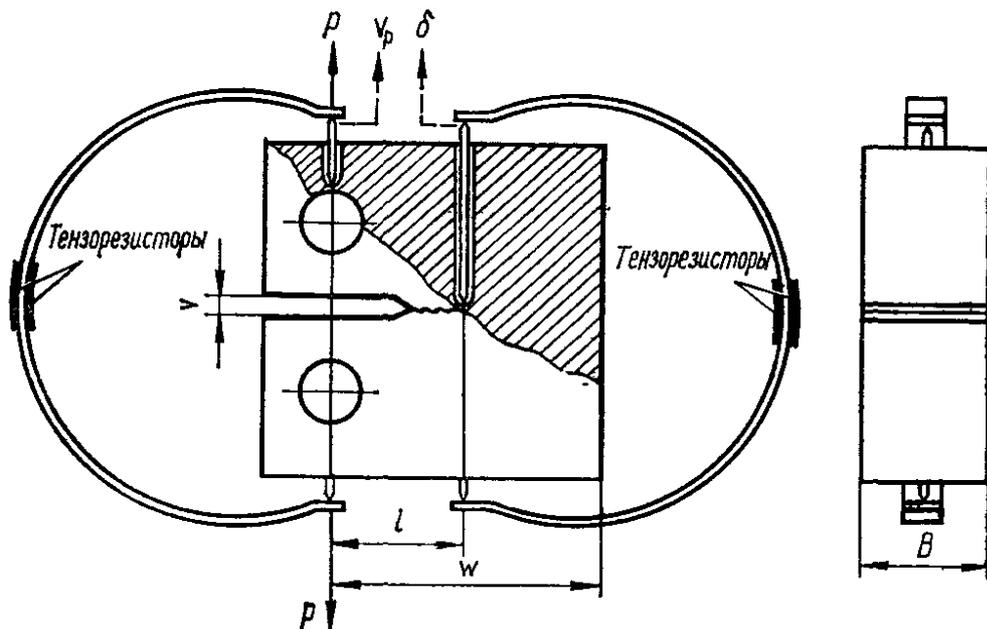


Рис. 398

Если полученная таким образом величина K_Q удовлетворяет размерному требованию (22.26) и максимальный коэффициент интенсивности напряжений цикла при выращивании усталостной трещины $K_{f \max} \ll 0,6K_Q$, то K_Q считается искомой характеристикой материала K_{Ic} . В противном случае необходимо повторить испытания на образцах увеличенных размеров.

Поскольку значение нагрузки на диаграмме $P-u$ не зависит от места измерения смещений, то последние целесообразно измерять вблизи точек приложения нагрузки или вблизи средней точки линии фронта трещины. Этим смещениям на рис. 398 соответствуют обозначения v_p и δ . По синхронно регистрируемым диаграммам $P-u_p$ можно дополнительно к силовой характеристике K_{Ic} определять и деформационную δ_{Ic} характеристику трещиностойкости материала. Такой подход позволяет комплексно, с единых методических позиций, оценивать трещиностойкость материала как в хрупком, так и в пластичном состояниях. Отметим, что описанная выше методика определения характеристики K_{Ic} теоретически строго обоснована и технически приемлема только при испытаниях хрупких материалов.

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

23.1. Основные понятия и формулы для определения контактных напряжений и деформаций

Напряжения и деформации, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел, называются *контактными*. Материал в месте контакта, не имея возможности свободно деформироваться, находится в объемном напряженном состоянии (рис. 399). Контактные напряжения имеют чисто местный характер и весьма быстро уменьшаются по мере удаления от места соприкосновения. Контактным напряжениям следует уделять существенное внимание при расчете на проч-

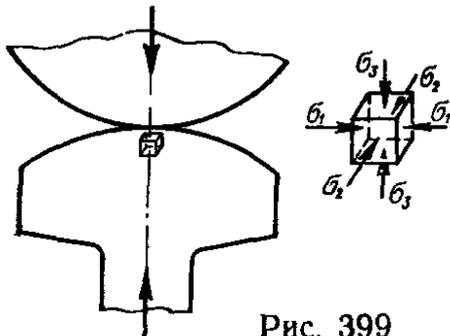


Рис. 399

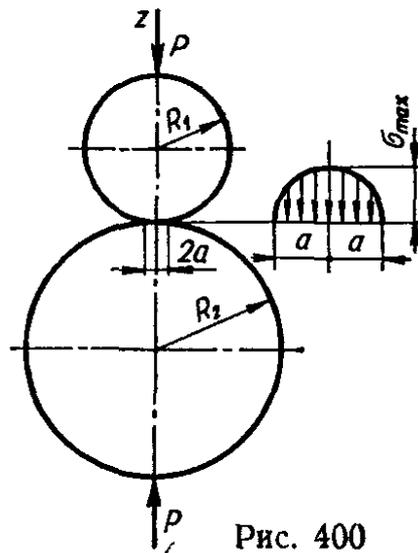


Рис. 400

ность таких деталей, как шариковые и роликовые подшипники, зубчатые колеса, колеса подвижного состава, рельсы и т. п.

Впервые правильное решение основных задач о контактных напряжениях и деформациях было проведено методами теории упругости в 1881—1882 гг. Г. Герцем.

Ниже приведены некоторые формулы для определения контактных напряжений и деформаций, полученные при следующих предположениях:

- 1) напряжения в зоне контакта не превышают предела упругости;
- 2) площадки контакта малы по сравнению с поверхностями соприкасающихся тел;
- 3) силы давления, распределенные по поверхности контакта, нормальны к этой поверхности.

Сжатие шаров. Радиус круговой площадки a (рис. 400), образующейся в месте контакта при взаимном нажатии силой P двух шаров радиусами R_1 и R_2 и модулями упругости материала соответственно E_1 и E_2 , определяется по формуле

$$a = 0,88 \sqrt[3]{P \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (23.1)$$

Нормальные (сжимающие) напряжения на площадке контакта распределены по полусфере. Наибольшее напряжение, имеющее место в центре площадки контакта, может быть определено так:

$$\sigma_3 = -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^3} = -0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (23.2)$$

Два других главных напряжения в центре площадки равны:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,8 |\sigma_{\max}|.$$

Вследствие объемного напряженного состояния материала в центре площадки контакта, при котором все три сжимающие напряжения практически одинаковы, материал здесь может выдерживать без появления остаточных деформаций весьма большие давления, составляющие, например, согласно четвертой теории прочности величину $\sigma_{\max} = 5\sigma_T$. Для стали, у которой $\sigma_{\text{пл}} = 1000$ МПа, σ_{\max} достигает 5000 МПа.

Наиболее опасная точка в зоне контакта расположена в толще материала на оси z , на глубине, равной примерно половине радиуса площадки касания. Главные напряжения в этой точке

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,18\sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = -0,8\sigma_{\max}, \quad (23.3)$$

где σ_{\max} определяется по формуле (23.2).

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{\max}. \quad (23.4)$$

Максимальные напряжения, возникающие в площадке при давлении шара на вогнутую сферическую поверхность с радиусом R_2 (рис. 401), получим по формуле (23.2), заменив в ней знак при R_2 на противоположный

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (23.5)$$

При давлении шара радиусом $R_1 = R$ на плоскость (рис. 402), напряжения определим по формуле (23.5), приняв в ней $R_2 = \infty$:

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{1}{R^2}}. \quad (23.6)$$

Сжатие цилиндров. При взаимном сжатии равномерно распределенной нагрузкой q двух цилиндров, соприкасающихся параллельными образующими (рис. 403), ширина прямоугольной площадки определится по формуле

$$b = 2,15 \sqrt[3]{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (23.7)$$

Наибольшее напряжение, действующее в точках оси площадки,

$$\sigma_{\max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (23.8)$$

Опасная точка в зоне контакта находится на оси z и на глубине, равной $0,4 b$. Главные напряжения в этой точке имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -0,180\sigma_{\max}; \\ \sigma_2 &= -0,288\sigma_{\max}; \\ \sigma_3 &= -0,780\sigma_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

Максимальное касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = 0,3\sigma_{\max}. \quad (23.10)$$

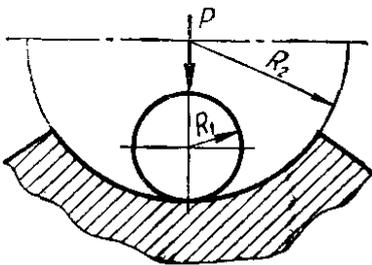


Рис. 401

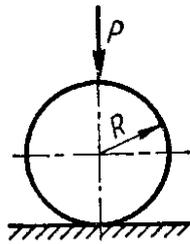


Рис. 402

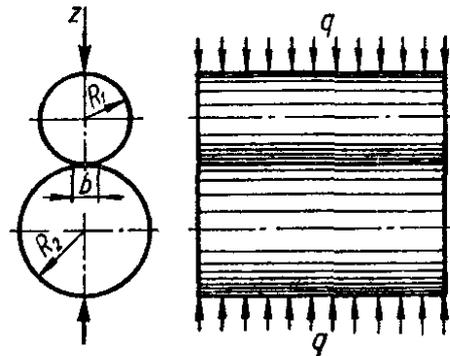


Рис. 403

Изменив в формуле (23.8) знак при R_2 на противоположный, получим напряжение в случае давления цилиндра на вогнутую цилиндрическую поверхность:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}. \quad (23.11)$$

При взаимном давлении цилиндра радиусом $R_1 = R$ и плоскости, приняв в (23.8) $R_2 = \infty$, найдем

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (23.12)$$

Приведенные выше формулы получены при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$. Однако в практических расчетах они пригодны и при других значениях μ .

В общем случае контакта двух тел из одинакового материала, сжимаемых силой P в направлении оси z (рис. 404) и касающихся по плоскости AB , при радиусах кривизны первого тела ρ_1 и ρ'_1 , второго тела ρ_2 и ρ'_2 (полагаем, что $\rho_1 < \rho'_1$; $\rho_2 < \rho'_2$) полуоси образующейся эллиптической площадки контакта определяются формулами

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right)}}; \quad (23.13)$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}}, \quad (23.14)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Ниже приведены значения коэффициентов α и β как функций вспомогательного угла ψ , вычисляемого по формуле

$$\cos \psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)\cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}}. \quad (23.15)$$

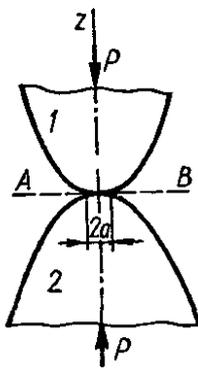


Рис. 404

Здесь φ — угол между главными плоскостями кривизны тел, в которых лежат радиусы ρ_1 и ρ_2 . Знаки в формуле (23.15) выбираются так, чтобы значение $\cos \psi$ было положительным.

φ°	α	β	φ°	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

Наибольшее напряжение в центре площадки контакта

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab}. \quad (23.16)$$

Наиболее опасная точка расположена на оси z на некоторой глубине, зависящей от отношения b/a .

Максимальное касательное напряжение не зависит от указанного отношения и равно

$$\tau_{\max} \approx 0,32\sigma_{\max}. \quad (23.17)$$

Как следует из приведенных формул, контактные напряжения зависят от упругих свойств материала и не являются линейной функцией нагрузки, так что темп их роста отстает от темпа увеличения сжимающей нагрузки. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличиваются размеры площадки контакта. В табл. 60 приведены расчетные формулы для определения параметров контакта двух тел (коэффициентов A и B уравнения эллипса касания, размера площадки контакта, наибольшего контактного напряжения σ_{\max} и взаимного сближения Δ). Для упрощения вычислений по приведенным формулам в табл. 61 даны значения входящих в них коэффициентов n_a, n_b, n_p, n_Δ в зависимости от отношения A к B .

23.2. Проверка прочности при контактных напряжениях

Проверку прочности при контактных напряжениях следует производить по третьей или четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставив в эти формулы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, выраженные через σ_{max} в центре площадки контакта, запишем условия прочности в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = m\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma], \quad (23.18)$$

откуда

$$\sigma_{\text{max}} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{\text{конт}},$$

где $[\sigma]_{\text{конт}} = [\sigma]/m$ — допускаемое напряжение для наибольшего напряжения в месте контакта. Значения коэффициента m в зависимости от отношения полуосей эллиптической площадки b/a приведены ниже.

b/a	$m = \frac{\sigma_{\text{экв III}}}{\sigma_{\text{max}}}$	$m = \frac{\sigma_{\text{экв IV}}}{\sigma_{\text{max}}}$
1 (круг)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (полоса)	0,600	0,557

Можно рекомендовать следующий порядок расчета на прочность элементов конструкции в местах контакта.

1. Определить главные радиусы кривизны контактирующих тел $\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2$, а также угол ψ между их главными плоскостями кривизны.

2. Вычислить по формулам (23.13) и (23.14) с учетом (23.15) размеры полуосей эллиптической площадки контакта.

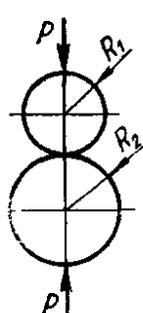
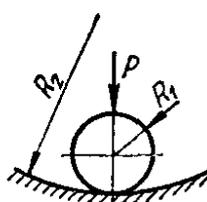
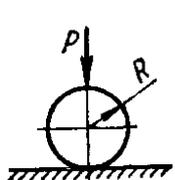
3. По формуле (23.16) определить σ_{max} , а в случае круглой и прямоугольной площадок контакта — по формуле (23.2) или (23.8) соответственно, не определяя размеров площадки.

4. Расчет на прочность можно производить по формуле (23.18), находя значения m по приведенной выше таблице. При этом рекомендуется исходить из четвертой теории прочности.

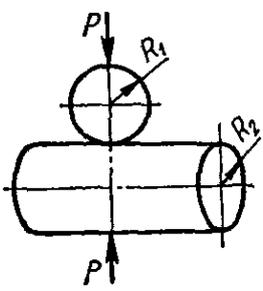
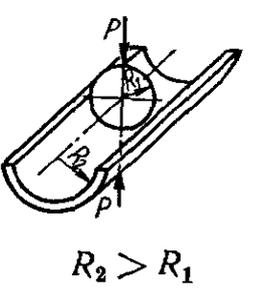
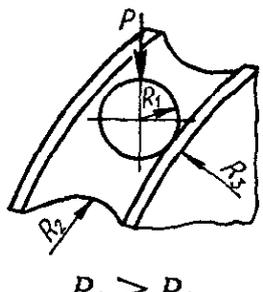
5. Для роликовых и шариковых подшипников $[\sigma]_{\text{конт}}$ равно 3500—5000 МПа; для рельсовой стали 800—1000 МПа.

В табл. 62 приведены наибольшие допускаемые давления на площадке контакта при первоначальном контакте по линии ($m = 0,557$) и статическом нагружении. В случае первоначального контакта в точке значение $[\sigma]_{\text{конт}}$ следует увеличить в 1,3—1,5 раза.

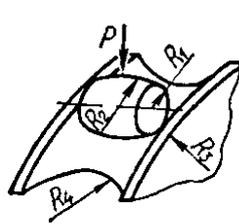
Таблица 60. Расчетные формулы для определения параметров кон

Схема касания	Коэффициенты уравнения эллипса касания		Размеры площадки контакта
	A	B	
<p>Два сферических тела</p> 	$\frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}$	$\frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}$	$a = b = 0,9086 \times \sqrt[3]{P \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$
<p>Шар и сферическое углубление</p>  <p>$R_2 > R_1$</p>	$\frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2}$	$\frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2}$	$a = b = 0,9086 \times \sqrt[3]{P \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}}$
<p>Сферическое тело и плоскость</p> 	$\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{2R}$	$a = b = 0,9086 \times \sqrt[3]{PR \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} R}$

Наибольшее напряжение σ_{\max}	Сближенне соприкасающихся тел Δ
$0,5784 \sqrt[3]{P \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}$ $\max \tau = \frac{1}{3} \sigma_{\max}$ $\max \sigma_1 = 0,133 \sigma_{\max}$	$0,8255 \times \sqrt[3]{\frac{P^2 R_1 + R_2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}{R_1 R_2}}$ $1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$
$0,5784 \sqrt[3]{P \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)^2}$ $\max \tau = \frac{1}{3} \sigma_{\max}$ $\max \sigma_1 = 0,133 \sigma_{\max}$	$0,8255 \times \sqrt[3]{\frac{P^2 R_2 - R_1 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}{R_1 R_2}}$ $1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$
$0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{R^2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{1}{R^2}}$ $\max \tau = \frac{1}{3} \sigma_{\max}$ $\max \sigma_1 = 0,133 \sigma_{\max}$	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{P^2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}{R}}$ $1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \frac{1}{R}}$

Схема касания	Коэффициенты уравнения эллипса касания		Размеры площадки контакта
	A	B	
<p>Сферическое тело и цилиндр</p>  <p>$R_2 > R_1$</p>	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	$a = 1,145n_a \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ $b = 1,145n_b \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = 1,397n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1}}$ $b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1}}$
<p>Сферическое тело и цилиндрический желоб</p>  <p>$R_2 > R_1$</p>	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	$\frac{1}{2R_1}$	$a = 1,145n_a \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ $b = 1,145n_b \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = 1,397n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}}$ $b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}}$
<p>Сферическое тело и круговой желоб (шариковый подшипник)</p>  <p>$R_2 \geq R_1$</p>	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$	$a = 1,145n_a \times \sqrt[3]{\frac{P \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ $b = 1,145n_b \sqrt[3]{\frac{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}{P \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}}$

Наибольшее напряжение σ_{\max}	Сближение соприкасающихся тел Δ
$0,365n_P \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,245n_P \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}$	$0,655n_{\Delta} \times \sqrt[3]{P^2 \frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $0,977n_{\Delta} \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
$0,365n_P \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,245n_P \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2}$	$0,655n_{\Delta} \times \sqrt[3]{P^2 \frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $0,977n_{\Delta} \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$
$0,365n_P \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$	$0,655n_{\Delta} \sqrt[3]{P^2 \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^2 \times \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}$

Схема касания	Коэффициенты уравнения эллипса касания		Размеры площадки контакта
	A	B	
			<p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = 1,397 n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{1}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ $b = 1,397 n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{1}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$
<p>Роликовый подшипник</p> 	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$	$a = 1,145 n_a \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{P \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}}$ $b = 1,145 n_b \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{P \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = 1,397 n_a \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}}$ $b = 1,397 n_b \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}}$

Наибольшее напряжение σ_{\max}

Сближение соприкасающихся тел Δ

и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то

$$0,245n_P \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^2}$$

$$0,977n_{\Delta} \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}$$

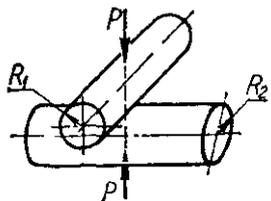
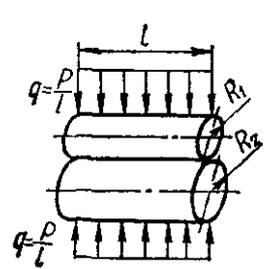
$$\times \sqrt[3]{\frac{0,365n_P \times P \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)^2}{\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$$

$$0,655n_{\Delta} \sqrt[3]{\frac{P^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}{}}$$

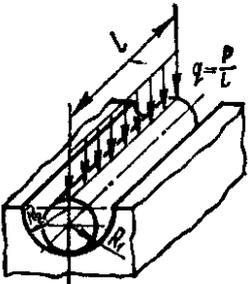
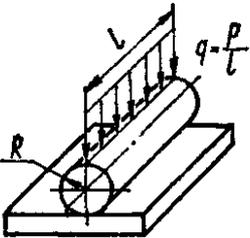
и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то

$$\times \sqrt[3]{\frac{0,245n_P \times PE^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)^2}{}}$$

$$\times \sqrt[3]{\frac{0,977n_{\Delta} \times \left(\frac{P}{E} \right)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)}{}}$$

Схема касания	Коэффициенты уравнения эллипса касания		Размеры площадки контакта
	A	B	
<p>Цилиндры со взаимно перпендикулярными осями</p> 	$\frac{1}{2R_2}$	$\frac{1}{2R_1}$	$a = 1,145n_a \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ $b = 1,145n_b \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>При $R_1 = R_2 = R$</p> $a = b = 0,9086 \times \sqrt[3]{PR \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $a = 1,397n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$ $b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$ <p>При $R_1 = R_2 = R$</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{PR}{E}}$
<p>Цилиндры с параллельными осями</p> 	—	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	<p>Полуширина полосы контакта</p> $b = 1,128 \times \sqrt[3]{\frac{P}{l} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>При $R_1 = R_2 = R$</p> $b = 0,798 \sqrt[3]{\frac{PR}{l} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Если $E_1 = E_2 = E$</p> $b = 1,522 \sqrt[3]{\frac{P}{lE} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

Наибольшее напряжение σ_{\max}	Сближение соприкасающихся тел Δ
$0,365 n_P \sqrt[3]{\frac{P \frac{\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}{}}$	$0,655 n_{\Delta} \times \sqrt[3]{\frac{P^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}{}}$
$R_2 = R$	
$0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{R^2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{P^2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}{R}}$
$\mu_1 = \mu_2 = 0,3, \text{ то}$	
$0,245 n_P \sqrt[3]{\frac{P E^2 \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{}}$	$0,977 n_{\Delta} \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
$R_2 = R$	
$0,388 \sqrt[3]{P \left(\frac{E}{R}\right)^2}$	$1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{1}{R}}$
$0,5642 \sqrt{\frac{P}{l} \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$	$\frac{2P}{\pi l} \left[\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$
$R_2 = R$	
$0,798 \sqrt{\frac{\frac{P}{lR}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$	$\frac{2P}{\pi l} \left[\left(\ln \frac{2R}{b} + 0,407 \right) \times \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \right]$
$\mu_1 = \mu_2 = 0,3, \text{ то}$	
$0,418 \sqrt{\frac{PE}{l} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$	$0,5796 \frac{P}{lE} \left(\ln \frac{4R_1 R_2}{b^2} + 0,814 \right)$

Схема касания	Коэффициенты уравнения эллипса касания		Размеры площадки контакта
	A	B	
			При $R_1 = \infty$ $b = 1,076 \sqrt{\frac{PR}{lE}}$
Цилиндр и цилиндрическая впадина с параллельными осями 	—	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	Полуширина полоски контакта $b = 1,128 \times \sqrt{\frac{P}{l} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ Если $E_1 = E_2 = E$ $b = 1,522 \sqrt{\frac{P}{lE} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$
Цилиндр и плоскость 	—	$\frac{1}{2R}$	Полуширина полоски контакта $b = 1,131 \sqrt{\frac{PR}{l} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ Если $E_1 = E_2 = E$ $b = 1,526 \sqrt{\frac{PR}{lE}}$
Два тела, ограниченные криволинейными поверхностями и соприкасающиеся до деформации в одной точке	—	—	Большая полуось эллипса $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{P}{\Sigma k}}$ Малая полуось эллипса $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{P}{\Sigma k}}$ P — нагрузка; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; 1 и 2 — индексы, соответствующие первому и второму телам; Σk — сумма главных кривизн поверхностей соприкасающихся тел в месте первоначального контакта

Наибольшее напряжение σ_{\max}	Сближение соприкасающихся тел Δ
$R_2 = R$ $0,591 \sqrt{\frac{PE}{lR}}$	$0,5796 \frac{R}{lE} \left(\ln \frac{4R^2}{b^2} + 0,814 \right)$
$0,5642 \sqrt{\frac{P}{l} \frac{\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,418 \sqrt{\frac{PE}{l} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$	$1,82 \frac{P}{lE} (1 - \ln b)$
$0,5642 \sqrt{\frac{P}{lR} \frac{1}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p>и $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, то</p> $0,418 \sqrt{\frac{PE}{lR}}$	<p>Уменьшение размера диаметра цилиндра между двумя сжимающими его гранями (с учетом контактных и общих деформаций цилиндра)</p> $\Delta D = 1,159 \frac{P}{lE} \left(0,41 + \ln \frac{4R}{b} \right)$
$\times n_P \frac{1}{\pi} \times \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\Sigma k}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}} \right)^2 P}$ <p>где $n_P = \frac{1}{n_a n_b}$</p>	$n_{\Delta} \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2 P \Sigma k}$

Таблица 61. Числовые значения коэффициентов n_a , n_b , n_p , n_Δ

A/B	n_a	n_b	n_p	n_Δ
1,0000	1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9623	1,013	0,9873	0,9999	0,9999
0,9240	1,027	0,9742	0,9997	0,9997
0,8852	1,042	0,9606	0,9992	0,9992
0,8459	1,058	0,9465	0,9985	0,9985
0,8059	1,076	0,9318	0,9974	0,9974
0,7652	1,095	0,9165	0,9960	0,9960
0,7238	1,117	0,9005	0,9942	0,9942
0,6816	1,141	0,8837	0,9919	0,9919
0,6384	1,168	0,8660	0,9890	0,9889
0,5942	1,198	0,8472	0,9853	0,9852
0,5489	1,233	0,8271	0,9805	0,9804
0,5022	1,274	0,8056	0,9746	0,9744
0,4540	1,322	0,7822	0,9669	0,9667
0,4040	1,381	0,7565	0,9571	0,9566
0,3518	1,456	0,7278	0,9440	0,9432
0,3410	1,473	0,7216	0,9409	0,9400
0,3301	1,491	0,7152	0,9376	0,9366
0,3191	1,511	0,7086	0,9340	0,9329
0,3080	1,532	0,7019	0,9302	0,9290
0,2967	1,554	0,6949	0,9262	0,9248
0,2853	1,578	0,6876	0,9219	0,9203
0,2738	1,603	0,6801	0,9172	0,9155
0,2620	1,631	0,6723	0,9121	0,9102
0,2501	1,660	0,6642	0,9067	0,9045
0,2380	1,693	0,6557	0,9008	0,8983
0,2257	1,729	0,6468	0,8944	0,8916
0,2132	1,768	0,6374	0,8873	0,8841
0,2004	1,812	0,6276	0,8766	0,8759
0,1873	1,861	0,6171	0,8710	0,8668
0,1739	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,1603	1,979	0,5938	0,8507	0,8451
0,1462	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,1317	2,141	0,5665	0,8246	0,8168
0,1166	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,1010	2,381	0,5325	0,7887	0,7775
0,09287	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,08456	2,557	0,5114	0,7647	0,7509
0,07600	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,06715	2,805	0,4858	0,7338	0,7163
0,05797	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,04838	3,199	0,4524	0,6909	0,6675
0,04639	3,253	0,4484	0,6856	0,6613
0,04439	3,311	0,4442	0,6799	0,6549
0,04237	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,04032	3,441	0,4352	0,6678	0,6409
0,03823	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,03613	3,594	0,4253	0,6542	0,6251
0,03400	3,683	0,4199	0,6467	0,6164
0,03183	3,781	0,4142	0,6387	0,6071
0,02962	3,890	0,4080	0,6300	0,5970

A/B	n_a	n_b	n_p	n_{Δ}
0,02737	4,014	0,4014	0,6206	0,5860
0,02508	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,02273	4,320	0,3864	0,5990	0,5608
0,02033	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,01787	4,750	0,3680	0,5721	0,5292
0,01533	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,01269	5,432	0,3436	0,5358	0,4864
0,009934	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,007018	6,837	0,3058	0,4783	0,4186
0,003850	8,609	0,2722	0,4267	0,3579

Таблица 62. Допускаемые давления на площадке контакта при первоначальном контакте по линии и статическом нагружении

Марка материала	Временное сопротивление, МПа	Твердость по Бринеллю МПа	Допускаемое максимальное давление на площадке контакта $[\sigma]_{\text{конт}}$, МПа
Сталь			
30	480—600	1800	850—1050
40	570—700	2000	1000—1350
50	630—800	2300	1050—1400
50Г	650—850	2400	1100—1450
15Х	620—750	2400	1050—1600
20Х	700—850	2400	1200—1450
15ХФ	1600—1800	2400	1350—1600
ШХ15	—	—	3800
Чугун			
СЧ21-40	960	1800—2070	800—900
СЧ24-44	1000	1870—2170	900—1000
СЧ28-48	1100	1700—2410	1000—1100
СЧ32-52	1200	1700—2410	1100—1200
СЧ35-56	1300	1970—2550	1200—1300
СЧ38-60	1400	1970—2550	1300—1400

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1 Физико-механические свойства материалов (для

- σ_B — предел прочности при растяжении (для дерева — вдоль волокон);
 σ_C — предел прочности при сжатии (для дерева — вдоль волокон);
 σ_H — предел прочности при изгибе;
 τ_H — предел прочности при кручении;
 $\tau_{ср}$ — предел прочности при срезе (для дерева — вдоль волокон);
 $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности при растяжении;
 σ_T — предел текучести при растяжении;

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Углеродистые обыкновенного			
ГОСТ 380—71			
Ст1	$\sigma_B = 320 - 400$	$\sigma_T = 180$	$\sigma_{-1p} = 120 - 150$ $\sigma_{-1} = 160 - 220$ $\tau_{-1} = 80 - 120$
Ст2	$\sigma_B = 320 - 400$	$\sigma_T = 190 - 220$	$\sigma_{-1p} = 120 - 160$ $\sigma_{-1} = 170 - 220$ $\tau_{-1} = 80 - 130$
Ст3	$\sigma_B = 380 - 470$	$\sigma_T = 210 - 240$	$\sigma_{-1p} = 120 - 160$ $\sigma_{-1} = 170 - 220$ $\tau_{-1} = 100 - 130$
Ст4	$\sigma_B = 420 - 520$	$\sigma_T = 240 - 260$	$\sigma_{-1} = 190 - 250$
Ст5	$\sigma_B = 500 - 620$	$\sigma_T = 260 - 280$	$\sigma_{-1p} = 170 - 220$ $\sigma_{-1} = 220 - 300$ $\tau_{-1} = 130 - 180$
Ст6	$\sigma_B = 600 - 720$	$\sigma_T = 300 - 310$	$\sigma_{-1p} = 190 - 250$ $\sigma_{-1} = 250 - 340$ $\tau_{-1} = 150 - 250$
специального			
ГОСТ 5520—79			
15К	$\sigma_B = 380$	$\sigma_T = 210 - 230$	—
20К	$\sigma_B = 410$	$\sigma_T = 230 - 250$	—
ГОСТ 6713—75			
Ст3 мост.	$\sigma_B = 380$	$\sigma_T = 240$	—
М16С	$\sigma_B = 380$	$\sigma_T = 230$	—

ориентировочных расчетов)

- $\sigma_{0,1}$ — условный предел текучести при растяжении (деформация 0,1 %);
 $\sigma_{т.с}$ — предел текучести при сжатии;
 $\sigma_{т.и}$ — предел текучести при изгибе;
 σ_{-1p} — предел выносливости при растяжении;
 σ_{-1} — предел выносливости при изгибе;
 τ_{-1} — предел выносливости при кручении.

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бригеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
--	----------------------------	--	--	----------------------	---	---

ст а л л

качества***

28	1100	—	—	—	—	—
26	1160	—	—	—	—	—
21—23	1310	7—10	—	—	—	—
19—21	1430	6—8	—	—	—	—
15—17	1700	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

назначения

23	—	7—8	—	—	—	—
22	—	6—7	—	—	—	—
22 (50)	—	7—10	—	—	—	—
22 (50)	—	7—10	—	—	—	—

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
ГОСТ 1414—75 А12	$\sigma_B = 420 - 570$	—	—
А40Г	$\sigma_B = 600 - 750$	—	—
качест			
ГОСТ 1050—74 10	$\sigma_B = 340 - 420$	$\sigma_T = 210$	$\sigma_{-1p} = 120 - 150$ $\sigma_{-1} = 160 - 220$ $\tau_{-1} = 80 - 120$
20	$\sigma_B = 420 - 500$	$\sigma_T = 250$	$\sigma_{-1p} = 120 - 160$ $\sigma_{-1} = 170 - 220$ $\tau_{-1} = 100 - 130$
30	$\sigma_B = 500 - 600$	$\sigma_T = 300$	$\sigma_{-1p} = 170 - 210$ $\sigma_{-1} = 200 - 270$ $\tau_{-1} = 110 - 140$
40	$\sigma_B = 580 - 700$	$\sigma_T = 340$	$\sigma_{-1p} = 180 - 240$ $\sigma_{-1} = 230 - 320$ $\tau_{-1} = 140 - 190$
45	$\sigma_B = 610 - 750$	$\sigma_T = 360$	$\sigma_{-1p} = 190 - 250$ $\sigma_{-1} = 250 - 340$ $\tau_{-1} = 150 - 200$
50	$\sigma_B = 640 - 800$	$\sigma_T = 380$	$\sigma_{-1p} = 200 - 260$ $\sigma_{-1} = 270 - 350$ $\tau_{-1} = 160 - 210$
60	$\sigma_B = 690 - 900$	$\sigma_T = 410$	$\sigma_{-1p} = 220 - 280$ $\sigma_{-1} = 310 - 380$ $\tau_{-1} = 180 - 220$
30Г	$\sigma_B = 550 - 700$	$\sigma_T = 320$	$\sigma_{-1} = 220 - 320$
60Г	$\sigma_B = 710$	$\sigma_T = 420$	$\sigma_{-1p} = 250 - 320$
Легнронан			
ГОСТ 4543—71 20X	$\sigma_B = 720 - 850$	$\sigma_T = 400 - 650$	$\sigma_{-1} = 310 - 380$ $\tau_{-1} = 170 - 230$
40X	$\sigma_B = 730 - 1050$	$\sigma_T = 650 - 900$	$\sigma_{-1p} = 240 - 340$ $\sigma_{-1} = 320 - 480$ $\tau_{-1} = 210 - 260$
45X	$\sigma_B = 850 - 1050$	$\sigma_T = 700 - 950$	$\sigma_{-1} = 400 - 500$

Продолжение приложения I

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
22 (36)	1600	—	2,02	—	—	11,9—14,2
14 (20)	2070	—	—	—	—	—

венные***

31 (55)	—	—	1,90	—	7,83	11,6—14,6
25 (55)	—	—	2,02	—	7,82	11,1—14,4
21 (50)	—	8	—	—	7,82	12,6—15,6
19 (45)	—	6	2,135	—	7,81	12,4—14,6
16 (40)	—	5	2,04	—	7,81	11,6—14,7
14 (40)	—	4	2,20	—	7,81	12,0—14,1
12 (35)	—	—	2,08	—	7,80	11,1—14,6
20 (45)	—	8	2,17	—	7,81	—
11 (35)	—	—	2,109	—	7,81	11,6—14,6

ные стали

—	—	—	2,07	—	7,74	11,3
—	—	—	2,185 (0,808)	—	7,85	13,4—14,8
9 (45)	1870— 2190	5	2,109 (0,8015)	—	7,82	12,8

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
30ХМ	$\sigma_B = 740 - 1000$	$\sigma_T = 540 - 850$	$\sigma_{-1p} = 370$ $\sigma_{-1} = 310 - 410$ $\tau_{-1} = 230$
40ХН	$\sigma_B = 1000 - 1450$	$\sigma_T = 800 - 1300$	$\sigma_{-1p} = 310 - 420$ $\sigma_{-1} = 460 - 600$
12ХН3А	$\sigma_B = 950 - 1400$	$\sigma_T = 700 - 1100$	$\sigma_{-1} = 420 - 640$ $\tau_{-1} = 220 - 300$
20ХН3А	$\sigma_B = 950 - 1450$	$\sigma_T = 850 - 1100$	$\sigma_{-1} = 430 - 650$ $\tau_{-1} = 240 - 310$
40ХНМА	$\sigma_B = 1100 - 1700$	$\sigma_T = 850 - 1600$	$\sigma_{-1} = 500 - 700$ $\tau_{-1} = 270 - 380$
15ХСНД	$\sigma_B = 640 - 660$	$\sigma_T = 390 - 420$	$\sigma_{-1} = 310$ $\tau_{-1} = 160$
30ХГСА	$\sigma_B = 1100 - 1700$	$\sigma_T = 850 - 1500$	$\sigma_{-1} = 480 - 700$ $\tau_{-1} = 280 - 400$

Нержавеющие жаро

ГОСТ 5632—72 1Х13 (ЭЖ1)	$\sigma_B = 610$	$\sigma_T = 410$	$\sigma_{-1} = 370$
2Х13 (ЭЖ2) (закалка с 1273— 1293 К на воз- духе, отпуск при 993—1023 К)	$\sigma_B = 720$	$\sigma_T = 520$	$\sigma_{-1} = 370$
1Х17Н2 (ЭИ268) (закалка с 1303 К, отпуск при 853 К)	$\sigma_B = 960$	$\sigma_T = 770$	$\sigma_{-1} = 490$
1Х18Н9Т (ЭЯ11)	$\sigma_B = 580$	$\sigma_T = 240$	$\sigma_{-1} = 200 - 240$ $\tau_{-1} = 135$
Ж12Н22ТЭМПР (ЭИ696М, ЭП33) (прокатка, ста- рение 1003 К, 16 ч + 903 К, 16 ч)	$\sigma_B = 1350$	$\sigma_T = 1040$	

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
—	—	—	2,130	—	7,82	12,3—14,4
—	—	—	2,040	—	7,82	11,8
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	2,040 (0,815)	—	7,85	11,0—14,5
—	—	—	2,040	—	7,85	11,7
18—21	—	7,11	—	—	—	—
—	—	—	1,980 (0,830)	—	7,85	11,0

прочные стали

22 (60)	—	11	2,2	—	7,75	10,1—12,2
21 (65)	—	6—17	2,2	—	7,75	10,1
17 (59)	—	—	2,0	—	7,75	10,3
70 (80)	—	28	2,0	—	7,9	16,6—18,6
20 (46)	—	—	—	—	—	—

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
----------	-----------------------	---	--------------------------

Жаростойкие и жаро

ГОСТ 5632-72 X20H77T2ЮР (ЭИ437Б) (аустенитизация при 1253 К с охлаждением на воздухе, старение при 1023 К, 16 ч)	$\sigma_B = 920 - 1090$	$\sigma_T = 660$	—
ЖС6К (закалка с 1483—1493 К с охлаждением на воздухе, отжиг при 1223 К, 2 ч)	$\sigma_B = 1000 - 1070$	$\sigma_T = 880 - 940$	—

Тугоплавкие

Вольфрам (нелегированный*****)	$\sigma_B = 107$	—	—
Сплавы вольфрама			
W — 15 Mo*****	$\sigma_B = 175$	—	—
W — 2 Nb*****	$\sigma_B = 234$	—	—
W — 3,6Ta*****	$\sigma_B = 350$	—	—
Молибден	$\sigma_B = 780$	$\sigma_T = 760$	—
Сплавы молибдена			
ВМ-1 { 293 К	$\sigma_B = 800$	$\sigma_T = 680$	—
{ 2073 К	$\sigma_B = 100$	—	—
ВМ-2 { 293 К	$\sigma_B = 750$	—	—
{ 2073 К	$\sigma_B = 90$	—	—
ВМ-3 { 293 К	$\sigma_B = 430 - 600$	—	—
{ 2073 К	$\sigma_B = 120 - 135$	—	—
Ниобий	$\sigma_B = 770$	$\sigma_T = 600$	—
Сплавы ниобия			
ВН-2 { 293 К	$\sigma_B = 750$	$\sigma_T = 700$	—
{ 1773 К	$\sigma_B = 80 - 100$	—	—
ВН-3 { 293 К	$\sigma_B = 750 - 800$	—	—
{ 1773 К	$\sigma_B = 125$	—	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-3}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
--	-----------------------------	--	--	----------------------	---	--

прочные сплавы

11—24 (10—21)	—	3,5	2,0	—	8,2	12,7
1,5—7 (8—16)	—	—	—	—	—	—

металлы

49 (76)	—	—	4,2 (1,5)	0,3	19,3	4,45
27 (78)	—	—	—	—	—	—
9 (25)	—	—	—	—	—	—
15 (8)	—	—	—	—	—	—
20	—	—	3,3 (1,22)	0,31	10,2	5,6
10	—	—	3,3	—	10,3	—
45	—	—	1,85	—	—	—
10 (30)	—	0,2	3,33	—	—	—
18	—	—	1,85	—	—	—
2,8 (0,7—40)	—	—	3,25	—	—	—
40—50 (6,5)	—	—	—	—	—	—
20—25 (25—35)	—	37	1,06 (0,88)	0,39	8,57	7,1
18—28	—	27	1,06	—	8,66	6,25
—	—	—	—	—	—	—
16—20 (40—70)	—	30	—	—	—	—
40—43	—	—	—	—	—	—

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
ВН-4 { 293 К 1773 К	$\sigma_B = 810$ $\sigma_B = 170$	$\sigma_T = 730$ —	— —
Серый			
ГОСТ 1412—85 СЧ12-28	$\sigma_B = 120$ $\sigma_C = 500$ $\sigma_H = 280$	—	—
СЧ15-32	$\sigma_B = 150$ $\sigma_C = 650$ $\sigma_H = 320$ $\tau_B = 240$	—	—
СЧ18-36	$\sigma_B = 180$ $\sigma_C = 700$ $\sigma_H = 360$	—	$\sigma_{-1p} = 35$ $\sigma_{-1} = 90$
СЧ21-40	$\sigma_B = 210$ $\sigma_C = 950$ $\sigma_H = 400$ $\tau_B = 280$	$\sigma_T = 0,75\sigma_B$	$\sigma_{-1} = 100$ $\tau_{-1} = 80$
СЧ24-44	$\sigma_B = 240$ $\sigma_C = 1000$ $\sigma_H = 440$ $\tau_B = 300$	$\sigma_T = 0,75\sigma_B$	$\sigma_{-1p} = 65$ $\sigma_{-1} = 120$ $\tau_{-1} = 100$
СЧ28-48	$\sigma_B = 280$ $\sigma_C = 1100$ $\sigma_H = 480$ $\tau_B = 350$	$\sigma_T = 0,75\sigma_B$	$\sigma_{-1p} = 75$ $\sigma_{-1} = 150$ $\tau_{-1} = 110$
СЧ32-52	$\sigma_B = 320$ $\sigma_C = 1200$ $\sigma_H = 520$ $\tau_B = 390$	$\sigma_T = 0,85\sigma_B$	$\sigma_{-1p} = 70$ $\sigma_{-1} = 140$ $\tau_{-1} = 115$
СЧ35-56	$\sigma_B = 350$ $\sigma_C = 1200$ $\sigma_H = 560$ $\tau_B = 400$	$\sigma_T = 0,85\sigma_B$	$\sigma_{-1p} = 75$ $\sigma_{-1} = 150$ $\tau_{-1} = 115$

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
16 (33)	—	5—7	—	—	—	—
24 (30)	—	—	—	—	—	—

чугун

—	1430—2290	—	0,8—1,5 (0,45)	0,23—0,27	6,8—7,1	10—12
—	1630—2290	—	0,8—1,5 (0,45)	0,23—0,27	6,8—7,1	10—12
—	1700—2290	—	0,8—1,5 (0,45)	0,23—0,27	7,0—7,2	10—12
—	1800—2070	0,9	0,85 (0,45)	0,23—0,27	7,2—7,3	10—12
—	1870—2170	0,9	1,1 (0,48)	0,23—0,27	7,25—7,4	10—12
1,0—1,2	1700—2410	1,0	1,2 (0,52)	0,23—0,27	7,3—7,4	10—12
1,0—1,2	1870—2550	1,0	1,3 (0,56)	0,23—0,27	7,3—7,4	10—12
1,1—1,3	1970—2690	1,1	1,45 (0,64)	0,23—0,27	7,3—7,4	10—12

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
СЧ38-60	$\sigma_B = 380$ $\sigma_C = 1400$ $\sigma_H = 600$ $\tau_B = 460$	$\sigma_T = 0,85\sigma_B$	$\sigma_{-1} = 150$ $\tau_{-1} = 115$
Белый чугун	$\sigma_B = 100 - 200$ $\sigma_C = 700 - 1400$ $\sigma_H = 300 - 500$	—	—
Жаропроч			
ГОСТ 2176—77 Х28	$\sigma_B = 350$ $\sigma_H = 550$	—	—
Х34	$\sigma_B = 400$ $\sigma_H = 500$	—	—
Ковкий			
ГОСТ 1215—79 Ферритный			
КЧ30-6	$\sigma_B \geq 300$ $\sigma_H = 490$ $\tau_B = 340$	$\sigma_T = 190$ $\sigma_{T. c} = 210$ $\sigma_{T. H} = 310$	$\sigma_{-1p} = 70$ $\sigma_{-1} = 120$ $\tau_{-1} = 110$
КЧ33-8	$\sigma_B \geq 330$ $\sigma_H = 530$ $\tau_B = 345$	$\sigma_T = 210$ $\sigma_{T. c} = 230$ $\sigma_{T. H} = 330$	$\sigma_{-1p} = 80$ $\sigma_{-1} = 130$ $\tau_{-1} = 120$
КЧ35-10	$\sigma_B \geq 350$ $\sigma_H = 570$ $\tau_B = 350$	$\sigma_T = 220$ $\sigma_{T. c} = 240$ $\sigma_{T. H} = 340$	$\sigma_{-1p} = 80$ $\sigma_{-1} = 140$ $\tau_{-1} = 130$
КЧ37-12	$\sigma_B \geq 370$ $\sigma_H = 580$ $\tau_B = 370$	$\sigma_T = 230$ $\sigma_{T. c} = 250$ $\sigma_{T. H} = 350$	$\sigma_{-1p} = 80$ $\sigma_{-1} = 140$ $\tau_{-1} = 130$
Перлитный			
КЧ45-6	$\sigma_B \geq 450$	—	—
КЧ50-4	$\sigma_B \geq 500$ $\sigma_H = 720$ $\tau_B = 520$	$\sigma_T = 270$ $\sigma_{T. c} = 300$ $\sigma_{T. H} = 420$	$\sigma_{-1p} = 110$ $\sigma_{-1} = 180$ $\tau_{-1} = 160$

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-3}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
1,2—1,4	2070—2690	1,0	1,6 (0,7)	0,23—0,27	7,4—7,6	10—12
—	3000—7000	0,1—0,5	1,6—1,8	—	7,5 \pm 0,2	8 \pm 2

ый чугун

—	2200—2700	—	—	—	—	—
—	2500—3200	—	—	—	—	—

чугун

≥ 6 (7)	≤ 1630	1,2	1,55 (0,63)	0,23	7,2	10,5
≥ 8 (9)	≤ 1490	1,3	1,6 (0,64)	0,25	7,21	10,3
≥ 10 (11)	≤ 1490	1,4	1,66 (0,65)	0,27	7,22	10,2
≥ 12 (13)	≤ 1490	1,6	1,98 (0,73)	0,36	7,24	10
≥ 6	≤ 2410	—	—	—	—	—
≥ 4 (3,5)	≤ 2410	0,8	1,74 (0,68)	0,28	7,3	10

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
КЧ56-4	$\sigma_B \geq 560$	—	—
КЧ60-3	$\sigma_B \geq 600$	—	—
КЧ63-2	$\sigma_B \geq 630$	—	—

Чугун с шаро

ГОСТ 7293—85

ВЧ45-0	$\sigma_B = 450 - 500$ $\sigma_C = 1500 - 1600$ $\sigma_H = 650 - 750$ $\tau_B = 450 - 500$	$\sigma_T = 350 - 400$	$\sigma_{-1} = 180 - 200$
ВЧ50-1,5	$\sigma_B = 500 - 600$ $\sigma_C = 1700 - 1800$ $\sigma_H = 900 - 1000$ $\tau_B = 500 - 550$	$\sigma_T = 400 - 500$	$\sigma_{-1} = 200 - 220$ $\tau_{-1} = 170 - 210$
ВЧ60-2	$\sigma_B = 600 - 700$ $\sigma_C = 2000 - 2100$ $\sigma_H = 1050 - 1100$ $\tau_B = 600 - 750$	$\sigma_T = 420 - 550$	$\sigma_{-1} = 170 - 230$ $\tau_{-1} = 150 - 160$
ВЧ45-5	$\sigma_B = 450 - 550$ $\sigma_C = 1800 - 2000$ $\sigma_H = 650 - 750$ $\tau_B = 400 - 450$	$\sigma_T = 320 - 420$	$\sigma_{-1} = 180 - 200$
ВЧ40-10	$\sigma_B = 400 - 550$ $\sigma_C = 2000 - 2200$ $\sigma_H = 600 - 700$	$\sigma_T = 300 - 400$	$\sigma_{-1} = 250 - 280$ $\tau_{-1} = 198$

Цветные

Алюминиевые спла

ГОСТ 4784—74

АМцМ	$\sigma_B = 130$ $\tau_{ср} = 80$	$\sigma_T = 50$	$\sigma_{-1} = 50^*$
АМг2М	$\sigma_B = 190$ $\tau_{ср} = 120$	$\sigma_T = 80$	$\sigma_{-1} = 120^*$

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-3}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6$ $\frac{1}{\text{град}}$
≥ 4	≤ 2690	—	—	—	—	—
≥ 3	≤ 2690	—	—	—	—	—
≥ 2	≤ 2690	—	—	—	—	—

видным графитом

0,4—1,4	2070—2690	0,5—1,5	1,3—1,6 (0,7)	—	7—7,5	10,6—11,4
1,5—3,0	2070—2550	1,5—3	1,3 (0,775)	—	7—7,5	10,6—11,4
2—3	2550—2850	1,5—3	1,8 (0,8)	—	7—7,5	10,6—11,4
5—10	1730—2070	2,5—8	1,3 (0,7)	—	7—7,5	10,6—11,4
10—20	1560—1790	5—7	1,6 (0,75)	—	7—7,5	10,6—11,4

металлы

вы деформируемые

23 (70)	300	—	0,71 (0,27)	0,3	2,73	24
23 (64)	450	—	0,71 (0,27)	0,3	2,67	23,8

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
АМг2П	$\sigma_B = 250$ $\tau_{cp} = 150$	$\sigma_T = 210$	$\sigma_{-1} = 125^*$
АМг6	$\sigma_B = 320$	$\sigma_T = 170$	—
АМг6М	$\sigma_B = 300$	$\sigma_T = 150$	—
Д1 (О)	$\sigma_B = 210$	$\sigma_T = 110$	$\sigma_{-1} = 75^*$
Д1П (З и ЕС)	$\sigma_B = 410$ $\tau_{cp} = 270$	$\sigma_T = 250$	$\sigma_{-1} = 125^*$
Д6 { (О) (З и ЕС)	$\sigma_B = 220$ $\sigma_B = 460$	$\sigma_T = 110$ $\sigma_T = 300$	— —
Д16, Д16П плакированные листы (З и ИС)	$\sigma_B = 440$	$\sigma_T = 290$	—
полу-фабрикаты { З и ЕС О СЗ	$\sigma_B = 520$ $\tau_{cp} = 210 - 300$	$\sigma_T = 380$	$\sigma_{-1} = 140^*$
	$\sigma_B = 220$	$\sigma_T = 100$	$\sigma_{-1} = 90^*$
	$\sigma_B = 430$	$\sigma_T = 230$	—
плакированные листы (З и ИС)	$\sigma_B = 460$	$\sigma_T = 410$	—
профили (З и ИС)	$\sigma_B = 420 - 500$	$\sigma_T = 400 - 440$	—
АК4-1	$\sigma_B = 430$	$\sigma_T = 280$	$\sigma_{-1} = 130^{**}$
ВД17	$\sigma_B = 490$	$\sigma_T = 330$	$\sigma_{-1} = 165^*$

Алюминиевые сплавы

ГОСТ 2685—75

АЛ1 литой в землю

$\sigma_B = 200$
 $\tau_{cp} = 170$

$\sigma_T = 170$

$\sigma_{-1} = 56^*$

термообработка Т5

$\sigma_B = 260$
 $\tau_{cp} = 220$

$\sigma_T = 220$

$\sigma_{-1} = 56^*$

термообработка Т7

$\sigma_B = 220$

$\sigma_T = 180$

—

литой в кокль (термообработка Т5)

$\sigma_B = 300$
 $\tau_{cp} = 220$

$\sigma_T = 260$

$\sigma_{-1} = 65^*$

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости $E (G)$, $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
6	600	—	0,71 (0,27)	0,3	2,67	23,8
24	—	—	0,7	—	2,64	24,7
18	—	—	0,71 (0,27)	0,3	2,64	24,7
18 (58)	450	—	0,71 (0,27)	0,31	2,8	22,9
15 (30)	1150	3	0,71 (0,27)	0,31	2,8	22,9
15 (50)	500	—	0,71	0,31	2,8	22
—	1050	—	0,71	0,31	2,8	22
18 (30)	1050	—	0,71 (0,27)	0,31	2,78	22,7
11 (15)	1310	—				
18 (30)	420	—				
13 (15)	—	—				
6	—	—				
7	—	—	0,72 (0,27)	0,33	2,8	19,6—24,8
13 (26)	1200	—				
20	1150	—				

вы литейные

1,0	800	—	0,72 (0,27)	0,33	2,75	22,3—24,4
0,5	1000	0,3				
1,2	900	—				
0,5	1200	—				

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
АЛ2 литой в землю	$\sigma_B = 180$ $\tau_{cp} = 130$	$\sigma_T = 80$	$\sigma_{-1} = 55^{**}$
литой в металлическую форму	$\sigma_B = 220$	$\sigma_T = 90$	$\sigma_{-1} = 70^{**}$
литой под давлением	$\sigma_B = 220$	$\sigma_T = 120$	—
АЛ3 литой в землю термообработка Т5	$\sigma_B = 170$ $\sigma_B = 200$	$\sigma_T = 120$ $\sigma_T = 170$	— —
литой в металлическую форму термообработка Т5	$\sigma_B = 320$ $\sigma_B = 270$	$\sigma_T = 120$ $\sigma_T = 220$	— —
АЛ8 (термообработка Т4)	$\sigma_B = 300$	$\sigma_T = 170$	$\sigma_{-1} = 50^*$
литой в землю	$\tau_{cp} = 230$		
литой в металлическую форму	$\sigma_B = 330$	$\sigma_T = 180$	—
АЛ9 литой в землю (термообработка Т4)	$\sigma_B = 200$ $\tau_{cp} = 150$	$\sigma_T = 110$	$\sigma_{-1} = 45^*$
литой в землю (термообработка Т6)	$\sigma_B = 240$ $\tau_{cp} = 120$	$\sigma_T = 210$	—
литой в металлическую форму (термообработка Т6)	$\sigma_B = 230$	—	—
АЛ11 (термообработка Т2)	$\sigma_B = 220$	$\sigma_T = 150$	$\sigma_{-1} = 65$
АЛ13 литой в землю	$\sigma_B = 170$ $\tau_{cp} = 140$	$\sigma_T = 90$	$\sigma_{-1} = 40^*$
литой в металлическую форму	$\sigma_B = 200$	$\sigma_1 = 100$	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бригеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10^3$ Дж/мм ²	Модуль упругости $E (G)$, $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
6	500	—	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,65	21,1—23,3
5	550	0,8				
1,8	—	—				
2	700	—	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,7	22—24
3	750	—				
4	700	0,22				
3	800	0,45				
12	750	1	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,55	24,5—25,6
15	800	—				
6	550	—	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,66	23—24,5
2	750	—				
5	700	—				
2	800	—	—	—	2,94	24,4
3	650	0,5	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,6	20
5	700	—				

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
АЛ15В литой в землю	$\sigma_B = 150$	—	—
термообработка Т5	$\sigma_B = 200$	—	—
литой в металлическую форму	$\sigma_B = 180$	—	—
термообработка Т5	$\sigma_B = 220$	—	—
АЛ19 (литой в землю)			
термообработка Т4	$\sigma_B = 320$	$\sigma_T = 160$	$\sigma_{-1} = 70^{**}$
термообработка Т5	$\sigma_B = 370$	$\sigma_T = 220$	$\sigma_{-1} = 70^*$

Титан и

BT1	$\sigma_B = 610$	$\sigma_T = 470$	$\sigma_{-1} = 260$
OT4	$\sigma_B = 700 - 850$	$\sigma_T = 550 - 650$	—
BT8	$\sigma_B = 1050 - 1800$ $\tau_{ср} = 650 - 700$	$\sigma_T = 950 - 1100$ $\sigma_{пц} = 750 - 850$	$\sigma_{-1} = 500$
BT3-1	$\sigma_B = 950 - 1200$ $\tau_{ср} \geq 650$	$\sigma_T = 850 - 1100$ $\sigma_{пц} = 700 - 850$	$\sigma_{-1} = 480$
BT14	$\sigma_B = 950 - 1200$	$\sigma_T = 850 - 1100$	—

Медные

Ла

ГОСТ 15527—70			
Л68 мягкая	$\sigma_B = 320$ $\tau_{ср} = 200$	$\sigma_{0,1} = 91$	$\sigma_{-1} = 120$
твердая ЛА77-2	$\sigma_B = 660$	$\sigma_{0,1} = 520$	$\sigma_{-1} = 150$
мягкая	$\sigma_B = 400$	$\sigma_T = 140$	—
твердая	$\sigma_B = 650$	—	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости $E (G)$, $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
—	700	—	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,7	22—24
—	800	—				
0,5	700	—				
0,5	850	—				
9	900	—	0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,78	19,5—21,9
5	1000	—				

его сплавы

20—30 (≥ 45)	1500— 1800	≥ 7	1,121 (0,411)	0,32	4,5	8
10—40 (25—55)	2290— 3020	3,5—6,5	1,1 (0,4)—1,2	—	4,55	8—9,8
9—15 (30—55)	3100— 3500	3—6	1,1 (0,425)	0,3	4,48	8,3—9,1
10—16 (25—40)	—	3—6	1,15 (0,43)	0,3	4,5	8,6
6—10 (25—35)	2550— 2880	2,5—5	1,15	—	4,52	8—8,7

сплавы

тунг

55 (70)	550	17	1,1	—	8,6	19
3	1500	—	1,15	—	—	—
55	600	20	1,05	—	8,6	18,3
12	1700	—	—	—	—	—

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
ЛМц 58-2 мягкая	$\sigma_B = 400$	$\sigma_T = 156$	—
твердая	$\sigma_B = 700$	—	—
ЛС59-1 мягкая	$\sigma_B = 400$ $\tau_{ср} = 260$	$\sigma_T = 140$	—
твердая	$\sigma_B = 650$	$\sigma_T = 450$	$\sigma_{-1} = 160$
ЛК80 мягкая	$\sigma_B = 300$	$\sigma_T = 200$	—
твердая	$\sigma_B = 600$	—	—
<i>Бронзы</i>			
Бр. О-10	$\sigma_B = 250$	—	—
Бр. ОЦ8-4	$\sigma_B = 200$	$\sigma_T = 40-50$	—
ГОСТ 613-79			
Бр. ОЦС 6-6-3 литье в землю	$\sigma_B = 150$	$\sigma_T = 110$	—
литье в кокиль	$\sigma_B = 180$ $\tau_{ср} = 220$	$\sigma_T = 80-100$ $\sigma_{пц} = 50$	—
Бр. ОФ 10-1 литье в землю	$\sigma_B = 200-300$	$\sigma_T = 140$ $\sigma_{пц} = 80-90$	—
литье в кокиль	$\sigma_B = 250-350$ $\tau_{ср} = 340$	$\sigma_T = 200$ $\sigma_{пц} = 130-140$	—
<i>Бронзы</i>			
ГОСТ 493-79			
Бр. А5			
литье в кокиль	$\sigma_B = 280$	$\sigma_T = 70$	—
мягкая деформируемая	$\sigma_B = 380$	$\sigma_T = 160$	—
твердая деформируемая	$\sigma_B = 800$	$\sigma_T = 500$ $\sigma_{пц} = 480$	$\sigma_{-1} = 134^{**}$
Бр. АМц9-2 литье в кокиль	$\sigma_B = 400$	$\sigma_T = 200$ $\sigma_{пц} = 110$	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Кoeffициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Кoeffициент линейного расширения $\times 10^{-5}$ град ⁻¹
40	850	12	1,0	—	8,4	21,2
10	1750	—	—	—	—	—
45 (44)	900	2,6—5	1,05 (0,35)	—	8,5	20,6
16	1400	—	—	—	—	—
58	1000	12	0,98	—	8,5	17
4	1800	—	—	—	—	—
<i>оловянные</i>						
11	800	—	3	—	—	—
4	750	—	—	—	—	—
6	600	—	—	—	8,82	17,1—18,2
4 (6—10)	600	2—3	0,9	—	—	—
3 (3)	800—1000	0,6	0,754	—	8,58	17—22
7—10 (10)	900—1200	0,9	1,03	—	8,76	17
<i>алюминиевые</i>						
55 (48)	650	16	—	—	—	—
65 (70)	600	11	1	—	8,2	15,6
4	2000	—	1,1	—	—	—
20 (25—27)	900—1200	7	0,92	—	—	—

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
мягкая деформируемая	$\sigma_B = 400$	$\sigma_T = 300$	—
твердая деформируемая	$\sigma_B = 600$	$\sigma_T = 500$	$\sigma_{-1} = 210$
Бр АЖМц10-3-1,5 литье в кокиль	$\sigma_B = 560$ $\tau_{ср} = 380$	$\sigma_T = 210$ $\sigma_{пц} = 170$	—
мягкая деформируемая	$\sigma_B = 610$	$\sigma_T = 190$	—
твердая деформируемая	$\sigma_B = 600 - 700$	—	$\sigma_{-1} = 280^{****}$
Бр. АЖС7-1,5-1,5	$\sigma_B = 500$	—	$\sigma_{-1} = 210^{****}$
Бр АЖ9-4 литье в кокиль	$\sigma_B = 550$	$\sigma_T = 200$ $\sigma_{пц} = 180$	—
мягкая деформируемая	$\sigma_B = 600$	$\sigma_T = 220$	—
твердая деформируемая	$\sigma_B = 550$	$\sigma_{пц} = 127$ $\sigma_T = 350$	$\sigma_{-1} = 185^{****}$
<i>Бронза</i>			
ГОСТ 493—79			
Бр. КМц3-1 мягкое состояние	$\sigma_B = 350 - 400$	$\sigma_T = 100 - 200$	$\sigma_{-1} = 110 - 160$
твердое состояние	$\sigma_B = 650 - 750$	$\sigma_T = 100 - 200$	—
<i>Магниевые сплавы</i>			
МА1			
листы	$\sigma_B = 210$	$\sigma_T = 120$	$\sigma_{-1} = 75^{**}$
прутки	$\sigma_B = 240$ $\tau_B = 190$ $\tau_{ср} = 130$	$\sigma_T = 140$	$\sigma_{-1} = 75^{**}$
МАЗ			
полосы	$\sigma_B = 290$	$\sigma_T = 170$	—
прутки	$\tau_{ср} = 140$ $\sigma_B = 280$	$\sigma_T = 220$	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сжатие), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-3}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
25	1100—1300	—	1,05	—	—	—
4—5 (55)	1600—1800	—	—	—	7,6	17—20
22 (25—27)	1300	6—8	1	—	—	—
32 (55)	1250—1400	—	1,05	—	—	—
9—12	1600—2000	—	—	—	7,55	16—20
18	—	—	—	—	—	—
10—20 (25—30)	1200—1400	6,3	1,12	} 0,29	7,5	16,2—17,1
40 (33)	1100	8	1,12			
5	1600—2000	—	1,16			

кремнистая

25—45	700—900	} 13—17	1,04	—	8,4	15,8—20
5—10	1700—1900					

деформируемые

8	450	0,5	0,4	} 0,34	1,76	22,3—32
4 (6)	450	0,6	0,4			
15 (23)	—	1	0,43	} 0,34	1,8	26,1—31,2
12	600	—	0,43			

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
ВМ65-1 прутки	$\sigma_B = 350$	$\sigma_T = 300$ $\sigma_{пц} = 145$	—
прутки ИС	$\sigma_B = 335$ $\tau_{ср} = 160$	$\sigma_T = 280$	$\sigma_{-1} = 150^{**}$
полосы	$\sigma_B = 345$	$\sigma_T = 290$ $\sigma_{пц} = 130$	—
профили	$\sigma_B = 345$	$\sigma_T = 290$	—
поковки	$\sigma_B = 310$	$\sigma_T = 250$	—
штамповки	$\sigma_B = 320$	$\sigma_T = 260$	—
Магнийевый сплав			
МЛ6 литой	$\sigma_B = 160$ $\tau_{ср} = 140$	$\sigma_T = 110$	$\sigma_{-1} = 85^{**}$
термообработка Т4	$\sigma_B = 250$ $\tau_{ср} = 150$	$\sigma_T = 100$	$\sigma_{-1} = 95^{**}$
термообработка Т6	$\sigma_B = 260$ $\tau_{ср} = 160$	$\sigma_T = 140$	$\sigma_{-1} = 85^{**}$
Свинец ГОСТ 3778—77	$\sigma_B = 15 - 18$ (деформированный и О)	$\sigma_T = 5 - 10$	$\sigma_{-1} = 4,2^{***}$
Цинк ГОСТ 3640—79	$\sigma_B = 64$	$\sigma_T = 10$	—
Никель ГОСТ 849—70	$\sigma_B = 400 - 550$ (мягкое состояние)	$\sigma_T = 60 - 200$ (мягкое состояние)	—
	$\sigma_B = 500 - 1000$ (твердое состояние)	$\sigma_T = 280 - 900$ (твердое состояние)	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
9 (24)	600	—	0,43	0,34	1,8	20,9—22,6
9 (24)	—	0,9				
10 (25)	—	—				
10	—	—				
12	—	—				
14	550	—				

литейный

1,5 (2,5)	550	0,2	(0,16)	—	1,81	26,1—27,7
5 (12)	600	0,3	0,42 (0,165)	0,33		
1 (3)	800	0,15	(0,165)	0,33		
35—50 (90—100) (литой) 60—70 (деформированный)	38—40 (литой)	0,6—2,3 (O)	0,15—0,18	—	11,34	28
20 (50)	200	—	0,53	—	7,133	39,7
30—50 (мягкое состояние) 2—15 (твердое состояние)	900—1200 (O) 1250—2200 (нагартованный)	—	1,8—2,27 (0,73)	—	8,9	13,3—16,3
		—	—	—		

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Мельхиор МНЖМц30-0,8-1 (МН70—30) ГОСТ 492—73			
мягкое состояние	$\sigma_B = 350 - 450$	$\sigma_T = 140$	—
твердое состояние	$\sigma_B = 550 - 650$	$\sigma_T = 540$	—
Нейзильбер МНЦ 15—20 ГОСТ 492—73			
мягкое состояние	$\sigma_B = 400 - 450$	$\sigma_T = 140$	$\sigma_{-1} = 120 - 140$
твердое состояние	$\sigma_B = 600 - 720$	$\sigma_T = 590$	—
Монель НМЖМц 28 2,5-1,5 ГОСТ 492—73			
мягкое состояние	$\sigma_B = 500 - 600$	$\sigma_T = 200$	$\sigma_{-1} = 170$
твердое состояние	$\sigma_B = 700 - 850$	$\sigma_T = 650 - 750$	$\sigma_{-1} = 260$
Пластические			
Стеклопласты ГОСТ 10292—74, ГОСТ 2910—74			
на основе тканей	$\sigma_B = 260 - 400$ $\sigma_C = 100 - 300$ $\sigma_H = 130 - 150$	$\sigma_{плц} = 122 - 260$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,22 - 0,25$
на основе нитей, ориентированных в двух взаимно перпендикуляр- ных направле- ниях	$\sigma_B = 300 - 500$ $\sigma_C = 230 - 460$ $\sigma_H = 400 - 420$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,25 - 0,28$
Текстолинты (на основе хлопчато- бумажных тканей) ГОСТ 5—78, ГОСТ 5385—74	$\sigma_B = 45 - 100$ $\sigma_C = 120 - 250$ $\sigma_H = 75 - 160$ $\tau_B = 90 - 100$	$\sigma_T = 78$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,25 - 0,3$ $\sigma_{-1p} = 20$
Древесные плас- тики ГОСТ 20966—75	$\sigma_B = 140 - 300$ $\sigma_C = 120 - 185$ $\sigma_H = 165 - 280$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,25 - 0,3$

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
40—50 3—5	700 1900	— —	} 1,54	—	8,9	16
40—50 2—3	700 1600	— —	} 1,26	—	8,7	16,6
30—50 (65) 3—5 (50)	1100— 1400 1400— 2200	— —	} 1,82	—	8,8	14—15

м а с с ы

—	270—380	0,5—5,25	0,18—0,22 (0,035—0,04)	0,035— 0,622	1,4—1,85	0,45—8,3
—	280—520	0,5—5,25	0,24—0,35	0,035— 0,622	1,7—1,9	0,45—8,3
—	300	0,35	0,04—0,1 (0,25)	—	1,3—1,45	3,3—4,1
—	180—200	0,17—0,8	0,12—0,34	—	1,2—1,4	—

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Гетинакс (на основе сульфатной бумаги) ГОСТ 2718—74	$\sigma_B = 60 - 100$ $\sigma_H = 40 - 140$	—	$\sigma_{-1p} = 58$ $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,2 - 0,3$ $\sigma_{-1} = 35 - 49$
Фибра (на основе специальных сортов бумаги) ГОСТ 14613—83	$\sigma_B = 50 - 70$ $\sigma_C = 80 - 140$ $\sigma_H = 60 - 95$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,2 - 0,3$
Волокниты (наполнители: хлопковые очесы, асболокно, стекловолокно)	$\sigma_B = 30 - 130$ $\sigma_C = 100 - 150$ $\sigma_H = 40 - 130$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,25 - 0,3$
Термореактивные пресспорошки (наполнители: древесная мука, кварцевая мука, слюда) ГОСТ 5689—79 ГОСТ 9359—80	$\sigma_B = 25 - 69$ $\sigma_C = 70 - 300$ $\sigma_H = 45 - 100$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,3 - 0,4$
Органическое стекло (на основе полимеров и сополимеров метакриловой кислоты) ГОСТ 10667—74, ГОСТ 9784—75	$\sigma_B = 50 - 108$ $\sigma_C = 70 - 120$ $\sigma_H = 80 - 176$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,1 - 0,16$
Термопласты линейные полимеры с различной степенью кристаллизации	$\sigma_B = 12 - 80$ $\sigma_H = 12 - 100$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} = 0,15 - 0,2$
неармированные	$\sigma_B = 0,4 - 4,2$ $\sigma_C = 0,17 - 4,5$ $\sigma_H = 0,7 - 5$	—	—
Фторлон-4 (фторопласт-4) ГОСТ 10007—80	$\sigma_B = 14 - 25$ $\sigma_C = 12 - 20$ $\sigma_H = 11 - 14$	—	—
Капрон А, Б, В	$\sigma_B = 60$ $\sigma_C = 75$ $\sigma_H = 90$	—	—

С относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-6}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6 \frac{1}{\text{град}}$
—	250—300	$(8-20) \times 10^{-2}$	0,1—0,18 (0,008—0,025)	—	1,3—1,4	20
—	100	—	(0,07)	—	1,1—1,25	—
—	180—350	$(15-65) \times 10^{-2}$	0,05—0,118	—	1,35—1,9	—
—	100—600	0,03—0,8	—	—	1,3—2,7	(0,22—7) · 10
2,5—23,2	120—250	$(4-33) \times 10^{-2}$	0,027—0,041	—	1,18—1,2	46—120
—	30—160	—	0,0015—0,007	—	0,92—2,1	—
1,5—14	—	$(0,16—2,2) \times 10^{-2}$	0,00037—0,002 (0,00015—0,00019)	—	0,02—0,6	(3,5—7,8) $\times 10$
300—350	30—60	—	0,0047—0,0085	—	2,19—2,35	$(8-25) \times 10$
150—200	100—120	1,5—1,6	0,0144 (0,0045—0,0048)	—	1,1—1,14	$(6-15) \times 10$

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Полиамидная смола 68 ГОСТ 10589—73	$\sigma_B = 50 - 60$ $\sigma_C = 70 - 85$ $\sigma_H = 70$	—	—
Винипласт ГОСТ 9639—71	$\sigma_B = 40 - 60$ $\sigma_C = 80 - 160$ $\sigma_H = 80 - 120$	—	—
Полиэтилен высокой плотности (низкого давления)	$\sigma_B = 22 - 45$ $\sigma_C = 28 - 40$ $\sigma_H = 20 - 38$	—	—
Полистирол блочный ГОСТ 20282—74	$\sigma_B = 35$ $\sigma_C = 100$ $\sigma_H = 95 - 100$	—	—
Другие			
Лед	—	—	—
Каучук натуральный	$\sigma_B = 16 - 38$	—	—
Стекло ГОСТ 7132—78	$\sigma_B = 30 - 90$ $\sigma_C = 500 - 2000$ $\sigma_H = 50 - 150$	—	—
Базальт	$\sigma_C = 250 - 300$	—	—
Гранит	$\sigma_B = 3$ $\sigma_C = 120 - 260$	—	—
Известняк	$\sigma_C = 50 - 150$	—	—
Песчаник	$\sigma_B = 2$ $\sigma_C = 40 - 150$	—	—
Мрамор	$\sigma_C = 100 - 180$	—	—
Кладка из гранита, известняка, кирпича	$\sigma_B = 0,2 - 0,5$ $\sigma_C = 2,5 - 9$	—	—
Бетон	$\sigma_C = 5 - 48$	—	—

Продолжение приложения 1

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Ударная вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^6$ $\frac{1}{\text{град}}$
100	100—150	—	0,012	—	1,11	(10—12) $\times 10$
10—100	130—160	0,5—0,8	0,03—0,04	0,354	1,3—1,4	(6—7) $\times 10$
250—900	45—58	—	0,005—0,008	—	—	0,94—0,96
0,4—0,7	140—150	0,16—0,2	0,012—0,032	—	1,05—1,1	60

материалы

—	—	—	0,1 (0,25 — 0,03)	—	—	50,7
600—700	—	—	(0,6 — 1) $\times 10^{-4}$	0,47	0,91	(1,8 — 2,8) $\times 10^2$
—	—	0,015—0,025	0,48—0,85 (0,022—0,032)	0,18—0,32	2,2—8	0,5—15
—	—	—	—	—	2,7—3,3	—
—	—	—	0,49	—	2,5—2,8	—
—	—	—	0,42	—	1,8—2,6	—
—	—	—	0,18	—	2,1—2,8	—
—	—	—	0,56	—	2,5—2,8	—
—	—	—	0,09—0,1	—	—	4,7
—	—	—	0,06	—	—	
—	—	—	0,027—0,03	—	—	
—	—	—	0,146—0,232	0,16—0,18	—	10—14

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Сосна обыкновенная (15 % влажности)	$\sigma_B = 9,31 - 11,5$ $\sigma_C = 42,7 - 46,6$ $\sigma_H = 73,6 - 87,7$ $\tau_{cp} = 6,2 - 7,3$	$\sigma_{п1} = 61$ $\sigma_{пц} = 31$	—
Ель обыкновенная (15 % влажности)	$\sigma_B = 107 - 122$ $\sigma_C = 38,5 - 42,3$ $\sigma_H = 77,4 - 72,2$ $\tau_{cp} = 5,2 - 6,7$	$\sigma_{пц} = 56$ $\sigma_{пц} = 27$	—
Береза обыкновенная (15 % влажности)	$\sigma_B = 161 - 210$ $\sigma_C = 43,7 - 53,3$ $\sigma_H = 96,7 - 108,4$ $\tau_{cp} = 8,5 - 13,3$	$\sigma_{пц} = 34$	—
Тополь (15 % влажности)	$\sigma_B = 86,9$ $\sigma_C = 34,7$ $\sigma_H = 60,9$ $\tau_{cp} = 5,4 - 7,1$	—	—
Акация (15 % влажности)	$\sigma_B = 169$ $\sigma_C = 66,5$ $\sigma_H = 139,2$ $\tau_{cp} = 12,5 - 14$	—	—
Бук кавказский (15 % влажности)	$\sigma_B = 129,1$ $\sigma_C = 47,4$ $\sigma_H = 95,3$ $\tau_{cp} = 9,9 - 13,1$	$\sigma_{пц} = 70$ $\sigma_{пц} = 29$	—

Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бринеллю, МПа	Вязкость, $\times 10$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-3}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения, $\times 10^{-6}$ 1/град
—	19,9—27	0,18—0,23	0,102—0,145 (0,0055)	0,49	0,48—0,54	Вдоль волокон 3,7; поперек волокон 63,6
—	18,2—25,2	0,18—0,19	0,11 (0,0055)	0,44	0,46	Вдоль волокон 5,4; поперек волокон 34,1
—	29,8—39,2	0,41—0,54	0,15—0,184 (0,0065)	0,41	0,64—0,73	Вдоль волокон 2—5
—	17,3—25	0,19	0,13 (0,0055)	—	0,46	Вдоль волокон 2—5
—	61,9—88,1	0,92	0,09—0,16 (0,0045— 0,0065)	—	0,75—0,81	Вдоль волокон 2—5
—	37,9—57,1	0,39	0,127 (0,0065)	0,58	0,68	Вдоль волокон 2—5

Материал	Предел прочности, МПа	Предел текучести, пропорциональности, МПа	Предел выносливости, МПа
Ясень (15 % влажности)	$\sigma_B = 144 - 166$ $\sigma_C = 45 - 51$ $\sigma_H = 98 - 115$ $\tau_{cp} = 11,4 - 13,8$	$\sigma_{пц} = 74$ $\sigma_{пц} = 27$	—
Дуб (15 % влажности)	$\sigma_B = 128,8$ $\sigma_C = 52$ $\sigma_H = 93,5$ $\tau_{cp} = 8,5 - 12,5$	— $\sigma_{пц} = 29$ $\sigma_{пц} = 74$	—
Липа (15 % влажности)	$\sigma_B = 115,8$ $\sigma_C = 39,8$ $\sigma_H = 78$ $\tau_{cp} = 7,3 - 8$	$\sigma_{пц} = 45$ $\sigma_{пц} = 20$	—
Ольха (15 % влажности)	$\sigma_B = 96,3$ $\sigma_C = 38,7$ $\sigma_H = 71$ $\tau_{cp} = 7,8 - 8,5$	—	—
Клен (15 % влажности)	$\sigma_C = 52$ $\sigma_H = 105,3$ $\tau_{cp} = 11,3 - 12,9$	—	—

* Предел выносливости получен на базе $5 \cdot 10^8$ циклов.
** Предел выносливости получен на базе $2 \cdot 10^7$ циклов.
*** Предел выносливости получен на базе 10^7 циклов.
**** Предел выносливости получен на базе 10^6 циклов.
***** σ_B , относительное удлинение и относительное сужение приведены для
Состояние материала О — отожженный; З — свежезакаленный; ЕС — естествен
Термосработка Т2 — отжиг, Т4 — закалка, Т5 — закалка и кратковременное
Т7 — закалка и стабилизирующий отпуск.

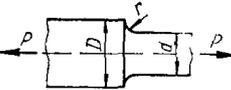
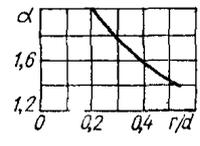
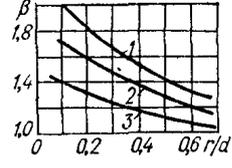
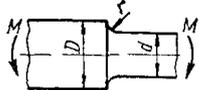
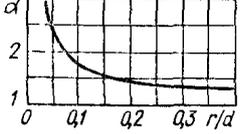
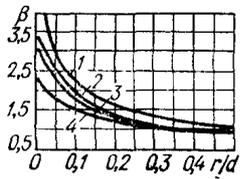
Относительное удлинение (относительное сужение), %	Твердость по Бриггеллю, МПа	Вязкость, $\times 10^3$ Дж/мм ²	Модуль упругости E (Г), $\times 10^{-5}$ МПа	Коэффициент Пуассона	Удельный вес, $\times 10^{-4}$ Н/м ³	Коэффициент линейного расширения $\times 10^{-6}$ град ⁻¹
—	53,4—73,2	0,3—0,43	0,124—0,15 (0,0065)	0,43	0,66—0,71	Вдоль волокон 2—5
—	46,3—65,3	0,46	0,073—0,151 (0,0065)	0,43	0,76	Вдоль волокон 4,9, поперек волокон 54,4
—	15,6—23,4	0,28	0,09 (0,0045)	—	0,51	Вдоль волокон 5,4, поперек волокон 44,1
—	24,8—36,7	0,25	0,132 (0,0055)	—	0,53	Вдоль волокон 2—5
—	50,6—69	0,37	0,118 (0,0055)	—	0,7	Вдоль волокон 2—5

температуры 1923 К.

по состаренный, ИС — искусственно состаренный.

(неполное) искусственное старение Т6 — закалка и полное искусственное старение

Приложение 2. Коэффициенты концентрации напряжений и чувствительности к концентрации напряжений

№ п.п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$												
1	<p>Валы, оси с галтелями</p>  <p>Растяжение — сжатие</p>	<p>При $d = 30-50$ мм и $D/d = 2$</p> 	<p>При $d = 30-50$ мм и $\frac{D}{d} = 2$</p>  <p>Для стали 1 — $\sigma_B = 1200$ МПа 2 — $\sigma_B = 800$ МПа 3 — $\sigma_B = 400$ МПа</p>	<p>Для стали</p> <table border="1" data-bbox="1212 369 1524 593"> <thead> <tr> <th>σ_B, МПа</th> <th>r/d</th> <th>q</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>40</td> <td>0,2—0,5</td> <td>0,27—0,32</td> </tr> <tr> <td>80</td> <td>0,2—0,5</td> <td>0,59—0,65</td> </tr> <tr> <td>120</td> <td>0,2—0,5</td> <td>0,82—0,93</td> </tr> </tbody> </table>	σ_B , МПа	r/d	q	40	0,2—0,5	0,27—0,32	80	0,2—0,5	0,59—0,65	120	0,2—0,5	0,82—0,93
σ_B , МПа	r/d	q														
40	0,2—0,5	0,27—0,32														
80	0,2—0,5	0,59—0,65														
120	0,2—0,5	0,82—0,93														
2	<p>Валы, оси с галтелями</p> 	<p>При $d = 30-50$ мм и $D/d = 2$</p> 	<p>При $D/d = 2$</p> 													

Для стали

1 — $\sigma_B = 1200$ МПа

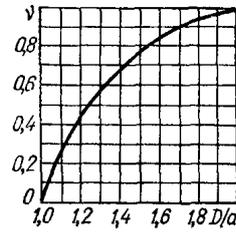
2 — $\sigma_B = 1000$ МПа

3 — $\sigma_B = 800$ МПа

4 — $\sigma_B = 400-600$ МПа

При $D/d < 2$

$$\beta_v = 1 + v(\beta - 1)$$

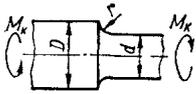
Значения v находятся из графика

Для стали

D/d	r/d	σ_B , МПа		
		<500	800	>1000
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05
	0,05	1,48	1,57	1,53

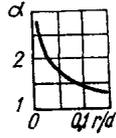
Для чугуна
 при $d = 12$ мм $\beta = 1,15$
 при $d = 50$ мм $\beta = 1,25$

3 Валы, оси с галтелями

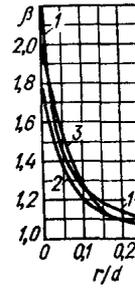


Кручение

При $d = 30-50$ мм и $D/d = 2$



Для сталей при $D/d = 1,4$

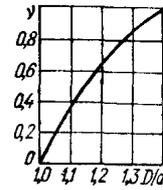


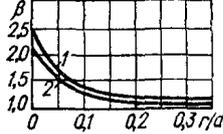
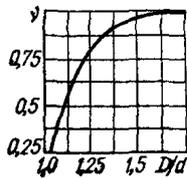
- 1 — $\sigma_B = 1200$ МПа
- 2 — $\sigma_B = 600$ МПа
- 3 — $\sigma_B = 400$ МПа

При $D/d < 1,4$

$$\beta_v = 1 + v(\beta - 1)$$

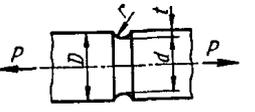
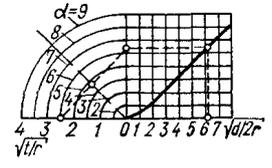
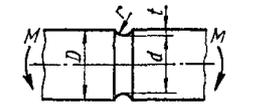
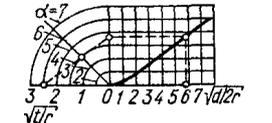
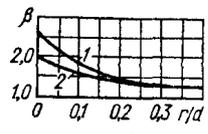
Значения v находятся из графика При $D/d = 2$ для сталей



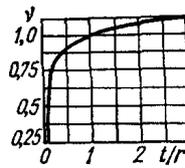
№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																															
			<p>При $d = 30-50$ мм и $D/d = 2$</p>  <p>1 — $\sigma_B = 1200$ МПа 2 — $\sigma_B = 500$ МПа</p> <p>При $D/d < 2$ $\beta_v = 1 + v(\beta - 1)$</p> <p>Значения v находятся из графика</p> 	<table border="1"> <thead> <tr> <th>σ_B, МПа</th> <th>r/d</th> <th>q</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="5">500</td> <td>0,025</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,65</td> </tr> <tr> <td>0,075</td> <td>0,63</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>0,6</td> </tr> <tr> <td>0,125</td> <td>0,57</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>0,5</td> <td></td> </tr> <tr> <td rowspan="5">1200</td> <td>0,025</td> <td>0,82</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td>0,075</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>0,77</td> </tr> <tr> <td>0,125</td> <td>0,77</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>0,76</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	σ_B , МПа	r/d	q	500	0,025	0,7	0,05	0,65	0,075	0,63	0,1	0,6	0,125	0,57	0,15	0,5		1200	0,025	0,82	0,05	0,8	0,075	0,8	0,1	0,77	0,125	0,77	0,15	0,76	
σ_B , МПа	r/d	q																																	
500	0,025	0,7																																	
	0,05	0,65																																	
	0,075	0,63																																	
	0,1	0,6																																	
	0,125	0,57																																	
0,15	0,5																																		
1200	0,025	0,82																																	
	0,05	0,8																																	
	0,075	0,8																																	
	0,1	0,77																																	
	0,125	0,77																																	
0,15	0,76																																		

Для статей

D/d	r/d	σ _B , МПа		
		< 500	500	> 1000
1,05	0,02	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,15	1,18	1,20
	0,10	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,06	1,08	1,09
	0,20	1,05	1,06	1,07
1,1	0,02	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,06	1,08	1,10
1,25	0,02	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,40	1,45	1,48
	0,10	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,15	1,20	1,24
	0,20	1,09	1,13	1,16
1,5	0,02	1,76	1,97	2,14
	0,05	1,48	1,56	1,62
	0,10	1,24	1,32	1,38
	0,15	1,19	1,25	1,29
	0,20	1,10	1,18	1,24

№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$														
4	<p>Валы, оси с выточками</p>  <p>Растяжение — сжатие</p>	<p>Схема определения исходной величины α показана штрихами</p> 	<p>Для чугуна — 1,1—1,4 Для сплава МЛ4 ($r/d = 0,1 - 0,12$) — 1,4—1,8 Для сплавов МА2, МА3, МА5 — 1,7—2 Для сплавов АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 — 1,3—1,8 Для сплавов Д16, АК2, АК8 — 1,6—1,8 Для сталей β находят из таблицы, приведенной для схемы 5</p>	<p>Для сплава МЛ4 ($r/d = 0,1 - 0,12$) 0,4—0,8 Для сплавов МА2, МА3, МА5 — 0,7—1 Для сплавов АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 — 0,3—0,8 Для сплавов Д16, АК2, АК8 — 0,6—0,8</p>														
5	<p>Валы, оси с выточками</p>  <p>Изгиб</p>	<p>Схема определения исходной величины α показана штрихами</p> 	<p>Для стали при $d = 30-50$ мм и $t/r = 1$</p>  <p>1 — $\sigma_B = 1000$ МПа 2 — $\sigma_B = 500$ МПа</p>	<p>Для сталей при $\sigma_B \leq 500$ МПа</p> <table border="1" data-bbox="1212 795 1524 985"> <thead> <tr> <th>t/r</th> <th>r/d</th> <th>q</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="5">0,5</td> <td>0,02</td> <td>0,6</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,69</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,74</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>0,75</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>0,75</td> </tr> </tbody> </table>	t/r	r/d	q	0,5	0,02	0,6	0,05	0,69	0,10	0,74	0,15	0,75	0,20	0,75
t/r	r/d	q																
0,5	0,02	0,6																
	0,05	0,69																
	0,10	0,74																
	0,15	0,75																
	0,20	0,75																

При $t/r \neq 1$ $\beta_y = 1 + v(\beta - 1)$
 Значения v находятся из графика



1,0	0,02	0,5
	0,05	0,59
	0,10	0,72
	0,15	0,74
	0,20	0,75
2,0	0,02	0,45
	0,05	0,57
	0,10	0,72
	0,15	0,72
	0,20	0,74

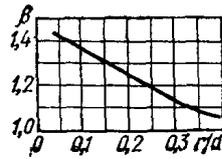
Некоторые значения β

t/r	r/d	σ_B , МПа		
		<500	800	>1000
0,5	0,02	1,77	2,02	2,22
	0,05	1,72	1,87	1,98
	0,10	1,59	1,69	1,77
	0,15	1,45	1,53	1,59
	0,20	1,37	1,41	1,45
1,0	0,02	1,85	2,12	2,35
	0,05	1,80	1,96	2,10
	0,10	1,65	1,76	1,85
	0,15	1,50	1,58	1,65
	0,20	1,45	1,48	1,50

Для сталей при $\sigma_B = 800$ МПа

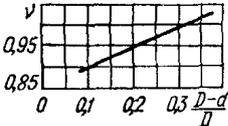
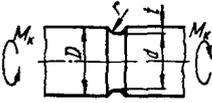
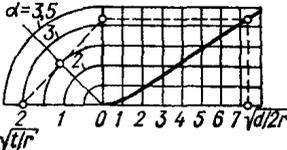
t/r	r/d	β
0,5	0,02	0,78
	0,05	0,83
	0,10	0,84
	0,15	0,84
	0,20	0,85
1,0	0,02	0,66
	0,05	0,71
	0,10	0,84
	0,15	0,85
	0,20	0,86

Для серого чугуна при
 $\sigma_B = 290$ МПа
 При $d = 8$ мм и
 $\frac{D-d}{D} = 0,33$

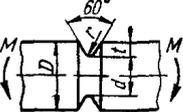


При $\frac{D-d}{D} \neq 0,33$
 $\beta_v = \nu\beta$

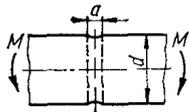
1,0	0,02	0,8
	0,05	0,82
	0,10	0,94
	0,15	0,94
	0,20	0,94
2,0	0,02	0,71
	0,05	0,8
	0,10	0,93
	0,15	0,94
	0,20	0,94

№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $\varphi = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
		Значения β находятся из графика 	Для сплавов ($d = 8$ мм; $D/d = 1,25 - 1,5$) МЛ4 — 0,4—1 МА2, МА3, МА5 — 0,7—1 АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 — 0—0,3 Д16, АК2, АК8 — 0,5—1	
6	Валы, оси с выточками  Кручение	Схема определения искомой величины α показана штрихами 	Для сталей Для сталей при $\sigma_b < 500$ МПа	

t/r	r/d	σ_B , МПа			t/r	r/d	q
		<500	800	>1000			
0,5	0,02	1,46	1,61	1,73	1,0	0,02	0,64
	0,05	1,43	1,52	1,60		0,05	0,74
	0,10	1,36	1,42	1,46		0,10	0,81
	0,15	1,27	1,32	1,36		0,15	0,91
	0,20	1,22	1,25	1,27		0,20	1,00
1,0	0,02	1,51	1,67	1,81	2,0	0,02	0,49
	0,05	1,48	1,58	1,66		0,05	0,72
	0,10	1,39	1,47	1,51		0,10	0,76
	0,15	1,30	1,35	1,39		0,15	0,77
	0,20	1,27	1,29	1,30		0,20	0,96
2,0	0,02	1,56	1,73	1,87	при $\sigma_B = 800$ МПа		
	0,05	1,51	1,62	1,71	1,0	0,02	0,84
	0,10	1,42	1,50	1,56		0,05	0,89
	0,15	1,33	1,38	1,42		0,10	0,98
	0,20	1,29	1,30	1,32		0,15	1,06
				0,20		1,07	
				2,0	0,02	0,45	
					0,05	0,73	
					0,10	0,91	
					0,15	0,91	
					0,20	1,00	

№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$		
				При $\sigma_B \geq 1000$ МПа		
				t/r	r/d	q
				1,0	0,02	1,01
					0,05	1,02
					0,10	1,06
					0,15	1,14
					0,20	1,15
				2,0	0,02	0,76
					0,05	0,84
					0,10	1,00
					0,15	1,00
					0,20	1,07
7	Валы, оси с выточками  Изгиб	При $d = 8$ мм; $D/d = 1,02 - 1,6$ $r = 0,05$ мм; $r/d = 0,006$; $t/r = 4 - 4,5$; $\alpha = 4,5 - 6$	Для сплавов МЛ4 -- 1,8—4,3 МА2, МА3, МА5 — 1,9—2,5 АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 — 1—1,4 Д16, АК2, АК8 — 1,1—2,6	Для сплавов МЛ4 — 0,2—0,8 МА2, МА3, МА5 — 0,25—0,26 АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 — 0—0,07 Д16, АК2, АК8 — 0,03—0,07		

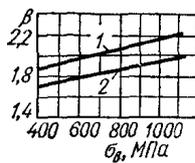
Валы, оси с поперечными круглыми отверстиями



Изгиб

2,0
при $a/d = 0,1-0,33$

Для сталей

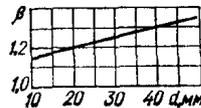


1 — $a/d = 0,05-0,1$
2 — $a/d = 0,15-0,25$
($d = 30-50$ мм)

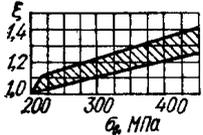
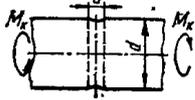
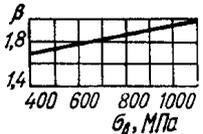
Некоторые числовые значения β приведены в таблице

a/d	σ_B , МПа			
	500	600	800	1000
0,05—0,1	1,90	1,95	2,05	2,15
0,15—0,25	1,74	1,77	1,86	1,95

Для серого чугуна с $\sigma_B = 200$ МПа и при $a/d = 0,1-0,15$



Для сталей 0,7—1,0

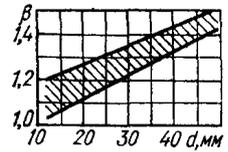
№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $\sigma = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
			<p>При других величинах $\sigma_{\text{в}}$ следует применить поправочный коэффициент ξ, который находится с помощью нижеприведенного графика</p>  <p>Верхняя граница соответствует высоколегированным чугунам, нижняя — малолегированным чугунам</p>	
9	<p>Валы, оси с поперечным круглым отверстием</p> 	—	<p>Для сталей при $d = 30-50$ мм и $a/d = 0,05 - 0,25$</p> 	—

Кручение

Некоторые числовые значения β , соответствующие графику, приведены в таблице

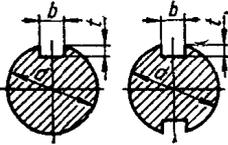
a/d	σ_B , МПа			
	500	600	800	1000
0,05—0,25	1,75	1,78	1,83	1,92

Для серого чугуна с $\sigma_B = 220$ МПа и при $a/d = 0,1$



10

Валы, оси с одной и двумя шпоночными канавками



Изгиб

Для расчетов: при одной шпоночной канавке

$$W_n \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$$

при двух шпоночных канавках

$$W_n \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d},$$

где W_n — момент сопротивления сечения при изгибе.

№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Георетический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$							
	Кручение		Для сталей								
$\sigma_{в}$, МПа			β								
500	1,5	600	1,6	700	1,72	800	1,8	900	1,9	1000	2,0
Для расчетов: при одной шпоночной канавке $W_k \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$ при двух шпоночных канавках $W_k \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d},$ где W_k — момент сопротивления сечения при кручении.											

		Для сталей	
		σ_B , МПа	β
		50	1,4
		60	1,5
		70	1,6
		80	1,7
		90	1,8
		100	1,9
11	Валы, оси со шлицевыми (зубчатыми) участками Изгиб	—	<p>Для сталей при расчетах в случае прямобочных шлицев момент сопротивления сечения определяют по формуле</p> $W_n = \xi \frac{\pi d^3}{32}$ <p>где d — внутренний диаметр; ξ — поправочный коэффициент, равный: для легкой серии — 1,09—1,16; для средней серии — 1,14—1,27; для тяжелой серии — 1,14—1,39 Меньшие значения ξ соответствуют большим d. Для эвольвентных шлицевых соединений W_n определяется как</p>

№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений ρ	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
Кручение	Для прямобоких шлицев $\alpha = 2,5-3,2$ Для эвольвентных шлицев $\alpha = 1,2-1,5$	для сплошного круглого сечения с диаметром, равным диаметру делительной окружности		
		$\sigma_{в}$, МПа	β	
Прямоугольные шлицы	Эвольвентные шлицы			
		400 500 600 700 800 900 1000 1200	1,35 1,45 1,55 1,60 1,65 1,70 1,72 1,75	1,35 1,45 1,55 1,60 1,65 1,70 1,72 1,75
		$\sigma_{в}$, МПа	ρ	
			Прямоугольные шлицы	Эвольвентные шлицы
		400 500 600	2,10 2,25 2,35	1,40 1,43 1,46

700	2,45	1,49
800	2,55	1,52
900	2,65	1,55
1000	2,70	1,58
1200	2,80	1,60

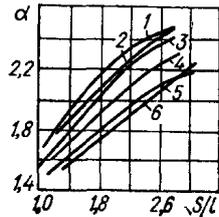
Момент сопротивления сечения с прямоугольными шлицами при кручении

$$W_k = 2W_n$$

Для эвольвентных шлицевых соединений W_k определяется как для сплошного круглого сечения с диаметром, равным диаметру делительной окружности

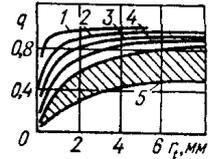
12 Некоррегированные шестерни эвольвентного профиля с углом $\alpha = 20^\circ$ при нагрузке, приложенной к вершине зуба

При количестве зубьев $z = 20-80$



$$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$$

Для сталей



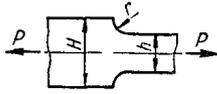
1 2 3	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$											
		$1 - r_t/m = 0,124 - 0,222$ $2 - r_t/m = 0,124 - 0,17$ $3 - r_t/m = 0,258 - 0,36$ $4 - r_t/m = 0,305 - 0,317$ $5 - r_t/m = 0,55$ $6 - r_t/m = 0,495 - 0,6$ Здесь s — толщина осно- вания зуба в опасном се- чении, l — плечо действия изгибающей силы, m — модуль зацепления, r_t — радиус закругления вер- шины зуба инструмента	Для чугуна 1,2—1,3	$1 - \sigma_T/\sigma_B = 0,8$ $2 - \sigma_T/\sigma_B = 0,7$ $3 - \sigma_T/\sigma_B = 0,6$ $4 - \sigma_T/\sigma_B = 0,55$ $5 - \sigma_T/\sigma_B = 0,4 - 0,5$											
13	Болтовые соединения при растяжении — сжатии для $d = 12$ мм	—	Для сталей <table border="1" data-bbox="799 831 1193 1039"> <thead> <tr> <th data-bbox="799 831 890 949" rowspan="2">σ_B, МПа</th> <th colspan="2" data-bbox="890 831 1193 875">β</th> </tr> <tr> <th data-bbox="890 875 1043 949">Метрическая резьба</th> <th data-bbox="1043 875 1193 949">Дюймовая резьба</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="799 949 890 994">400</td> <td data-bbox="890 949 1043 994">3,0</td> <td data-bbox="1043 949 1193 994">2,2</td> </tr> <tr> <td data-bbox="799 994 890 1039">600</td> <td data-bbox="890 994 1043 1039">3,9</td> <td data-bbox="1043 994 1193 1039">2,9</td> </tr> </tbody> </table>	σ_B , МПа	β		Метрическая резьба	Дюймовая резьба	400	3,0	2,2	600	3,9	2,9	—
σ_B , МПа	β														
	Метрическая резьба	Дюймовая резьба													
400	3,0	2,2													
600	3,9	2,9													

800
1000

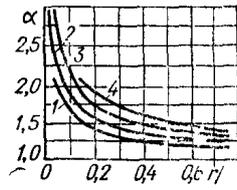
4,8
5,7

3,5
3,8

14 Прямоугольная ступенчатая полоса



Растяжение — сжатие

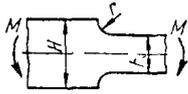


- 1 — $H/h = 1,1$
- 2 — $H/h = 1,2$
- 3 — $H/h = 1,5$
- 4 — $H/h = 4$

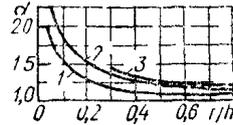
$$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$$

Значения q могут быть взяты из графика, приведенного для схемы 12

15 Прямоугольная ступенчатая полоса



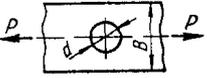
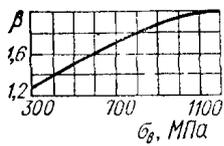
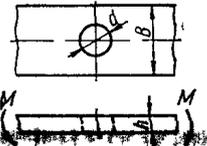
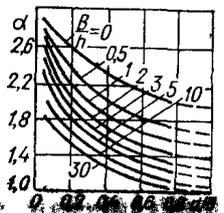
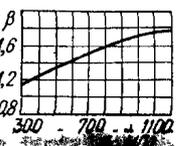
Изгиб



- 1 — $H/h = 1,1$
- 2 — $H/h = 2$
- 3 — $H/h = 4$

$$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$$

Значения q могут быть взяты из графика, приведенного для схемы 12

№ п. п.	Схема нагружения элемента конструкции или детали	Теоретический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																																													
16	Прямоугольная пластина с отверстием  Растяжение — сжатие	<table border="1"> <thead> <tr> <th>d/B</th> <th>α</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>3,0</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>3,03</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>3,14</td></tr> <tr><td>0,3</td><td>3,36</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>3,74</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>4,32</td></tr> </tbody> </table>	d/B	α	0	3,0	0,1	3,03	0,2	3,14	0,3	3,36	0,4	3,74	0,5	4,32	Для сталей  Для сплавов МА2, МА3, МА5, Д16, АК2, АК8 при $B = 40$ мм; $d = 1-6$ мм, толщине $h = 1,5-5$ мм	Для сталей <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">d/B</th> <th colspan="3">σ_B, МПа</th> </tr> <tr> <th>600</th> <th>800</th> <th>1000</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,45</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,39</td><td>0,47</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,28</td><td>0,36</td><td>0,44</td></tr> <tr><td>0,3</td><td>0,25</td><td>0,34</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,22</td><td>0,29</td><td>0,35</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>0,18</td><td>0,24</td><td>0,29</td></tr> </tbody> </table>	d/B	σ_B , МПа			600	800	1000	0	0,3	0,4	0,45	0,1	0,3	0,39	0,47	0,2	0,28	0,36	0,44	0,3	0,25	0,34	0,4	0,4	0,22	0,29	0,35	0,5	0,18	0,24	0,29
d/B	α																																																
0	3,0																																																
0,1	3,03																																																
0,2	3,14																																																
0,3	3,36																																																
0,4	3,74																																																
0,5	4,32																																																
d/B	σ_B , МПа																																																
	600	800	1000																																														
0	0,3	0,4	0,45																																														
0,1	0,3	0,39	0,47																																														
0,2	0,28	0,36	0,44																																														
0,3	0,25	0,34	0,4																																														
0,4	0,22	0,29	0,35																																														
0,5	0,18	0,24	0,29																																														
		2,5—3	1,2—1,8	0,1—0,53																																													
17	Прямоугольная пластина с отверстием 		Для сталей 	Некоторые значения q при $B/h = 3$ и $d/B = 0,1-0,9$ Для стали с $\sigma_B = 600$ МПа — 0,37—1,46; $\sigma_B = 800$ МПа — 0,5—2, $\sigma_B = 1000$ МПа — 0,63—2,5																																													

Изгиб

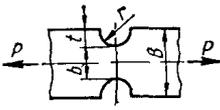
Для сплавов МА2, МА3, МА5, Д16, АК2, АК8 при
 $B = 40$ мм; $d = 1-6$ мм, $h = 1,5-5$ мм

1,6—2,5

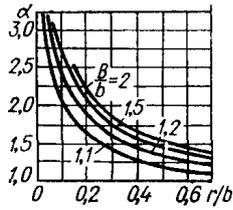
1,3—1,8

0,2—1,3

18 Прямоугольная пластина с боковыми вырезами



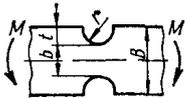
Растяжение — сжатие



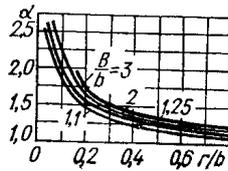
$$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$$

Значения q могут быть взяты из графика, приведенного для схемы 12

19 Прямоугольная пластина с боковыми вырезами

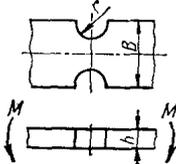
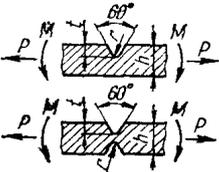


Изгиб



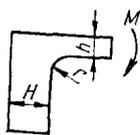
$$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$$

Значения q могут быть взяты из графика, приведенного для схемы 12

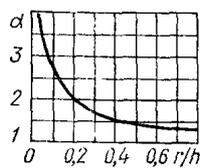
№ п. п.	Схем. нагружения лемнита, конструкции или детали	Георитический коэффициент концентрации напряжений α	Эффективный коэффициент концентрации напряжений β	Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$	
20	Прямоугольная пластина с боковыми вырезами  Изгиб	Для сплавов МА2, МА3, МА5, Д16, АК2, АК8 при $B = 12$ мм; $r = 16$ мм; $h = 0,5$ мм	2	1,5—2	0,5—1
21	Полоса с односторонним или двухсторонним надрезом  Растяжение — сжатие или изгиб	Для сплавов МА2, МА3, МА5 при $r = 0,02-0,05$ мм; $t/r = 3-15$; $h/t = 20$	4—7	1,2	0,03—0,07

22

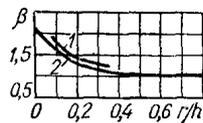
Профиль с входящим углом



Изгиб



Для сталей



1 — легированная
($\sigma_B = 990$ МПа)
2 — углеродистая
($\sigma_B = 500-700$ МПа)

Для стали с $\sigma_B = 900$ МПа

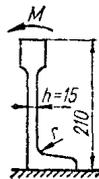
r/h	q
0,1—0,3	0,33—0,47

Для стали с $\sigma_B = 500-700$ МПа

0,1—0,6	0,2—0,35
---------	----------

23

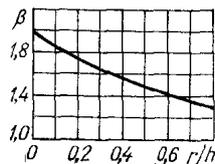
Элемент конструкции с входящим углом



Изгиб

—

Для чугуна с $\sigma_B = 290$ МПа



—

Приложение 3. Функции Крылова S, T, U, V

$$S(kz) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kz + \cos kz);$$

$$T(kz) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kz + \sin kz);$$

$$U(kz) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kz - \cos kz);$$

$$V(kz) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kz - \sin kz),$$

причем

$$S'(kz) = kV(kz); S''(kz) = k^2U(kz); S'''(kz) = k^3T(kz)$$

$$T'(kz) = kS(kz); T''(kz) = k^2V(kz); T'''(kz) = k^3U(kz)$$

$$U'(kz) = kT(kz); U''(kz) = k^2S(kz); U'''(kz) = k^3V(kz)$$

$$V'(kz) = kU(kz); V''(kz) = k^2T(kz); V'''(kz) = k^3S(kz)$$

kz	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,02	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,00000	0,03000	0,00045	0,00000
0,04	1,00000	0,04000	0,00080	0,00001
0,05	1,00000	0,05000	0,00125	0,00002
0,06	1,00000	0,06000	0,00180	0,00004
0,07	1,00000	0,07000	0,00245	0,00006
0,08	1,00000	0,08000	0,00320	0,00009
0,09	1,00000	0,09000	0,00405	0,00012
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,11	1,00001	0,11000	0,00605	0,00022
0,12	1,00001	0,12000	0,00720	0,00029
0,13	1,00001	0,13000	0,00845	0,00037
0,14	1,00002	0,14000	0,00980	0,00046
0,15	1,00002	0,15000	0,01125	0,00056
0,16	1,00003	0,16000	0,01280	0,00068
0,17	1,00003	0,17000	0,01445	0,00082
0,18	1,00004	0,18000	0,01620	0,00097
0,19	1,00005	0,19000	0,01805	0,00115
0,20	1,00007	0,20000	0,02000	0,00134
0,21	1,00008	0,21000	0,02205	0,00155
0,22	1,00010	0,22000	0,02420	0,00178
0,23	1,00012	0,23000	0,02645	0,00203
0,24	1,00014	0,24000	0,02880	0,00231
0,25	1,00016	0,25000	0,03125	0,00261
0,26	1,00019	0,26001	0,03380	0,00293
0,27	1,00022	0,27001	0,03645	0,00328
0,28	1,00026	0,28001	0,03920	0,00366
0,29	1,00029	0,29001	0,04205	0,00407

kz	$S(kz)$	$T(lz)$	$U(k)$	$V(kz)$
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,31	1,00038	0,31002	0,04805	0,00497
0,32	1,00044	0,32003	0,05120	0,00546
0,33	1,00049	0,33003	0,05445	0,00599
0,34	1,00055	0,34004	0,05780	0,00655
0,35	1,000625	0,35004	0,06125	0,00715
0,36	1,00070	0,36005	0,06480	0,00778
0,37	1,00078	0,37006	0,06845	0,00844
0,38	1,00086	0,38006	0,07220	0,00915
0,39	1,00096	0,39007	0,07605	0,00989
0,40	1,00106	0,40008	0,08000	0,01067
0,41	1,00117	0,41009	0,08405	0,01149
0,42	1,00129	0,42011	0,08820	0,01235
0,43	1,00142	0,43012	0,09245	0,01325
0,44	1,00156	0,44014	0,09681	0,01420
0,45	1,00171	0,45015	0,10126	0,01519
0,46	1,00186	0,46017	0,10581	0,01625
0,47	1,00203	0,47019	0,11047	0,01731
0,48	1,00221	0,48021	0,11522	0,01844
0,49	1,00240	0,49023	0,12007	0,01961
0,50	1,00260	0,50026	0,12502	0,02084
0,51	1,00280	0,51029	0,13007	0,02211
0,52	1,00304	0,52031	0,13522	0,02344
0,53	1,00329	0,53024	0,14048	0,02481
0,54	1,00354	0,54038	0,14583	0,02624
0,55	1,00381	0,55042	0,15129	0,02773
0,56	1,00410	0,56046	0,15684	0,02927
0,57	1,00440	0,57050	0,16250	0,03037
0,58	1,00471	0,58054	0,16825	0,03253
0,59	1,00505	0,59060	0,17411	0,03424
0,60	1,00540	0,60074	0,18006	0,03601
0,61	1,00577	0,61070	0,18612	0,03784
0,62	1,00616	0,62076	0,19228	0,03973
0,63	1,00656	0,63082	0,19853	0,04169
0,64	1,00699	0,64089	0,20489	0,04369
0,65	1,00742	0,65097	0,21136	0,04578
0,66	1,00790	0,66104	0,21791	0,04793
0,67	1,00830	0,67112	0,22458	0,05013
0,68	1,00891	0,68121	0,23134	0,05248
0,69	1,00945	0,69130	0,23820	0,05477
0,70	1,01000	0,70140	0,24516	0,05718
0,71	1,01059	0,71150	0,25223	0,05967
0,72	1,01120	0,72161	0,25939	0,06223
0,73	1,01183	0,73173	0,26666	0,06486
0,74	1,01249	0,74185	0,27403	0,06756
0,75	1,01318	0,75198	0,28149	0,07034
0,76	1,01390	0,76211	0,28906	0,07319
0,77	1,01465	0,77226	0,29674	0,07612
0,78	1,01542	0,78240	0,30451	0,07913
0,79	1,01623	0,79256	0,31238	0,08228

<i>kz</i>	<i>S (kz)</i>	<i>T (kz)</i>	<i>U (kz)</i>	<i>V (kz)</i>
0,80	1,01707	0,80273	0,32036	0,08538
0,81	1,01794	0,81290	0,32844	0,08862
0,82	1,01884	0,82309	0,33662	0,09194
0,83	1,01978	0,83328	0,34490	0,09535
0,84	1,02075	0,84348	0,35329	0,09885
0,85	1,02175	0,85380	0,36177	0,102-2
0,86	1,02280	0,86392	0,37036	0,10608
0,87	1,02388	0,87415	0,37905	0,10983
0,88	1,02500	0,88440	0,38785	0,11366
0,89	1,02615	0,89465	0,39674	0,11758
0,90	1,02735	0,90492	0,40573	0,12159
0,91	1,02858	0,91520	0,41483	0,12570
0,92	1,02986	0,92549	0,42404	0,12990
0,93	1,03118	0,93582	0,43335	0,13418
0,94	1,03254	0,94612	0,44275	0,13856
0,95	1,03395	0,95645	0,45227	0,14303
0,96	1,03540	0,96679	0,46188	0,14761
0,97	1,03690	0,97716	0,47161	0,15297
0,98	1,03845	0,98753	0,48143	0,15704
0,99	1,04005	0,99793	0,49136	0,16190
1,00	1,04169	1,00833	0,50139	0,16687
1,01	1,04338	1,01876	0,51152	0,17193
1,02	1,04513	1,02920	0,52176	0,17710
1,03	1,04693	1,03953	0,53211	0,18237
1,04	1,04878	1,05014	0,54256	0,18774
1,05	1,05068	1,06064	0,55311	0,19322
1,06	1,05264	1,07116	0,56377	0,19880
1,07	1,05466	1,08169	0,57454	0,20449
1,08	1,05673	1,09225	0,58540	0,21029
1,09	1,05887	1,10283	0,59638	0,21620
1,10	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,11	1,06333	1,12405	0,61865	0,22835
1,12	1,06562	1,13469	0,62995	0,23460
1,13	1,06800	1,14536	0,64134	0,24095
1,14	1,07044	1,15605	0,65285	0,24742
1,15	1,07295	1,16677	0,66446	0,25401
1,16	1,07552	1,17750	0,67619	0,26071
1,17	1,07816	1,18828	0,68801	0,26753
1,18	1,08087	1,19908	0,69995	0,27447
1,19	1,08365	1,20990	0,71200	0,28153
1,20	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,21	1,08934	1,23163	0,73641	0,29601
1,22	1,09243	1,24254	0,74878	0,30344
1,23	1,09550	1,25348	0,76196	0,31099
1,24	1,09865	1,26444	0,77385	0,31867
1,25	1,10187	1,27545	0,78658	0,32647
1,26	1,10518	1,28648	0,79936	0,33439
1,27	1,10856	1,29750	0,81228	0,34245
1,28	1,11203	1,30866	0,82531	0,35064
1,29	1,11557	1,31980	0,83845	0,35896

λz	S (kz)	T (kz)	U (kz)	V (λz)
1,30	1,11920	1,33097	0,85163	0,36741
1,31	1,12292	1,34218	0,86507	0,37600
1,32	1,12673	1,35343	0,87855	0,38471
1,33	1,13062	1,36471	0,89214	0,39357
1,34	1,13460	1,37604	0,90585	0,40276
1,35	1,13867	1,38740	0,91966	0,41169
1,36	1,14283	1,39881	0,93336	0,42096
1,37	1,14709	1,41026	0,94764	0,43035
1,38	1,15144	1,42175	0,96180	0,43991
1,39	1,15588	1,43329	0,97607	0,44959
1,40	1,16043	1,44487	0,99047	0,45933
1,41	1,16507	1,45655	1,00497	0,46941
1,42	1,16982	1,46817	1,01959	0,47952
1,43	1,17466	1,47990	1,03434	0,48980
1,44	1,17961	1,49167	1,04920	0,50021
1,45	1,18467	1,50349	1,06417	0,51078
1,46	1,18984	1,51537	1,07926	0,52149
1,47	1,19510	1,52728	1,09448	0,53237
1,48	1,20048	1,53926	1,00981	0,54339
1,49	1,20597	1,55130	1,12526	0,55456
1,50	1,21157	1,56338	1,14083	0,56590
1,51	1,21729	1,57553	1,15653	0,57728
1,52	1,22312	1,58773	1,17235	0,58903
1,53	1,22907	1,59999	1,18828	0,60083
1,54	1,23514	1,61231	1,20435	0,61279
1,55	1,24132	1,62469	1,22053	0,62492
1,56	1,24769	1,63714	1,23679	0,63720
1,57	1,25407	1,64965	1,25327	0,64965
1,58	1,26063	1,66222	1,26983	0,66226
1,59	1,26732	1,67486	1,28652	0,67504
1,60	1,27413	1,68757	1,30333	0,68800
1,61	1,28108	1,70034	1,32027	0,70112
1,62	1,28815	1,71319	1,33734	0,71441
1,63	1,29536	1,72608	1,35453	0,72786
1,64	1,30271	1,73910	1,37186	0,74149
1,65	1,31019	1,75216	1,38932	0,75530
1,66	1,31782	1,76530	1,40690	0,76928
1,67	1,32558	1,77852	1,42462	0,78344
1,68	1,33348	1,79181	1,44248	0,79678
1,69	1,34154	1,80519	1,46046	0,81229
1,70	1,34974	1,81864	1,47858	0,82699
1,71	1,35808	1,83219	1,49683	0,84186
1,72	1,36657	1,84581	1,53523	0,85692
1,73	1,37522	1,85952	1,53375	0,87216
1,74	1,38401	1,87331	1,55242	0,88759
1,75	1,39297	1,88820	1,57122	0,90321
1,76	1,40208	1,90117	1,59016	0,91903
1,77	1,41135	1,91524	1,60924	0,93502
1,78	1,42078	1,92940	1,62846	0,95120
1,79	1,43038	1,94366	1,64783	0,96759

z	$S(z)$	$I(z)$	$U(z)$	$V(z)$
1,80	1,44013	1,95801	1,6734	0,98416
1,81	1,45006	1,97246	1,68699	1,00093
1,82	1,46015	1,98697	1,70079	1,02191
1,83	1,47042	2,00166	1,72673	1,03507
1,84	1,48086	2,01642	1,74682	1,05244
1,85	1,49147	2,03128	1,76706	1,07001
1,86	1,50225	2,04625	1,78745	1,08778
1,87	1,51322	2,06133	1,80798	1,10576
1,88	1,52437	2,07652	1,82868	1,12394
1,89	1,53570	2,09182	1,84952	1,14233
1,90	1,54722	2,10723	1,87051	1,16093
1,91	1,55892	2,12276	1,89166	1,17974
1,92	1,57081	2,13841	1,91297	1,19877
1,93	1,58290	2,15418	1,93443	1,21800
1,94	1,59518	2,17006	1,95605	1,23745
1,95	1,61265	2,18608	1,97783	1,25713
1,96	1,62032	2,20222	1,99977	1,27701
1,97	1,63319	2,21849	2,02187	1,29712
1,98	1,64626	2,23489	2,04415	1,31745
1,99	1,65954	2,25142	2,06707	1,33800
2,00	1,67302	2,26808	2,08918	1,35878
2,01	1,68671	2,28337	2,11193	1,37828
2,02	1,70062	2,30181	2,13487	1,40102
2,03	1,71474	2,31889	2,15797	1,42249
2,04	1,72907	2,33611	2,18125	1,44418
2,05	1,74362	2,35347	2,20470	1,46611
2,06	1,75840	2,37098	2,22832	1,48827
2,07	1,77360	2,38864	2,25212	1,51068
2,08	1,78861	2,40645	2,27609	1,53332
2,09	1,80405	2,42441	2,30024	1,55620
2,10	1,81973	2,44253	2,32458	1,57933
2,11	1,83565	2,46081	2,34910	1,60269
2,12	1,85179	2,47925	2,37380	1,62630
2,13	1,86817	2,49785	2,39868	1,65017
2,14	1,88479	2,51661	2,42375	1,67428
2,15	1,90165	2,53554	2,44902	1,69865
2,16	1,91876	2,55464	2,47447	1,72327
2,17	1,93612	2,57392	2,50011	1,74813
2,18	1,95373	2,59337	2,52594	1,77326
2,19	1,97158	2,61300	2,55198	1,79865
2,20	1,98970	2,63208	2,57820	1,81431
2,21	2,00807	2,65279	2,60464	1,85022
2,22	2,02671	2,67286	2,63126	1,87640
2,23	2,04560	2,69332	2,65810	1,90285
2,24	2,06476	2,71388	2,68513	1,92956
2,25	2,08420	2,73462	2,71237	1,95655
2,26	2,10390	2,75556	2,73982	1,98381
2,27	2,12387	2,77670	2,76748	2,01135
2,28	2,14412	2,79804	2,79536	2,03916
2,29	2,16465	2,81958	2,82345	2,06725

x	$S(x)$	$T(x)$	$U(x)$	$V(x)$
2,30	2,18547	2,84133	2,85175	2,09563
2,31	2,20657	2,86329	2,87027	2,12429
2,32	2,22795	2,88546	2,90902	2,15324
2,33	2,24964	2,90785	2,93798	2,18247
2,34	2,27161	2,93045	2,96717	2,21200
2,35	2,29388	2,95328	2,99659	2,24182
2,36	2,31645	2,97634	3,02621	2,27193
2,37	2,33932	2,99962	3,05612	2,30234
2,38	2,36250	3,02312	3,08624	2,33306
2,39	2,38598	2,04686	3,11658	2,36406
2,40	2,40978	3,07084	3,14717	2,39539
2,41	2,43389	3,09506	3,17800	2,42700
2,42	2,45832	3,11952	3,20907	2,45895
2,43	2,48307	3,14423	3,24039	2,49119
2,44	2,50814	3,16919	3,27196	2,52375
2,45	2,53354	3,19439	3,30378	2,55664
2,46	2,56927	3,21986	3,33585	2,58983
2,47	2,58535	3,24558	3,36817	2,62335
2,48	2,61174	3,27156	3,40076	2,65720
2,49	2,63848	3,29781	3,43360	2,69136
2,50	2,66557	3,32433	3,46672	2,72587
2,51	2,69300	3,35113	3,50010	2,76070
2,52	2,72079	3,37820	3,53374	2,79584
2,53	2,74893	3,40555	3,56765	2,83137
2,54	2,77742	3,43318	3,60175	2,86722
2,55	2,80627	3,46110	3,63632	2,90342
2,56	2,83549	3,48931	3,67107	2,93993
2,57	2,86507	3,51780	3,70601	2,97783
2,58	2,89502	3,54660	3,74144	3,01608
2,59	2,92535	3,57571	3,77705	3,05467
2,60	2,95606	3,60511	3,81295	3,09352
2,61	2,98714	3,63483	3,84915	3,13273
2,62	3,01862	3,66486	3,88565	3,17230
2,63	3,05047	3,69521	3,92235	3,21226
2,64	3,08273	3,72587	3,95955	3,25255
2,65	3,11538	3,75186	3,99696	3,29318
2,66	3,14843	3,78818	4,03469	3,33419
2,67	3,18188	3,81984	4,07273	3,37552
2,68	3,21755	3,85182	4,11108	3,41719
2,69	3,25001	3,88415	4,14926	3,45925
2,70	3,28470	3,91682	4,18877	3,50164
2,71	3,31980	3,94985	4,22810	3,54437
2,72	3,35533	3,92321	4,26717	3,58740
2,73	3,39128	4,01695	4,30777	3,63078
2,74	3,42767	4,05105	4,34811	3,67457
2,75	3,46449	4,08550	4,38879	3,71884
2,76	3,50175	4,12034	4,42982	3,76354
2,77	3,53945	4,15554	4,47120	3,80864
2,78	3,57760	4,19112	4,51293	3,85413
2,79	3,61619	4,22709	4,55503	3,89997

<i>kz</i>	<i>S (kz)</i>	<i>T (kz)</i>	<i>U (kz)</i>	<i>V (kz)</i>
2,80	3,65525	4,26345	4,59748	3,92847
2,81	3,69476	4,30020	4,64030	3,97465
2,82	3,73493	4,33735	4,68330	4,02127
2,83	3,77520	4,37490	4,72705	4,06832
2,84	3,81612	4,41285	4,77098	4,11582
2,85	3,85751	4,45122	4,81530	4,16375
2,86	3,89940	4,49001	4,86000	4,21212
2,87	3,94176	4,52921	4,90510	4,26095
2,88	3,98461	4,56884	4,95059	4,31028
2,89	4,02796	4,60891	4,99648	4,35996
2,90	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
2,91	4,11617	4,69034	5,08947	4,46082
2,92	4,16103	4,73173	5,13658	4,51195
2,93	4,20640	4,77357	5,18410	4,56355
2,94	4,25230	4,81586	5,23206	4,61563
2,95	4,29875	4,85862	5,28042	4,66820
2,96	4,34567	4,90181	5,32923	4,72124
2,97	4,39315	4,94553	5,37846	4,77478
2,98	4,44117	4,98970	5,42814	4,82881
2,99	4,48972	5,03435	5,47825	4,88335
3,00	4,53883	5,07949	5,52883	4,95838
3,01	4,58850	5,12513	5,57985	4,93392
3,02	4,63872	5,17127	5,63133	5,04998
3,03	4,68950	5,21791	5,68327	5,10655
3,04	4,74085	5,26556	5,73569	5,16364
3,05	4,79277	5,31272	5,78858	5,22126
3,06	4,84527	5,36090	5,84195	5,27942
3,07	4,89836	5,40963	5,89580	5,33810
3,08	4,95204	5,45888	5,95014	5,39734
3,09	5,00631	5,50868	6,00498	5,45711
3,10	5,06118	5,55901	6,06032	5,51744
3,11	5,11666	5,60990	6,11616	5,57832
3,12	5,17275	5,66135	6,17252	5,63976
3,13	5,22931	5,71336	6,22936	5,70177
3,14	5,28678	5,76594	6,28678	5,76425
3,15	5,34475	5,81910	6,34471	5,82751
3,16	5,40316	5,87284	6,40317	5,89125
3,17	5,46257	5,92717	6,46217	5,95657
3,18	5,52245	5,98209	6,52171	6,02049
3,19	5,58298	6,03762	6,58182	6,08601
3,20	5,64418	6,09375	6,64247	6,15213
3,21	5,70603	6,15050	6,70369	6,21885
3,22	5,76855	6,20787	6,76349	6,28621
3,23	5,83161	6,26588	6,82800	6,35417
3,24	5,89564	6,32451	6,89080	6,42277
3,25	5,96021	6,38379	6,95384	6,49199
3,26	6,02535	6,44372	7,01848	6,56185
3,27	6,09145	6,50431	7,08322	6,63236
3,28	6,15813	6,56555	7,14857	6,70352
3,29	6,22552	6,62747	7,21454	6,77533

<i>l z</i>	<i>S (kz)</i>	<i>T (kz)</i>	<i>U (kz)</i>	<i>V (l z)</i>
3,30	6,29364	6,69006	7,28112	6,84782
3,31	6,36248	6,75334	7,34833	6,92095
3,32	6,43206	6,81732	7,41619	6,99478
3,33	6,50238	6,88199	7,48460	7,06928
3,34	6,57345	6,94737	7,55383	7,14448
3,35	6,64527	7,01346	7,62363	7,22036
3,36	6,71786	7,08027	7,69410	7,29696
3,37	6,79121	7,14782	7,76524	7,37425
3,38	6,86534	7,21610	7,83706	7,45226
3,39	6,94026	7,28513	7,90957	7,53099
3,40	7,01597	7,35491	7,98277	7,61045
3,41	7,09247	7,42546	8,05666	7,69065
3,42	7,16978	7,49476	8,13028	7,77159
3,43	7,24790	7,56885	8,20661	7,85326
3,44	7,32685	7,64172	8,28266	7,93573
3,45	7,40662	7,71539	8,35945	8,01893
3,46	7,48723	7,78986	8,38697	8,10291
3,47	7,51858	7,86514	8,51535	8,18708
3,48	7,65099	7,94124	8,59427	8,27322
3,49	7,73415	8,01816	8,67407	8,35956
3,50	7,81818	8,09592	8,75464	8,44671
3,51	7,90309	8,17453	8,83599	8,53466
3,52	7,98888	8,25398	8,91813	8,62343
3,53	8,07556	8,33431	9,00107	8,71302
3,54	8,16315	8,41550	9,08482	8,80346
3,55	8,25164	8,49717	9,16938	8,89472
3,56	8,34104	8,58054	9,25478	8,98685
3,57	8,43137	8,61440	9,34100	9,07982
3,58	8,52264	8,74917	9,42807	9,17367
3,59	8,61485	8,83485	9,51599	9,26838
3,60	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,61	8,80213	9,00902	9,69442	9,46048
3,62	8,89772	9,09751	9,78495	9,55788
3,63	8,99330	9,18696	9,87637	9,65618
3,64	9,09035	9,27738	9,96870	9,75541
3,65	9,18845	9,36878	10,06193	9,85557
3,66	9,28747	9,46116	10,15608	9,95666
3,67	9,38754	9,55453	10,25115	10,05869
3,68	9,48864	9,64891	10,34717	10,16168
3,69	9,59077	9,74430	10,44414	10,26564
3,70	9,68159	9,84072	10,54206	10,37057
3,71	9,79819	9,93819	10,64095	10,47648
3,72	9,90349	10,03670	10,74082	10,58339
3,73	10,00986	10,13626	10,84169	10,69130
3,74	10,11732	10,23690	10,94355	10,80023
3,75	10,22587	10,33861	11,04643	10,91017
3,76	10,33552	10,44141	11,15033	11,02116
3,77	10,44630	10,54533	11,25526	11,13318
3,78	10,55819	10,65034	11,36124	11,24627
3,79	10,67123	10,75649	11,46878	11,36041

<i>kz</i>	<i>S (kz)</i>	<i>T (Iz)</i>	<i>U (Iz)</i>	<i>V (Iz)</i>
3,80	10,78540	10,87377	11,57638	11,47564
3,81	10,90074	10,97221	11,68555	11,59195
3,82	11,01725	11,08180	11,79582	11,70935
3,83	11,13413	11,19255	11,90719	11,82786
3,84	11,25230	11,30449	12,01969	11,94750
3,85	11,37180	11,41763	12,13329	12,06826
3,86	11,49258	11,53198	12,24803	12,19017
3,87	11,61469	11,64754	12,36393	12,31322
3,88	11,73815	11,76434	12,48099	12,43745
3,89	11,86296	11,88238	12,59922	12,56285
3,90	11,98911	12,00166	12,71864	12,68944
3,91	12,11660	12,12224	12,83926	12,81723
3,92	12,24543	12,24407	12,96109	12,94623
3,93	12,37560	12,36722	13,08415	13,07645
3,94	12,50711	12,49167	13,20844	13,20797
3,95	12,64005	12,61744	13,33398	13,34063
3,96	12,77442	12,74453	13,46079	13,47460
3,97	12,91033	12,87299	13,58888	13,60966
3,98	13,04778	13,00289	13,71825	13,74637
3,99	13,18677	13,13398	13,84893	13,88421
4,00	13,32730	13,26656	13,98094	14,02366
4,01	13,46823	13,40053	14,11427	14,16384
4,02	13,61057	13,53593	14,24895	14,30565
4,03	13,75435	13,67275	14,38500	14,44882
4,04	13,89955	13,81102	14,52242	14,59335
4,05	14,04622	13,95074	14,66122	14,73228
4,06	14,19435	14,09195	14,80144	14,88658
4,07	14,34395	14,23464	14,94306	15,03530
4,08	14,49506	14,37883	15,08613	15,18545
4,09	14,64767	14,52455	15,23065	15,33703
4,10	14,80180	14,67179	15,37663	15,49007
4,11	14,95747	14,82058	15,57408	15,64476
4,12	15,11470	14,97095	15,67304	15,80055
4,13	15,27350	15,12288	15,82351	15,96304
4,14	15,43386	15,27641	15,97551	16,11703
4,15	15,59533	15,43157	16,12995	16,27755
4,16	15,75942	15,58835	16,28415	16,43962
4,17	15,92464	15,74676	16,44082	16,60324
4,18	16,09150	15,90648	16,59909	16,76844
4,19	16,26001	16,06860	16,75836	16,93522
4,20	16,43020	16,23204	16,92046	17,10363
4,21	16,60208	16,39721	17,08360	17,27121
4,22	16,77568	16,56409	17,24841	17,44530
4,23	16,95099	16,73272	17,41490	17,61862
4,24	17,12806	16,90312	17,58307	17,79360
4,25	17,30687	17,07529	17,75297	17,97028
4,26	17,48746	17,24926	17,92458	18,14867
4,27	17,66985	17,42595	18,09795	18,32878
4,28	17,85405	17,60266	18,27309	18,51064
4,29	18,04008	17,78214	18,45002	18,69425

z	$S(z)$	$I(kz)$	$U(z)$	$V(kz)$
4,30	18,22794	17,96367	18,62874	18,87964
4,31	18,41767	18,14670	18,80929	19,06683
4,32	18,60928	18,33183	18,99168	19,25583
4,33	18,80280	18,51889	19,17594	19,44607
4,34	18,99823	18,70790	19,36207	19,63935
4,35	19,19558	18,89887	19,55010	19,83392
4,36	19,39491	19,09182	19,74005	20,03037
4,37	19,59620	19,28677	19,93194	20,22872
4,38	19,79949	19,48374	20,12579	20,42901
4,39	20,00479	19,68277	20,32162	20,63121
4,40	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,41	20,42150	20,08701	20,71931	21,04161
4,42	20,63296	20,29229	20,92120	21,24985
4,43	20,84651	20,49968	21,12516	21,46007
4,44	21,06217	20,70922	21,33120	21,67235
4,45	21,27996	20,92093	21,53935	21,88670
4,46	21,49991	21,13483	21,74963	22,10315
4,47	21,72204	21,35094	21,96236	22,32170
4,48	21,94635	21,56927	22,17665	22,54240
4,49	22,17288	21,78587	22,39345	22,76524
4,50	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,51	22,63270	22,23791	22,83371	23,21750
4,52	22,86602	22,46540	23,05722	23,44695
4,53	23,10165	22,69524	23,28303	23,67865
4,54	23,33965	22,92744	23,51114	23,91962
4,55	23,57990	23,16204	23,74159	24,14888
4,56	23,82259	23,39905	23,97439	24,38796
4,57	24,06766	23,63850	24,20957	24,62888
4,58	24,31766	23,88041	24,44916	24,87166
4,59	24,56510	24,12481	24,68719	25,11733
4,60	24,81752	24,37172	24,92967	25,36541
4,61	25,07242	24,62117	25,17463	25,61593
4,62	25,32984	24,87318	25,42210	25,86892
4,63	25,58980	25,12777	25,67210	26,12438
4,64	25,85233	25,38498	25,92467	26,38236
4,65	26,11746	25,64483	26,14981	26,64288
4,66	26,38520	25,90734	26,43757	26,90597
4,67	26,65559	26,17254	26,69797	27,17164
4,68	26,92865	26,44046	26,96103	27,43994
4,69	27,20440	26,71113	27,22678	27,71087
4,70	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
4,71	27,76410	27,26079	27,76799	28,26079
4,72	28,04810	27,53985	28,04045	28,53982
4,73	28,33490	27,82177	28,31729	28,82160
4,74	28,62454	28,10655	28,59693	29,10618
4,75	28,91704	28,39327	28,87944	29,39356
4,76	29,21242	28,68490	29,16483	29,68378
4,77	29,51072	28,97852	29,45314	29,97686
4,78	29,81197	29,27513	29,74440	30,27285
4,79	30,11619	29,57477	30,03855	30,57176

f_z	$S (hz)$	$T (hz)$	$U (hz)$	$V (z)$
4,80	30,42341	29,87746	30,33591	30,87363
4,81	30,73367	30,18325	30,73367	31,17849
4,82	31,04699	30,49215	30,93959	31,48637
4,83	31,36340	30,80420	31,24607	31,79729
4,84	31,68295	31,11943	31,55569	32,11130
4,85	32,00565	31,43787	31,86847	32,42842
4,86	32,33153	31,75955	32,18445	32,74868
4,87	32,66063	32,08450	32,53670	33,07212
4,88	33,99298	32,41277	32,82615	33,39876
4,89	33,32862	32,74438	33,15194	33,72865
4,90	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
4,91	34,00976	33,41774	33,81353	34,39828
4,92	34,35554	33,79570	34,14942	34,73810
4,93	34,70464	34,10486	34,48879	35,08128
4,94	35,05718	34,45367	34,83153	35,42788
4,95	35,41320	34,80602	35,17782	35,77792
4,96	35,77275	35,16195	35,52765	36,13145
4,97	36,13585	35,52149	35,88107	36,48849
4,98	36,50253	35,88467	36,23810	36,84908
4,99	36,87284	36,25155	36,59878	37,21326
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,99531	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80633
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95064	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2 π	134,37338	133,87245	133,37238	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	203,20357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112

kz	$S (kz)$	$T (kz)$	$U (kz)$	$V (kz)$
$\frac{5}{2} \pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,18393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,59658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,71284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56789
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66660
9,2	2473,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56071	2735,00094	2734,14255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3 π	3097,41192	3097,91193	3097,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3339,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5506,19606	5506,34442	5507,03599	5506,88844

Приложение 4. Функции Крылова для расчета балок постоянного сечения на упругом основании

ξ	J_1	J_2	J_3	J_4
0	1	0	0	0
0,010	1,0000	0,01000	0,00005	0,00000
0,020	1,0000	0,02000	0,00020	0,00000
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659

ξ	J_1	J_2	J_3	J
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5400
$\pi/2$	0,0000	1,2546	1,1507	0,6273
1,60	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,70	-0,3644	1,2322	1,3118	9,7863
1,80	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,90	-1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
2,00	-1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,10	-2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,30	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,40	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9461
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8105	2,1293
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065
2,70	-6,7565	-1,7509	1,5827	2,4725
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,90	-8,8471	-3,3079	1,0838	2,7443
3,00	-9,9669	-4,2485	0,7069	2,8346
3,10	-11,1119	-5,3023	0,2303	2,8893
3,20	-12,2656	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,40	-14,5008	-9,1507	-1,9121	2,6589
3,50	-15,5198	-10,6525	-2,9014	2,4195
3,60	-16,4218	-12,2508	-4,0459	2,0735
3,70	-17,1622	-13,9315	-5,3544	1,6049
3,80	-17,6875	-15,6761	-6,8343	0,9969
3,90	-17,9387	-17,4599	-8,4909	0,2321
4,00	-17,8498	-19,2524	-10,3265	-0,7073
4,10	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,20	-16,3505	-22,0755	-14,5274	-3,1812
4,30	-14,7722	-24,2669	-16,8773	-4,7501
4,40	-12,5180	-25,6373	-19,3743	-6,5615
4,50	-9,4890	-26,7447	-21,9959	-8,6290
4,60	-5,5791	-27,5057	-24,7117	-10,9638
4,70	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,5732
4,80	5,3164	-27,6052	-30,2589	-16,4604
4,90	12,5239	-26,7239	-32,9814	-19,6232
5,00	21,0504	-25,0535	-35,5775	-23,0525
5,10	30,997	-22,4661	-37,9619	-26,7317
5,20	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,30	55,5317	-13,9201	-41,6826	-34,7246
5,40	70,2637	-7,6440	-42,7727	-38,9524
5,50	86,7044	-0,1901	-43,1593	-43,2557
5,60	104,8687	9,7544	-42,6775	-47,5558
5,70	124,7352	21,2199	-41,1454	-51,7563
5,80	146,2448	34,7564	-38,3640	-55,7429
5,90	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,0363

Продолжение приложения 4

	I_1	I_2	I_3	I_4
6,00	196,1881	70,6079	-27,4846	-62,7889
6,10	221,8019	91,4992	-19,4005	-65,1503
6,20	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4781
2π	267,7468	133,8725	0	-66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	-66,9175
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	-62,3105
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	-13,2842
7,50	313,3700	580,6710	423,9858	133,6506
5/2π	0	643,9927	643,9926	321,9964
8,00	-216,8647	628,8779	737,3101	422,8713
8,50	-1479,3701	241,4136	981,0984	860,8917
9,00	-3691,4815	-1010,8800	834,8607	1340,3007
3π	-6195,8239	-3097,9120	0	1548,9560
9,50	-6660,9594	-3581,4756	-250,9959	1539,7410
10,0	-9240,8733	-7616,1462	-2995,7095	812,3636

Т а б л и ц а 1.	Геометрические характеристики плоских сечений	30
Т а б л и ц а 2.	Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент (ГОСТ 8509—86)	84
Т а б л и ц а 3.	Уголки стальные горячекатаные неравнополочные Сортамент (ГОСТ 8510—86)	90
Т а б л и ц а 4.	Сталь горячекатаная. Швеллеры. Сортамент (ГОСТ 8240—72). Швеллеры с уклоном внутренних граней полок	94
Т а б л и ц а 5.	Сталь горячекатаная. Швеллеры. Сортамент (ГОСТ 8240—72). Швеллеры с параллельными гранями полок	96
Т а б л и ц а 6.	Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. Сортамент (ГОСТ 8239—72)	98
Т а б л и ц а 7.	Опорные реакции, поперечные силы и изгибающие моменты в статически определимых балках	116
Т а б л и ц а 8.	Изгибающий момент M , нормальная N и поперечная Q силы в консольном круговом стержне при нагружении в его плоскости	141
Т а б л и ц а 9.	Изгибающий $M_{из}$ и крутящий $M_{к}$ моменты в консольном круговом стержне при нагружении, перпендикулярном его плоскости	142
Т а б л и ц а 10	Модули упругости и коэффициент Пуассона	165
Т а б л и ц а 11.	Модули упругости ряда конструкционных материалов при комнатной и пониженных температурах	166
Т а б л и ц а 12	Модули упругости и коэффициент Пуассона тугоплавких металлов при комнатной и высоких температурах	168
Т а б л и ц а 13.	Соотношения между числами твердости по Бриггеллю, Роквеллу и пределом прочности сталей	171
Т а б л и ц а 14	Числа твердости тугоплавких металлов и сплавов на их основе при комнатной и высоких температурах	172
Т а б л и ц а 15	Механические свойства некоторых материалов при высоких температурах	173

Т а б л и ц а 16	Длительная прочность и ползучесть тугоплавких металлов и сплавов на их основе при высоких температурах	175
Т а б л и ц а 17	Механические характеристики некоторых конструкционных материалов при низких температурах	178
Т а б л и ц а 18	Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений на растяжение и сжатие	183
Т а б л и ц а 19	Критерии предельного состояния изотропных материалов (при статическом нагружении)	204
Т а б л и ц а 20	Усилия в простейших стержневых системах	213
Т а б л и ц а 21	Допускаемые напряжения для сварных соединений	212
Т а б л и ц а 22	Допускаемые напряжения для древесины	222
Т а б л и ц а 23	Приближенные расчетные формулы для определения максимального касательного напряжения τ_{\max} через относительный угол закручивания θ в стержнях некруглого сечения	246
Т а б л и ц а 24	Схемы действительных и соответствующих им фиктивных балок	285
Т а б л и ц а 25	Балки равного сопротивления изгибу	286
Т а б л и ц а 26	Уравнения упругой линии и угла поворота поперечных сечений консольной балки переменной высоты	288
Т а б л и ц а 27	Уравнения упругой линии, максимальные прогибы и углы поворота концевых и опорных сечений статически определимых балок постоянного поперечного сечения	289
Т а б л и ц а 28	Форма и размеры ядра сечения	315
Т а б л и ц а 29	Выражения интеграла Мора $\int \bar{M}_i M_p dz$ для различных сочетаний эпюр \bar{M}_i и M_p	335
Т а б л и ц а 30	Площади и координаты центров тяжести некоторых элементарных фигур	338
Т а б л и ц а 31	Опорные реакции, поперечные силы, изгибающие моменты и перемещения в статически неопределимых однопролетных балках	344
Т а б л и ц а 32	Расчетные формулы, учитывающие смещение опор и изменение температуры в статически неопределимых балках (при постоянном EJ)	367
Т а б л и ц а 33	Изгибающие моменты в Г-образной раме $\left(k = \frac{J_2 h}{J_1 l}\right)$	370
Т а б л и ц а 34	Изгибающие моменты в П-образной раме $\left(k = \frac{J_2 h}{J_1 l}\right)$	376
Т а б л и ц а 35	Изгибающие моменты в замкнутой раме	380

Т а б л и ц а 36.	Усилия и перемещения при нагружении кольца в его плоскости	384
Т а б л и ц а 37.	Радиус кривизны нейтрального слоя r_n для сечений различной формы	399
Т а б л и ц а 38.	Значение коэффициента k в формуле $e = kR$.	401
Т а б л и ц а 39.	Перемещения свободного конца консольного кругового стержня постоянного сечения при нагружении в его плоскости	405
Т а б л и ц а 40.	Перемещения свободного конца консольного кругового стержня постоянного сечения при нагружении в перпендикулярной плоскости	407
Т а б л и ц а 41.	Значения определенных интегралов, часто встречающихся при определении перемещений в кривых стержнях	409
Т а б л и ц а 42.	Расчетные формулы для толстостенных цилиндров	426
Т а б л и ц а 43.	Расчетные формулы для определения напряжений и перемещений в тонкостенных оболочках .	434
Т а б л и ц а 44.	Пластические моменты сопротивления для некоторых сечений балок	445
Т а б л и ц а 45.	Коэффициенты ν и η для определения критической нагрузки центрально сжатых стержней по формуле $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$	461
Т а б л и ц а 46.	Критические нагрузки для полосы и некоторых двутавровых балок	493
Т а б л и ц а 47.	Коэффициенты условного допускаемого напряжения на сжатие	502
Т а б л и ц а 48.	Уравнения изгибающего момента $M(z)$ и упругой линии $w(z)$ для некоторых случаев продольно-поперечного изгиба балок постоянного поперечного сечения $\left(k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}\right)$	504
Т а б л и ц а 49.	Собственные частоты колебаний систем с одной и двумя степенями свободы	560
Т а б л и ц а 50.	Частотные уравнения и собственные формы продольных и крутильных колебаний стержней постоянного сечения	568
Т а б л и ц а 51.	Частотные уравнения и собственные формы поперечных колебаний стержней постоянного сечения	572
Т а б л и ц а 52.	Корни частотных уравнений поперечных колебаний стержней постоянного сечения на упругих опорах	573
Т а б л и ц а 53.	Корни частотных уравнений поперечных колебаний стержней постоянного сечения с сосредоточенными массами m	574

Т а б л и ц а 54.	Значения некоторых интегралов, встречающихся при расчетах поперечных колебаний стержней (φ_i — i -я собственная форма колебаний)	575
Т а б л и ц а 55.	Собственные частоты поперечных колебаний стержней постоянного сечения, нагруженных продольными силами	576
Т а б л и ц а 56.	Варианты записи формул Рэлея (19.137) — (19.139) для определения квадрата собственной частоты колебаний стержня	577
Т а б л и ц а 57.	Выражения для определения квадрата собственной частоты по способу Граммеля	578
Т а б л и ц а 58.	Характеристики циклов повторно-переменного нагружения	604
Т а б л и ц а 59.	Значения коэффициента α , учитывающего массу ударяемого элемента в формуле коэффициента динамичности	614
Т а б л и ц а 60.	Расчетные формулы для определения параметров контакта двух тел	632
Т а б л и ц а 61.	Числовые значения коэффициентов n_a, n_b, n_p, n_Δ	642
Т а б л и ц а 62.	Допускаемые давления на площадке контакта при первоначальном контакте по линии и статическом нагружении	643

- Ананьев И. В.* Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем.— М — Л.: ОГИЗ — Гостехиздат.— 1946.
- Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б.* Расчет на прочность деталей машин: Справочник.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Машиностроение, 1979 — 702 с.
- Иванов В. Ф., Никитин Г. В.* Справочник по строительной механике.— Л.: КУБУЧ, 1933.— Т. 1 — 488 с.
- Любошиц М. И., Ицкович Г. М.* Справочник по сопротивлению материалов.— Минск: Вышэйш. шк., 1969.— 464 с.
- Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел.— Киев: Наук думка, 1985.— 264 с.
- Материалы в машиностроении.*— М.: Машиностроение.— Т. 1: Цветные металлы и сплавы.— 1967.— 304 с.; Т. 2: Конструкционная сталь.— 1967.— 496 с.; Т. 3: Специальные стали и сплавы.— 1968.— 446 с.; Т. 4: Чугун.— 1969.— 248 с.; Т. 5: Неметаллические материалы.— 1969.— 544 с.
- Михайлов-Михеев П. Б.* Справочник по металлическим материалам турбино- и моторостроения.— М.— Л.: Машгиз, 1961.— 838 с.
- Писаренко Г. С.* Рассеяние энергии при механических колебаниях.— Киев: Изд-во АН УССР, 1962.— 436 с.
- Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. и др.* Сопротивление материалов — 2-е изд., перераб. и доп.— Киев: Техніка, 1967.— 791 с.
- Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. и др.* Сопротивление материалов.— Киев: Вища шк.— 3-е изд., перераб. и доп.— 1973.— 672 с., 5-е изд., перераб. и доп.— 1986.— 775 с.
- Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии.— Киев: Наук. думка, 1969.— 212 с.
- Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник.— Киев: Наук. думка, 1971.— 375 с.
- Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях / Под ред. Г. С. Писаренко.*— Киев: Наук. думка, 1980.— Т. 1.— 535 с.
- Прочность. Устойчивость. Колебания / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.*— М.: Машиностроение, 1968.— 3 т.
- Рудицын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И.* Справочное пособие по сопротивлению материалов — Минск: Вышэйш. шк., 1970.— 628 с.
- Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М.* Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность — М.: Машгиз, 1963.— 452 с.
- Справочник по технической механике / Под ред. акад. А. Н. Дыпника.*— М.— Л.: Гостехиздат, 1949.— 734 с.

- Справочник по строительной механике корабля / Под ред. акад. Ю. А. Шиманского.*— Л.: Судпромгиз, 1958.— Т. 2 — 528 с.
- Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений / Под ред. А. А. Уманского.*— М.: Госстройиздат, 1960.— 1040 с.
- Справочник машиностроителя / Под ред. акад. АН УССР С. В. Серсена.*— М.: Машгиз, 1963.— Т. 3.— 651 с.
- Справочник машиностроителя / Под ред. Э. А. Сатяля.*— М.: Машиностроение, 1964.— Т. 6.— 540 с.
- Технический справочник железнодорожника.*— М.: Гострансжелдориздат, 1950.— Т. 2: Технические расчеты.— 796 с.
- Троценко В. Г. Усталость и неупругость металлов.*— Киев: Наук. думка, 1971.— 268 с.
- Фесик С. П. Справочник по сопротивлению материалов* — Киев: Будівельник, 1982.— 208 с.
- Химушин Ф. Ф. Жаропрочные стали и сплавы.*— М.: Металлургия, 1969.— 749 с.

- Автоколебания 512
 Амплитуда колебаний 513, 516, 520
 — цикла 581
 Анизотропия 15, 158
- База испытаний на выносливость 582
 Баландина критерий 205
 Балка фиктивная (взаимная) 265, 285
 Балки 107
 — двухопорные 107
 —, деформативность их 261
 —, изгиб их 13, 249
 — консольные 107
 — на упругом основании 278
 — неразрезные 108, 356
 — однопролетные 107
 —, опорные реакции 106, 107, 108
 —, опоры их 106
 — переменного сечения 269
 —, перемещения в них 271, 286, 288, 289, 344
 — равного сопротивления изгибу 271, 286
 —, расчет их 252, 269, 278
 — статически неопределимые 108, 344, 367
 — статически определимые 107, 116
 — тонкостенного профиля 275
 — усилия и моменты в их сечениях 109, 116
- Баллон сферический 430
 Баушингера эффект 598
 Бериулли гипотеза 143
 Бетти теорема 326
 Болтовые соединения 226
 Боткина — Миролюбова критерий 206
 Бредта формула 240
- Бринелля способ определения твердости 151
 Брус 11
 — большой кривизны 392
 — кривой 392
 —, его расчет на прочность 397
 —, определение перемещений 397, 405, 407
 — малой кривизны 392
 Бубнова — Галеркина способ 546
- Вал 233
 —, критическая скорость вращения его 524
 —, расчет на прочность его 236
 Веллера кривая 582
 Верещагина способ 329
 — формула 330
 Взаимность перемещений 326
 — работ 326
 Виккерса способ определения твердости 151
 Волкова критерий 206
 Врубки 231
 Выносливость материала 579
- Галилея — Лейбница критерий 204
 Гибкость стержня 454
 Гипотеза об однородности и изотропности 15
 — о линейной зависимости между деформациями и нагрузками 15, 192
 — о малости деформаций 15
 — о совершенной упругости 15
 — о сплошности материала 15
 Гипотеза относительной жесткости 15
 — плоских сечений 15, 143
 Гистерезис конструкционный 548
 Граммеля способ 578
 — формула 545

- Графоаналитический метод 264
— способ 329
Гриффитса критерий разрушения 619
— теория 618
— формула 617
Губера — Мизеса — Генки критерий 205
Гука закон 15, 143, 144, 154
— — обобщенный 192, 193, 195
— — при изгибе 250
— — при сдвиге 225
- Давиденкова — Фридмана критерий прочности 202
Давление допускаемое 643
Даламбера принцип 525, 532, 536, 548
Декремент колебаний логарифмический 518
— — —, его амплитудная зависимость 522
Демпфирующая способность материала 521
Деформация 13, 153
—, виды ее 13
—, компоненты ее 15
— контактная 625
—, механизм ее образования 153
— объемная 192, 193
— остаточная 13, 161
— относительная 144, 145
— — линейная 13
Деформация относительная угловая 14
— пластическая 13, 154, 160,
— полная 603
— поперечная абсолютная 145
— — относительная 145
— при объемном напряженном состоянии 192
—, скорость ее 158
— упругая 13
— чистого сдвига 224
Диаграмма кручения 233
— напряжений 149
— — истинных 150
— предельных напряжений 583
— предельных амплитуд напряжений 58
— растяжения 146
— — первичная 149
— сжатия 150
— усталости 581
Диск вращающийся 410, 421
Дислокация 155
Длина критическая нити 222
— — стержня 209
— предельная стержня 457
— — вращенная 151
Долговечность циклическая 602
Донкертея формула 545
Друккера — Прагера критерий 206
- Жаропрочность 160
Жаростойкость 160
Жесткость 140
Жесткость вала при кручении 235
— изгибная поперечного сечения 261
— поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии) 144
— — — — при кручении 322
— стержня при растяжении (сжатии) 144
Журавского формула 252
- Зависимости дифференциальные при изгибе балок 111
— — плоских кривых стержней 136
Зависимость амплитудно-частотная 551
— фазо-частотная 553
Задача нахождения крутящих моментов и углов закручивания при кручении стержня 235
— — продольных сил и перемещений при осевом растяжении — сжатии стержня 208, 209
— — угловых деформации и линейных сдвиговых перемещений 224, 225
— обратная для напряжений 187, 189
— — — моментов инерции 23
— прямая для напряжений 187, 188
— — — моментов инерции 24
— статически неопределимая 211, 279
- Заделка 107
Заклепочные соединения 226
Закон парности касательных напряжений 187
— сохранения энергии при колебаниях 539
Запас прочности 164
— — при повторно-переменных нагрузках 590, 595
— — с учетом динамической нагрузки 612
Зашемление жесткое 107
- Изгиб 13, 249
Изгиб балок, материал которых не следует закону Гука 282

- балок на упругом основании 278
- косо́й 303
- кривых брусьев 392
- неплоский 303
- плоский 106
- продольно-поперечный 458, 504
- продольный 448
- с кручением 311
- сложный 303
- с растяжением 307
- чистый 249
- Излом усталостный 579
- Интеграл Мора 327, 329, 335
- Интенсивность нагрузки 102
 - напряжений 192
- Испытание на выносливость 582
 - на растяжение 146
 - на сжатие 150
- Кастильяно теорема 332
- Клапейрона уравнение 358
- Клебша — Ренкина критерий 204
- Колебания вынужденные 511, 515
 - главные 537
 - затухающие 510
 - , классификация 511, 512
 - крутильные 512, 532
 - нарастающие 510
 - параметрические 510
 - поперечные 512, 535
- Колебания продольные 512, 532
 - свободные (собственные) 511, 521
 - систем с несколькими степенями свободы 525
 - — с одной степенью свободы 513, 515, 517, 518
 - с учетом сопротивления 517, 518
 - упругие 510
- Кольцо распорное (жесткости) 433
 - , усилия и перемещения при нагружении 360, 384
- Консоль 107, 263, 268, 272, 288
- Конструкция статически неопределимая 210
- Контакт двух тел 629
 - — —, расчетные формулы 632
- Концентраторы напряжений 156, 157, 258
- Концентрация напряжений 156, 164
 - —, ее влияние на предел выносливости 585
 - — при изгибе 257
 - — при кручении 244
 - — при растяжении — сжатии 156, 157
- Коффина метод 605
- Коэффициент асимметрии цикла 580
 - влияния абсолютных размеров 587
 - динамического усиления 516, 520
 - динамичности 606, 614
 - запаса прочности 164, 196, 201
 - — — при повторно-герменных нагрузках 596
 - — — при статической нагрузке 164
 - — устойчивости 448, 456
 - интенсивности напряжений у вершины трещины 625, 629
 - концентрации напряжений 156, 245, 257, 664
 - — теоретический 157, 644
 - — эффективный (действительный) 157, 585, 644
- Коэффициент концентрации эффективный для детали 588
 - расширения температурный 219, 644
 - мягкости 203
 - приведения длины 451
 - чувствительности к концентрации напряжений 586
 - — к асимметрии цикла 591
 - уменьшения допускаемого напряжения на сжатие 456
 - условного допускаемого напряжения на сжатие 456, 502
 - устойчивости 461
 - , учитывающий массу ударяемого элемента 614
- Кривая ползучести 160
 - резонансная 551
 - усталости 582, 603
- Кривизна 250
- Крип — см. ползучесть
- Критерии наибольших касательных напряжений 198, 205
 - — нормальных напряжений 197, 204
 - — относительных линейных деформаций 197, 204
 - октаэдрических касательных напряжений 205
 - прочности (предельного состояния) 196, 204
 - разрушения 619
 - удельной потенциальной энергии формоизменения 198
- Круг инерции 23, 189
 - Мора 188, 189
 - напряжений 188, 189
- Кручение 13, 233

- замкнутых тонкостенных профилей 240
- с изгибом 311
- стержней некруглого сечения 238
- тонкостенных стержней открытого профиля 241
- Крылова функции 280, 536
- Кулона критерий 205
- Кулона — Мора критерий 199, 200, 205
- Купол сферический 432

- Лагранжа теорема 332
- уравнение 526
- Лапласа уравнение 431
- Линия нейтральная 251
- упругая 261
- —, ее дифференциальное уравнение 262, 279, 459
- — ее уравнение 262, 267, 289, 344
- цепная 217
- Ляме задача 421
- формула 412

- Мазинга модель 598
- Максвелла теорема 326
- формула 328
- Малоцикловая усталость 596
- Мариотта — Грасгофа критерий 204
- Масса приведенная 543
- ударяемого элемента, ее учет 608, 614
- Материал анизотропный 15, 231
- его испытание 146
- , его механические характеристики при растяжении, сжатии 148
- его физико-механические свойства 183
- изотропный 15
- пластичный 196, 439, 580
- хрупкий 196, 580
- циклически стабильный 600
- — разупрочняющийся 600
- — упрочняющийся 600
- Манабреа теорема 334
- Метод графоаналитический определения перемещений балки 264
- начальных параметров 265
- перемещений 341
- перемножения эпюр 327
- сечений 103
- сил 341
- —, канонические уравнения 343
- Механика разрушения (распространения трещин) 616
- Модуль объемной деформации 194
- упругости второго рода 165, 170, 224, 644
- — при растяжении 143, 149, 165—170, 644
- — при сдвиге 165—170, 224, 644
- — секущий 149
- Юнга 143, 644
- Момент изгибающий 104, 109, 116
- — приведенный 331
- Момент инерции плоских фигур 17
- — осевой 17, 30—101
- — относительно параллельных осей 20
- — полярный 18
- — при повороте осей 20
- — сложных сечении 19
- — центробежный 19, 30—101
- — экваториальный 17
- сил инерции 515
- Моменты инерции главные 21
- Момент крутящий 104, 106
- Момент сопротивления 26
- — осевой 26, 30—101
- — пластический при кручении 442
- — — при изгибе 444, 445
- — полярный 27, 30—101, 235
- — при изгибе 251
- — при кручении 238
- статический площади 16, 253
- Мора метод 264, 326
- интеграл 327, 329, 335
- круг 188
- формула 327
- Мэнсона — Коффина формула 602

- Навье формула 250
- Нагружение жесткое 597, 600, 602
- мягкое 597, 601
- Нагрузка 102, 103
- динамическая 103, 158
- допускаемая 448
- , ее интенсивность 102, 215
- критическая 447, 461, 493
- мгновенно приложенная 103
- погонная 102
- повторно-переменная 103
- предельная 439
- распределенная 102, 216, 264
- статическая 103, 164
- ударная 103, 606
- фиктивная 265
- Напряжение 139, 192
- в брусках большой кривизны 394
- в момент разрыва 147, 178 — 181

- во вращающемся диске 423, 425
- в толстостенном цилиндре 412, 417, 426
- в тонкостенных оболочках 430, 434
- главное 184—186, 190
- динамическое при ударе 608
- — при скручивающем ударе 610
- — при ударном изгибе 611
- допускаемое 140, 163, 164, 182, 232
- — на устойчивость 456
- — при растяжении 145, 164, 182, 196
- — при сдвиге 226
- касательное 139, 184, 185, 186, 187
- — при изгибе 252, 253
- контактное 627
- критическое 617
- меридиональное 429
- нормальное 139, 184—186, 189
- — при изгибе 249, 250
- окружное 429
- октаэдрическое 192
- повторно-переменное 579
- полное 139, 184
- по наклонным площадкам 186, 188, 189, 191
- предельное при повторно-переменном нагружении 583
- при изгибе с кручением 311
- — — с растяжением 307
- при косом изгибе 305
- при кручении 233, 239, 240, 246
- при продольно-поперечном изгибе 460
- при растяжении 143, 147, 185
- при сдвиге 224
- при сложном (неплоском) изгибе 304
- смятия 228
- среднее цикла 581
- температурное в толстостенном цилиндре 417
- эквивалентное 196—199
- Натяжение нити 217
- Начало возможных перемещений 323
- Неизвестные лишние 211, 340
- Неопределимость статическая 211, 340
- Нить гибкая 215
- Оболочка 11
- тонкостенная, ее расчет 428—430
- — коническая 12, 436
- — сферическая 12, 434
- — торовая 438
- — цилиндрическая 12
- Опора, ее шпы 106
- Опора шарнирно-неподвижная 107
- шарнирно-подвижная 106
- Опорные реакции в балках 106, 107, 116
- — статически неопределимых балках 344
- устройства балок 106
- Оси инерции главные 19
- — —, определение их направления 21
- Ось балки 108, 261
- жесткости балки 278
- изогнутая балки 262
- Относительное рассеяние энергии 522
- Парность касательных напряжений 187, 237
- Паузы, их влияние на предел выносливости 589
- Перегрузки, их влияние на предел выносливости 589
- Перемещение, вызванное изменением температуры 328
- во вращающемся диске 424
- в статически неопределимых балках 344, 367
- — — — системах 361
- в толстостенном цилиндре 412, 426
- в тонкостенной оболочке 434
- , методы его определения 318
- обобщенное 318
- при изгибе 264
- — — кривых брусьев 397, 405, 407
- растяжении (сжатии) 209
- удельное 319
- Период колебаний 510
- —, его определение 514
- Петля гистерезиса 521, 547, 597
- —, площадь ее 521, 548
- —, ширина ее 599
- Писаренко — Лебедева критерий 201, 207
- Пластичность, ее характеристики 148
- Плоскость изгиба 306
- силовая 305
- Площадка текучести 147
- Площадки главные 184—186, 190
- Площадь сечения 16, 30—100

- Поверхности состояние, ее влияние на предел выносливости 588
- Поверхность предельная 200
- Ползучесть 160, 175
- Правила построения эпюр внутренних 109
- Правила знаков для изгибающего момента 109
- — для касательных напряжений 186
- — для крутящего момента 106
- — для нормальных напряжений 186
- — для поперечной силы 109
- — для продольных сил 106
- Прандтля диаграмма 440
- Предел выносливости 178, 644
- —, влияние конструктивно-технологических факторов 585
- —, методы его определения 581
- длительной прочности 162, 173, 174
- ползучести 161, 173, 174
- пропорциональности 174, 178—181
- — условный 147
- прочности 147, 159, 173, 174, 178—181, 644
- текучести 147, 158, 159, 164, 173, 174, 178—181, 644
- упругости 147
- — условный 148
- суммирования действия сил 15
- Принцип суперпозиции 15
- Прогиб 14, 262
- полный 307
- , формулы для балок постоянного поперечного сечения 289
- , формулы для балок равного сопротивления изгибу 286
- , формулы для статически неопределимых балок 344, 367
- Пролет балки 107
- Профиль замкнутый 240
- открытый 241
- Прочность 11
- длительная 162, 175
- термическая 605
- Пружины винтовые, их расчет 242
- — конические 244
- — цилиндрические 242
- — их осадка 243
- — их удлинение 243
- Пуассона коэффициент 145, 159, 165, 166, 168—170
- Работа внешних сил 320
- внутренних сил 321
- — — возможная (виртуальная) 323
- деформации 148
- — удельная 149
- , затраченная на растяжение 148
- , теорема о взаимности 126
- Равнодействующая распределенной нагрузки 115
- Равновесие упругое устойчивое 447
- — упругое неустойчивое 447
- Радиус инерции 25
- — удельный 158
- —, значения для плоских сечений 30
- кривизны нейтрального слоя 393, 396, 399
- Разрушение вязкое 616
- квазистатическое 601
- квазихрупкое 616
- пластическое 616
- при циклическом деформировании 601
- усталостное 579, 601
- хрупкое 616
- Рама Г-образная 113, 370
- замкнутая 380
- П-образная 376
- Растяжение 13, 208
- внецентренное 308
- , испытание материала 146
- , механические характеристики материала 146
- , модуль упругости 143
- , напряжения и деформации 144, 145
- , с изгибом 307
- стержней с учетом собственного веса 208
- , условие жесткости 145
- — прочности 145, 208
- Рассеяние энергии относительное 522
- Расчет колебаний с учетом рассеяния энергии 547
- на выносливость 590
- на изгиб с учетом сил инерции 274
- на прочность при повторно-переменных нагрузках 590
- на срез 223
- на ударную нагрузку (удар) 606
- на устойчивость 456
- по предельным состояниям 439
- статически неопределимых систем 210, 340
- Реакции, их вычисление 108, 116—135

- Резервуар сферический 431
 Ритца способ 545
 Рэлея метод (способ) 540
 — формула 544, 546, 577
 Резонанс 517
 Релаксация напряжений 162
 Роквелла способ определения твердости 151
- Свойства механические 146, 158, 644
 — пластичности 148
 — прочности 148
 — физико-механические 614
 Свойства упругие 147
 Связи лишние 211
 Сдвиг 13, 223
 — абсолютный 13
 — относительный 14
 — чистый 224
 — —, условия прочности 226
 — фазы колебаний 513
 Сен-Венана критерий 204
 Сен-Венана принцип 144
 Сечение, его геометрические характеристики 16, 30—101
 — опасное 145
 Сжатие 13
 — внецентренное 308
 —, испытание 150
 —, условные прочности 145
 — шаров 627
 — цилиндров 628
 Сила внешняя 102
 — внутренняя 102
 — вынуждающая 516, 518
 — инерции 513, 525, 532, 536
 Сила критическая 448
 — —, влияние условий закрепления стержня 450
 — массовая 102
 — обобщенная 318
 — объемная 102
 — поверхностная 102
 — поперечная 104, 109, 116—135
 — продольная 104, 106
 — сопротивления, пропорциональная скорости 517
 — сосредоточенная 102
 — упругого сопротивления 321
 Симпсона — Корноухова формула 331
 Система колебательная 511
 — — с двумя степенями свободы 511
 — — с одной степенью свободы 511, 513
- — со многими (несколькими) степенями свободы 525
 — основная 341
 — статически неопределимая 215, 340, 361
 — рамная пространственная 363
 — эквивалентная 341
 Скорость критическая вращения вала 524
 Слой неспиральный 249
 Смита диаграмма 583
 Смятие 227
 Соединения сварные 228, 232
 Сопротивление временное 147, 158, 164
 — действию повторно-переменных напряжений 579
 — сложное 303
 Состояние деформированное 15, 184
 — конструкции предельное 439
 — и напряженное 184
 Состояние деформированное двухосное 186
 — —, его главные направления 185
 — — линейное 185
 — — объемное 185, 190, 194
 — — одноосное 185
 — — однородное 185
 — — плоское 185, 186, 188
 — — предельное (опасное) 196, 439
 — — трехосное 185, 190
 — напряженно-деформированное предельное 196
 Степень статической неопределимости системы 340
 Стержень 11
 — большой кривизны 397
 —, его колебания 532, 535
 —, его растяжение (сжатие) 208
 — кривой 114, 138
 — круговой консольный 142
 — ломаный пространственный 137
 — малой гибкости 455
 — — кривизны 397
 — равного сопротивления 209
 — сжатый, его устойчивость 455
 — статически неопределимый криволнейный 359
 — ступенчатый 209, 210, 269
 Стрела провисания нити 218
 Сужение относительное 148, 178—181
- Твердость материала 150, 151, 159, 171

- Температура, ее влияние на предел выносливости 590
- Теорема наименьшей работы 334
- о взаимности работ и перемещений 326
- о минимуме потенциальной энергии 334
- Теория оболочек безмоментная 428
- прочности 196
- механическая 197
- Траектория главных напряжений 257
- Тренировка, ее влияние на предел выносливости 589
- Трещина нормального отрыва 620
- поперечного сдвига 620
- продольного сдвига 620
- Трещиностойкость, ее характеристики 625
- Угол закручивания 14
- — относительный 14, 234
- поворота сечения при изгибе 14
- — — — —, его значения для консольной балки переменной высоты 288
- — — — —, его значения для статически неопределимых балок 344, 367
- — — — —, его значения для статически определимых балок 289
- — — — —, его определение 262, 265, 267
- Удлинение абсолютное 13, 209
- относительное среднее 13, 148, 178—181
- истинное 13, 178—181
- Укорочение абсолютное 13
- относительное среднее 13
- Уравнение дифференциальное колебаний крутильных 535
- — — поперечных 537, 539
- — — продольных 533
- — — системы с несколькими степенями свободы 526, 529
- — — с одной степенью свободы, вынужденные 516, 518
- Уравнение дифференциальное колебаний крутильных с одной степенью свободы, свободные 513, 517
- — — — — изогнутой оси (упругой линии) 262
- — — — — балки на упругом основании 279
- — — — — при продольно-поперечном изгибе 459
- — — — — для балок постоянного сечения 262
- — — — — изогнутой оси (упругой линии) балки постоянного сечения 262, 267, 289, 344
- — — — — для консольной балки переменной высоты 288
- — — — — для статически неопределимых балок 344
- каноническое метода сил 343
- кривой усталости 603
- нейтральной линии 305
- равновесия 211
- совместной деформации 211
- состояния нити 221
- статики 210
- трех моментов 356
- угла поворота балки 262, 288
- упругой линии балки 262, 267, 289, 344
- — — универсальное 267
- физическое 250
- частотное (частоты) поперечных колебаний 538, 572
- — — продольных и крутильных колебаний 534, 568
- частоты для системы с несколькими степенями свободы 529
- Усилия в простейших стержневых системах (таблица 20) 213
- в сечениях балки 116, 135
- в сечении (см. сила внутренняя) 103, 104
- , их эпюры 102, 103, 105, 108
- Условие жесткости 142
- — при кручении 236, 239
- Условие жесткости при растяжении 145
- прочности 140, 197—199, 220, 226, 228, 236, 314, 397
- — в общем случае действия сил на брус 314
- — при внецентренном растяжении (сжатии) 309
- — при изгибе 255, 397
- — при изгибе с кручением 312
- — при контактных напряжениях 631
- — при косом изгибе 306
- — при кручении 236, 239
- — при одноосном напряженном состоянии 196
- — при растяжении 145
- — при сложном напряженном состоянии 196
- — при чистом сдвиге 226
- Усталость (см. также выносливость) 579

- малоцикловая 596
- по теории тороидов 580
- термическая 603
- Устойчивость 447
 - сжатых стержней 418, 453
 - упругого равновесия 447
- Фаза колебаний 513
 - фактор масштабный 537
- Факторы влияния силовые 104
 - конструктивно-технологические, их влияние на предел выносливости 585
- Форма главного колебания 537
- Формы колебаний крутильных 568
 - — поперечных 537
 - — продольных 534, 568
 - — системы с несколькими степенями свободы 528
- Формы колебаний собственные 537
- Функции Крылова для расчета балок на упругом основании 280, 717
 - — S, T, U, V 537, 706
- Фурье метод 533
- Характеристика амплитудно-частотная 517
- Характеристики геометрические плоских сечений 16, 30
 - механические материала 143, 178
 - пластичности материала 148
 - прочности материала 147
 - цикла 580, 604
 - энергетические материала 148
- Хейя диаграмма 584
- Хладноломкость 163
- Центр жесткости 278
 - изгиба 275, 278
 - тяжести 16
- Цикл напряжений 580
 - — пульсирующий 581
 - — симметричный 581
- Циклы напряжений (нагрузки) на сжатие и характеристики 580, 604
- Цилиндры толстостенные 410, 417, 426
 - — составные 415
- Частота колебаний секундная 514
 - —, приближенные методы определения 540
 - — угловая 513
 - критическая 517
- Частоты колебаний систем с одной степенью свободы 513, 515, 560
 - — — с двумя степенями свободы 527, 532, 560
 - — поперечных колебания стержней, нагруженных продольными силами 576
- Число колебаний в секунду 514
 - оборотов критическое 524
 - степеней свободы 511
- Шарнир пластический 444
- Швы сварные, их расчет 226, 230
- Шейка 147
- Эпитера гиперболоидная 454
 - формула 448, 449
- Эллипс инерции 26
- Энергия деформации потенциальная (см также работа внутренних сил) 194
 - — — в общем случае 194
 - — — при растяжении 194
 - — — при сдвиге 225
 - — — при ударе 607, 610
 - поверхностная (натяжения) 617
 - на смятие материала в месте соударения 609, 613
 - потенциальная удельная 194, 195
 - — — изменения объема 195
 - — — — формы 195
 - — — при растяжении 194
 - — — при сдвиге 226
 - — — формоизменения 200
- Эпюры внутренних усилий 103
 - — — для кривых стержней 114
 - — — для простейших стержней 130—138
 - — — для рам 113
 - — —, правила построения 109
- Эпюры напряжений касательных при изгибе 253, 276
 - — — при кручении 235, 240
 - — — нормальных при изгибе 251
 - поперечных сил и изгибающих моментов для балок 109, 110, 116—135
 - продольных (осевых) сил 106, 208
- Ягпа — Бужинского критерий прочности 205
- Ядро сечения 308
 - —, формулы размеры 315
- Ясинского формула 455